Pub. Mat.UAB
N°20 Set. 1980
Actes VII JMHL

UNA NOTA SOBRE CUADRADOS UNIVERSALES DE GRUPOS

P. Jara Martínez

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad de Granada

ABSTRACT. In this paper we define two kinds of universal square: the almost cocartesian square and the mixed cartesian square (mixed pullback), and we prove its existence. We use them to buil short exact sequences from others given under determined conditions.

(A M S Subject Classification. 18A30, 18A35, 20J15.

Dado un grupo G se considera la categoría de G-grupos, G-Gr, esta es una categoría algebraica, por tanto es completa y cocompleta.

Definición. Sea Q un grupo y A, B dos Q-módulos. Si $\psi: A \longrightarrow B$ es un morfismo de Q-módulos y $d : Q \longrightarrow B$ es una derivación, se llama cuadrado cartesiano mixto de ψ y d a un cuadrado conmutativo verificando:

i) G es un grupo.

ii) $\bar{\psi}$ es un morfismo de grupos y $\bar{d}$ es una derivación, considerando en A la estructura de G-módulo inducida por $\bar{\psi}$.

iii) Para cualquier otro grupo G', un morfismo de grupos $\psi' : G' \longrightarrow Q$ y una derivación $d' : G' \longrightarrow A$ verificando (i), (ii) y $d\psi' = \psi\bar{d}$, existe un único morfismo de grupos ω tal que $d' = \bar{d}\omega$ y $\psi' = \bar{\psi}\omega$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "\omega"] \arrow[drr, bend left, "\psi'"] \arrow[ddr, bend right, "d'"'] & & \\
& G' \arrow[r, "\bar{\psi}"] \arrow[d, "\bar{d}"'] & Q \arrow[d, "d"] \\
& A \arrow[r, "\psi"] & B
\end{tikzcd}$$

Teorema. 1. Sea Q un grupo y a y B dos Q-módulos. Si $\psi: A \longrightarrow B$ es un morfismo de Q-módulos y $d : Q \longrightarrow B$ es una derivación, entonces existe el cuadrado cartesiano mixto de ψ y d.

Esquema de la demostración. Se considera el producto semidirecto de A por Q, que notaremos $A\,]Q$, se define el subgrupo

$$G = \{ (a,q) \in A\,]Q \ / \ \psi(a) = d(q) \}$$

y las aplicaciones $\bar{\psi} : G \longrightarrow Q$, $\bar{d} : G \longrightarrow A$, definidas

$$\bar{\psi}((a,q)) = q; \qquad \bar{d}((a,q)) = a.$$

Se demuestra que $\bar{\psi}$ y $\bar{d}$ son morfismo de grupos y derivación respectivamente y que verifican la propiedad universal enunciada en la definición de cuadrado cartesiano mixto.

El cuadrado cartesiano mixto se notará en lo sucesivo con un cuadrado en el vertice superior izquierdo, y el grupo G se notara $A \,\square_B\, Q$.

Como consecuencia de la definición se tiene que si d es una aplicación injectiva, entonces $\bar{d}$ también lo es, y si ψ es un epimorfismo, entonces $\bar{\psi}$ tambien lo es.

Proposición.2.Sea Q un grupo, A y B dos Q-módulos. Si $\psi: A \longrightarrow B$ es un morfismo de Q-módulos y $d : Q \longrightarrow B$ es una derivación, entonces existe un isomorfismo ω entre $\mathrm{Ker}\psi$ y $\mathrm{Ker}\,\bar{\psi}$, tal que $\psi^{k}\omega = \bar{d}\,\bar{\psi}^{k}$.

Como consecuencia se tiene que dada una sucesión exacta corta de Q-módulos $C \xrightarrow{\tau} A \xrightarrow{\pi} B$ y una derivación $d : Q \longrightarrow B$, entonces existe una sucesión exacta corta $C \longrightarrow A \,\square_B\, Q \xrightarrow{\bar{\pi}} Q$.

Definición. Sean A, B, G Q-grupos, $\phi: G \longrightarrow Q$ un morfismo de Q-grupos tal que $\phi(g).g' = g\,g'\,g^{-1}$. Si $\psi: A \longrightarrow B$ y $\ell: A \longrightarrow G$ son morfismos de Q-grupos, se llama cuadrado casi cocartesiano de ψ y ℓ a un cuadrado conmutativo verificando:

i) H es un Q-grupo y la acción de G sobre H inducida por ϕ verifica $g.h = \bar{\psi}(g)\,h\,\bar{\psi}(g^{-1})$.

ii) $\bar{\psi}$ y $\bar{\ell}$ son morfismos de Q-grupos.

iii) Para cualquier otro Q-grupo H' y cualquier par de morfismos de Q-grupos $\psi' : G \longrightarrow H'$ y $\ell' : B \longrightarrow H'$ verificando (i), (ii) y la igualdad $\psi' \ell = \ell' \psi$ existe un único morfismo de Q-grupos $\omega : H' \longrightarrow H$ tal que $\psi' = \omega \bar{\psi}$, $\ell' = \omega \bar{\ell}$.

Teorema 3. Sean A, B, G Q-grupos y $\phi : G \longrightarrow Q$ morfismo de Q-grupos tal que $\phi(g).g' = g g' g^{-1}$. Si $\psi : A \longrightarrow B$ y $\ell : A \longrightarrow G$ son morfismos de Q-grupos, entonces existe el cuadrado casi cocartesiano de ψ y ℓ.

Esquema de la demostración. Se considera el producto semidirecto de B por G, $B]G$, y se define $T = \{ \tau_B \psi(a) \tau_G \ell(-a) \ / \ a \in A \}$, siendo τ_B y τ_G las inyecciones de B y G en el productosemidirecto. Se considera la clausura normal de T en $B]G$, $N(T)$, y se define H igual al grupo cociente $(B]G)/ N(T)$. Los morfismos $\bar{\ell}$ y $\bar{\psi}$ son las composiciones de τ_B y τ_G con la proyección de $B]G$ en H.

Teorema. 4. En las condiciones del teorema 3 si la estructura de G-grupo de A inducida por ϕ verifica $\ell(a_1).a_2 = a_1 + a_2 - a_1$, B es un G-módulo y un A-módulo trivial, entonces se verifica:

i) T es un subgrupo normal de $B]G$.

ii) Si ℓ es un monomorfismo, entonces $\bar{\ell}$ es un monomorfismo normal.

iii) Existe un isomorfismo de Q-grupos ω tal que $\omega \ell^C = \bar{\ell}^C \bar{\psi}$.

Como consecuencia se tiene que dada una sucesión exacta corta de Q-grupos $A \overset{\ell}{\rightarrowtail} G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} C$, siendo A un Q-módulo, $\phi : C \longrightarrow Q$ morfismo de Q-grupos verificando $\phi\pi(g_1).g_2 = g_1 g_2 g_1^{-1}$, y $\psi : A \longrightarrow B$ morfismo de Q-módulos, se tiene una sucesión exacta corta de Q-grupos $B \overset{\bar{\ell}}{\rightarrowtail} H \twoheadrightarrow C$.

El cuadrado casi cocartesiano se notará en lo sucesivo con una circunferencia en el vertice inferior derecho, y el Q-grupo H se notará $B o_A G$.

A continuación estudiamos algunos teoremas que establecen la conmutatividad de las construcciones de cuadrados universales.

Teorema. 5. Para $i = 1, 2$, sean A_i y B_i Q-módulos, $A_i \rightarrowtail G_i \twoheadrightarrow C_i$ sucesiones exactas cortas de Q-grupos, $\phi_i : C_i \longrightarrow Q$ morfismos de Q-grupos verificando: $\phi_i \pi_i (g_{i_1}).g_{i_2} = g_{i_1} g_{i_2} g_{i_1}^{-1}$. Si $\psi_i : A_i \longrightarrow B_i$ son morfismos de Q-módulos, entonces existe un isomorfismo ω que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
B_1 \times B_2 \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & (B_1 \times B_2) \circ_{(A_1 \times A_2)} (G_1 \times G_2) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\omega"'] & C_1 \times C_2 \arrow[d, equal] \\
B_1 \times B_2 \arrow[r, tail] & (B_1 \circ_{A_1} G_1) \times (B_2 \circ_{A_2} G_2) \arrow[r, two heads] & C_1 \times C_2
\end{tikzcd}$$

Teorema. 6. Sean A y B dos Q-módulos, $\psi : A \longrightarrow B$ un morfismo de Q-módulos, $A \rightarrowtail G \xrightarrow{\pi} C$ una sucesión exacta corta de Q-grupos, $\phi : C \longrightarrow Q$ un morfismo de Q-grupos verificando $\phi \pi(g_1). g_2 = g_1 g_2 g_1^{-1}$. Si D es un Q-grupo y $\xi : D \longrightarrow C$ es un morfismo de Q-grupos, entonces existe un isomorfismo ω que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & B \circ_A (G \times_C D) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\omega"] & D \arrow[d, equal] \\
B \arrow[r, tail] & (B \circ_A G) \times_C D \arrow[r, two heads] & D
\end{tikzcd}$$

Teorema. 7. Sean A y B dos Q-módulos, $A \rightarrowtail G \xrightarrow{\pi} C$ una sucesión exacta corta de Q-grupos, $\phi : C \longrightarrow Q$ morfismo de Q-grupos verificando $\phi \pi (g_1).g_2 = g_1 g_2 g_1^{-1}$. Si $\psi : A \longrightarrow B$ es un epimorfismo de Q-módulos, entonces existe un isomorfismo ω haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & B *_A G \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\omega"] & C \arrow[d, equal] \\
B \arrow[r, tail] & B \circ_A G \arrow[r, two heads] & C
\end{tikzcd}$$

Teorema. 8. Sean A, B, D Q-módulos, $\psi : A \longrightarrow B$ y $\xi : B \longrightarrow D$ morfismos de Q-módulos, $A \rightarrowtail G \xrightarrow{\pi} C$ una sucesión exacta corta de Q-grupos, $\phi : C \longrightarrow Q$ morfismo de Q-grupos verificando:

$$\phi \pi (g_1) . g_2 = g_1 g_2 g_1^{-1}$$

En estas condiciones, existe un isomorfismo ω que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & D \circ_A G \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\omega"] & C \arrow[d, equal] \\
D \arrow[r, tail] & D \circ_B (B \circ_A G) \arrow[r, two heads] & C
\end{tikzcd}$$

BIBLIOGRAFIA.

1. HERRLICH, H., STRECKER, G. E.. Category Theory: an introduction. Allyn and Bacon, (1973).

2. HILTON, P. J., STAMMBACH, U.. A Course in Homological Algebra. Springer-Verlag, (1971).

3. R.-GRANDJEAN, A.. Homología en Categorías Exactas. Alxebra, 4. Universidad de Santiago. (1970).

4. WU, Y.-C.. $H^3(G,A)$ and obstrucctions of group extensions. J. Pure Appl. Algebra, 13, 73 - 82, (1978).