Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE COHOMOLOGIA EN VARIEDADES DE Ω-GRUPOS

C. Rodríguez Fernández, L. Franco Fernández

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad de Santiago de Compostela

Abstract For a variety V of distributive Ω-groups, 5 and 8-term exact sequences are given. 1 and 2 dimensional groups of Cohomology are obtained as extensions in the variety.

Comunicación:

La Cohomología respecto a una variedad ha sido considerada por STAMMBACH en |14| y LEEDHAM-GREEN en |7| para grupos, LUE en |9| para álgebras asociativas y TARAZONA en |16| para álgebras de LIE. La obtención de las sucesiones de 5-términos se apoya en la existencia, para cada caso, de un álgebra envolvente. Así mismo se obtienen interpretaciones de los grupos de Cohomología en dimensiones 1 y 2.

Este trabajo se apoya en el concepto de $\check{V}G$-módulo introducido en |2| y desarrollado adecuadamente en |13|, sin utilizar un álgebra envolvente, y está planteado en el marco de una variedad V de Ω-grupos distributivos. También se utiliza el método semisimplicial de derivación de funtores entre una categoría base y una abeliana, planteado por RINEHART en |12|.

Para un Ω-grupo G en V y un G-módulo A se definen los grupos de Cohomología $V^n(G,A)$ derivando el funtor "derivaciones" entre la categoría de V-objetos sobre G (V,G) y Ab^o.

Utilizando convenientemente la sucesión exacta de funtores derivados se deducen las sucesiones de 5 y 8-términos para Cohomología:

Teorema: Si $G' \rightarrowtail G \twoheadrightarrow G''$ es una sucesión exacta corta en $\mathcal{V}$ y A un $\mathcal{V}G''$-módulo, la sucesión:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}(G'',A) \longrightarrow \mathrm{Der}(G,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(G',A) \longrightarrow \mathcal{V}^1(G'',A) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathcal{V}^1(G,A) \longrightarrow E_{(2)G}(G',A) \longrightarrow \mathcal{V}^2(G'',A) \longrightarrow \mathcal{V}^2(G,A),$$

es exacta y natural.

El primer grupo de Cohomología se interpreta como extensiones con núcleo abeliano en la variedad.

Teorema: Si $G \in \mathcal{V}$ y A es un $\mathcal{V}G$-módulo, entonces $\mathcal{V}^1(G,A)$ es naturalmente isomorfo al grupo $e_{\mathcal{V}}(G,A)$ de clases de extensiones de G por A en $\mathcal{V}$, dotado de la suma de BAER.

Este resultado ha sido obtenido, siguiendo los métodos clásicos, por LEEDHAM-GREEN |7| y STAMMBACH |15| en grupos ordinarios y LUE |9| en álgebras asociativas.

El segundo grupo de Cohomología se interpreta como 2-extensiones especiales en la variedad.

Teorema: Si $G \in \mathcal{V}$ y A es un $\mathcal{V}G$-módulo, entonces $\mathcal{V}^2(G,A)$ es naturalmente isomorfo al grupo $E^2_{\mathcal{V}}(G,A)$ de clases de 2-extensiones especiales de G por A en $\mathcal{V}$:

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

verificando:

(2) $(e_1+e_1', b_1)\ldots\ldots(e_n+e_n', b_n)\omega - (0,b_1)\ldots\ldots(0,b_n)\omega =$
$(e_1, e_1'+b_1)\ldots\ldots(e_n, e_n'+b_n)\omega - (0, e_1'+b_1)\ldots\ldots(0, e_n'+b_n)\omega,$
$\omega \in \Omega$, en $E \triangleleft B$,

dotado de la suma de BAER.

En el caso de grupos ordinarios este resultado fué obtenido por LEEDAM-GREEN, C.-McKAY |8| y para álgebras asociativas por LUE |9|.

Siguiendo a ORZECH |11|, y para variedades de Ω-grupos erificando los axiomas de una categoría de interés, se puede interpretar el segundo grupo de Cohomología como obstrucciones a la extensión. Esto nos permite deducir relaciones entre 2-extensiones especiales y obstrucciones.

Bibliografía

1. BARR, M. Cohomology and obstructions: Commutative algebras. Sem. Triples and Categorical homology theory. Springer (1969), 357-375.

2. BARR, M.-BECK, J. Aciclic models and triples. Proc. Conference on categorical algebra. La Jolla. Springer *1966) 336-346.

3. BARR, M.-BECK, J. Homology and standard constructions. Sem. Triples and Categorical homology theory. Springer (1969), 245-335.

4. BARR, M.-RINEHART, G. Cohomology as the derived functor of derivations. Trans. Amer. Math. Soc. 122 (1966), 416--426.

5. HILTON-STAMMBACH. A course in homological algebra. Springer (1971)

6. KEUNE, F. Homotopical algebra and algebraic K-Theory. (Thesis). (1972).

7. LEEDHAM-GREEN, C. Homology in varieties of groups.I,II,III. Trans. Amer. Math. Soc. 162 (1971), 1-34.

8. LEEDHAM-GREEN, C.-McKAY, S. Baer-invariants, isologism, varietal laws and homology. Acta Mathematica. vol. 137, (1976) 99-150.

9. LUE, A. Cohomology of algebras relative to a variety. Math. Z. 121 (1971), 220-232.

10. MODI, K. Semisimplicial Methods and the homology of groups. (Thesis). Queen Mary College. London. (1976).

11. ORZECH, G. Obstructions theory in algebraic categories I, II. J. of Pure and Applied algebra 2. (1972), 287-340.

12. RINEHART, G. Satellites and cohomology. J. of Algebra 12. (1969), 295-329.

13. RODRIGUEZ, C. Cohomologia en variedades de Ω-grupos. (Pendiente de publicación).

14. STAMMBACH, U. Homological methods in group varieties. Comment. Math. Helv. 45, (1970) 287-298.

15. STAMMBACH, U. Homology in group theory. Springer (1973).

16. TARAZONA, D. Homologia respecto a una variedad de álgebras de Lie. Alxebra 23. Santiago (1978).