Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

COMPUTACION DE CIERTOS ANILLOS DE WITT

Juan Tena Ayuso

Dpto. de Algebra
Universidad Complutense de Madrid

Abstract : Additive structure is obtained for the Witt rings $W(v(S))$ (respectively $W_q(v(S))$ of the bilinear forms) respectively quadratic forms) over $v(S)$, the ring of the S-adic integers, with S a finite set of discrete valuations of Q.

§1. Introducción y Notaciones.

Sea A un anillo conmutativo y unitario, $W(A)$ (respectivamente $W_q(A)$) los anillos de Witt de módulos bilineales (respectivamente cuadráticos) sobre A. Si $2 \in A^*$ existe una correspondencia biyectiva entre módulos bilineales y cuadráticos y por tanto $W(A) = W_q(A)$. [1]

Sea Q cuerpo de los números racionales, P conjunto de primos del anillo de enteros Z, S subconjunto finito de P. Para $p \in P$ notemos $v(p)$ el anillo de enteros de la valuación p-ádica de Q y $v = v(S) = \bigcap_S v(p)$ el anillo de enteros S-ádicos. Por ser v principal todo módulo bilineal (cuadrático) sobre v es libre. La inmersión $v \dashrightarrow Q$ induce inyecciones:

$$i : W(v) \dashrightarrow W(Q) \qquad\qquad i_q : W_q(v) \dashrightarrow W_q(Q) = W(Q)$$

La estructura aditiva de Q esbien conocida [3]. En lo que sigue se generaliza el proceso de construcción al caso de los anillos $v(S)$.

§2. Resultados

I) $2 \not\in S$. En este caso todo módulo bilineal M admite una base ortogonal [1]; se tiene pues una diagonalización:

$$M = (u_1) \perp (u_2) \perp \ldots \perp (u_n) \qquad u_i \in v^{*} - v^{*2}$$

La estructura de $W(v) = W_q(v)$ viene dada por

Teorema 1.- Sea S tal que para todo primo $p \equiv 1$ (Mod.8), $p \not\in S$ exista una unidad S-ádica no cuadrado módulo p. Se tiene un isomorfismo (de grupos aditivos):

$$W(v(S)) \approx Z \oplus \sum^{\oplus}_{p \not\in S} W(F_p)$$

Demostración: Sea $\varphi_p: W(v) \dashrightarrow W(F_p)$ el segundo homomorfismo residuo, [3], cap. 6 y sea $s: W(v) \dashrightarrow Z$ el homomorfismo signatura. El isomorfismo viene establecido por $s \oplus \sum^{\oplus}_{p \not\in S} \varphi_p$. En particular la suryectividad de cada φ_p viene garantizada por la restricción impuesta a S.

Corolario 1.- $\quad s \oplus \sum^{\oplus}_{p} \varphi_p : W(Q) \approx Z \oplus \sum_{p \in P} W(F_p)$

Corolario 2.- $\quad$ Para todo $p \neq 2$, $W(Z_p) \approx Z \oplus \sum_{q \neq p} W(F_q)$

II) $2 \in S$. En este caso $2 \not\in v^{*}$ y se pierde la correspondencia entre formas bilineales y cuadráticas. Para las primeras se tiene

Teorema 2.- Sea S tal que para todo $p \equiv 1$ (mod.4) exista una unidad S-ádica no cuadrado módulo p. Se tiene un isomorfismo (de grupos aditivos):

$$W(v) \simeq Z \oplus \sum_{p \not\in S} W(F_p)$$

Demostración: Consideremos la restricción a W(v) del homomorfismo $s \oplus \sum_{p \in P} \varphi_p$ (Corolario 1, teorema 1). Dado que todo módulo bilineal sobre v es suma ortogonal de un módulo $(u_1) \perp \ldots \perp (u_r)$ y de planos $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ $a,b \not\in v^{*}$, $a.b-1 \in v^{*}$ [1], es facil ver que s y $\varphi_{p \not\in S}$ son sobres. Para φ_p, $p \in S$ este homomorfismo es trivialmente nulo sobre $(u_1) \perp \ldots \perp (u_r)$; por lo que se refiere a

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ factorizando a traves de Q se tiene $(a) \perp (a^2 b-a)$ cuya imagen por

φ_p es plano hiperbólico y por tanto representa el 0 en $W(F_p)$.

Corolario 1.- Para todo $p \in P$ (incluido 2)

$$W(Z_p) \simeq Z \oplus \sum_{q \neq p} W(F_p)$$

Corolario 2.- $W(Z) \simeq Z$.

Demostración: Se deduce del corolario anterior y del isomorfismo $W(Z) \simeq \bigcap_{p \in P} W(Z_p)$ [2]

Para un calculo diferente de $W(Z)$ ver [4], [5]

Por lo que se refiere al anillo de Witt de formas cuadráticas sobre v se tiene la inyección $W_q(v) \dashrightarrow W(Q)$ y puede considerarse la restricción a $W_q(v)$ de $s \oplus \sum \varphi_p$.

Para todo $p \in S$ se tiene $\operatorname{Im} \varphi_p = 0$, por un razonamiento análogo al del teorema 2. Por otra parte $\operatorname{Im}(s) \subset 2Z$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Baeza R.: "Quadratic Forms over semilocal rings" (Springer, Lecture Notes N.655)

[2] Hostmaelingen C.: " Sur l'anneau de Witt d'un anneau de Prufer (C.R.A.S. Paris,serie A,t 280,pp 69-71)

[3] Lam T.Y.: The Algebraic Theory of Quadratic Forms" (Benjamin)

[4] Larotonda A. - Micali A. - Villamayor O.E.: " Sur le groupe de Witt" (Symposia Math. II (1973) pp. 211-219)

[5] Milnor J. - Husemoller D. " Symmetric Bilinear Forms" (Springer)