Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

NUEVA DEMOSTRACION DE LA FORMULA DE AUSLANDER-BUCHSBAUM

Fernando Serrano García

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad de Barcelona

Abstract : A new and simple proof of a formula of Auslander-Buchsbaum

Sean A un anillo local noetheriano , m su ideal maximal , k el cuerpo residual de A , M un A-módulo finitogenerado. Llamemos $dp_A M$ a la dimensión proyectiva de M y G(M) al grado de M . Se va a dar una nueva demostración de la siguiente

<u>Proposición</u> : Si $dp_A M$ es finita se verifica

$$dp_A M + G(M) = G(A)$$

(Ver , por ejemplo , (*) teorema 173).

Demostración :

Es sabido que si $x \in m$ no divide a cero en M entonces

$$\text{(a)} \quad G(M/xM) = G(M) - 1$$

$$\text{(b)} \quad dp_A M/xM = dp_A M + 1$$

Sea $x_1, \ldots, x_{G(M)}$ una M-sucesión maximal . Usando (a) y (b) reiteradamente se obtiene

$$G(M/(x_1, \ldots, x_{G(M)})M) = 0$$

$$dp_A(M/(x_1, \ldots, x_{G(M)})M) = dp_A M + G(M)$$

Igualmente , si $y_1, \ldots, y_{G(A)}$ es una A-sucesión maximal resulta

$$G(A/(y_1, \ldots, y_{G(A)})) = 0$$

$$dp_A(A/(y_1, \ldots, y_{G(A)})) = G(A)$$

Bastará , pues , probar lo siguiente : si R y S son dos A-módulos finitogenerados de grado 0 y dimensión proyectiva finita entonces $dp_A R = dp_A S$.

Sean $r = dp_A R$, $s = dp_A S$. Si $r \neq s$ se puede suponer , por ejemplo , $r < s$. Como $G(R) = 0$, m es un primo asociado a R y existe un monomorfismo $0 \longrightarrow k \longrightarrow R$. Sea C su conúcleo . Tensorializando por S la sucesión exacta $0 \longrightarrow k \longrightarrow R \longrightarrow C \longrightarrow 0$ se obtiene la sucesión exacta

$$\mathrm{Tor}^A_{s+1}(S,C) \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_s(S,k) \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_s(S,R)$$

$\mathrm{Tor}^A_{s+1}(S,C) = 0$ porque $dp_A S = s$. $\mathrm{Tor}^A_s(S,R) = 0$ porque $dp_A R = r < s$. Por lo tanto $\mathrm{Tor}^A_s(S,k) = 0$, lo cual se contradice con el hecho de ser $s=dp_A S$. Ha de ser , pues , $r = s$.

Bibliografía :

(*) I. Kaplansky : Commutative Rings . Univ. of Chicago Press , 1974 .