Pub. Mat. UAB
Nº20 Set. 1980
Actes VII JMHL

LA DIMENSION DEBIL DE LOS ANILLOS CLASICOS

José Luis Gómez Pardo

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad de Murcia

Abstract.- The weak dimension of a ring R, wD(R), is shown to be equal to the supremum of the injective dimensions of the pure-injective left R-modules. Using this result and the structure theorem for pure-injectives over commutative rings ([2]), the weak dimension of a (commutative) classical ring ([9]) is characterized as the supremum of the injective dimensions of the cocyclic modules. Characterizations of the classical rings R for which $wD(R) \leq 1$ are given and it is also shown that, for certain classical rings R, wD(R) is the supremum of the injective dimensions of the simple modules.

Sea R un anillo (asociativo y con identidad) y ${}_R\mathrm{Mod}$ la categoría de R-módulos por la izquierda. Si $M \in {}_R\mathrm{Mod}$ se denotará wd(M) a la dimensión débil (o plana) de M e id(M) a la dimensión inyectiva de M. Las dimensiones global y (global) débil de R se escribirán D(R) y wD(R), respectivamente ([1]). Un R-módulo se dice puro-inyectivo ([7],[10]) si tiene la propiedad de inyectividad relativa a la clase de las sucesiones exactas puras. M se dice finitamente cogenerado (FC) ([8]) si su zócalo es esencial y finitamente generado y cocíclico (subdirectamente irreducible) si su zócalo es esencial y simple ([9]). La envoltura inyectiva de un R-módulo M se denotará E(M).

Utilizando las propiedades de los R-módulos puro-inyectivos, se obtiene la siguiente caracterización de la dimensión débil de un R-módulo M:

PROPOSICION 1 ([3]). Sea $M \in {}_R\mathrm{Mod}$. Se verifica:

$wD(M) \leq n$ si y sólo si $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,N) = 0$ para todo $N \in {}_R\mathrm{Mod}$ puro-inyectivo

En particular, $wD(M) = \inf\{n \mid \mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,N) = 0$ para todo N puro-inyectivo$\}$ y los R-módulos planos F están caracterizados por verificar la condición $\mathrm{Ext}_R^1(F,N) = 0$ para todo N puro-inyectivo.

Como consecuencia se obtiene:

PROPOSICION 2 ([3]). Sea R un anillo. Entonces se verifica:

$$wD(R) = \sup\{id(M) \mid M \in {}_R\mathrm{Mod} \text{ puro-inyectivo}\} = \sup\{id(M) \mid M \in \mathrm{Mod}_R \text{ puro-inyectivo}\}$$

Para anillos conmutativos existe un teorema de estructura de R-módulos puro-inyectivos, los cuales son precisamente los sumandos directos de los productos de R-módulos finitamente cogenerados y puro-inyectivos ([2]). Por otra parte, un R-módulo se dice linealmente compacto si toda familia de variedades lineales $\{x_i + M_i\}$ ($x_i \in M$, M_i submódulo de M) con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía. Los anillos conmutativos con la propiedad de que todo R-módulo FC es linealmente compacto fueron denominados clásicos por Vamos ([9]). El teorema de Couchot antes citado y la Proposición 2, aplicados a un anillo clásico permiten obtener:

PROPOSICION 3 ([3],[4]). Sea R un anillo clásico. Entonces se tiene:

$$wD(R) = \sup\{id(M) \mid M \in {}_R\mathrm{Mod} \text{ finitamente cogenerado}\}$$

La demostración se obtiene teniendo en cuenta que, en este caso, todo R-módulo FC es linealmente compacto y en consecuencia puro-inyectivo ([10]).

El resultado anterior puede ser mejorado de la manera siguiente:

PROPOSICION 4 ([4]). Sea R un anillo clásico y $\mathcal{C} \subseteq {}_R\mathrm{Mod}$ una clase de R-módulos finitamente cogenerados, con la propiedad de que todo R-módulo FC no nulo tiene un cociente no nulo perteneciente a $\mathcal{C}$. Entonces:

$$wD(R) = \sup\{id(N) \mid N \in \mathcal{C}\}$$

La demostración puede hacerse utilizando un teorema de Jensen ([5]) según el cual si $\{M_i\}_{i \in I}$ es un sistema inverso de R-módulos linealmente compactos y $\varprojlim_I^{(1)}$ denota el primer funtor derivado de $\varprojlim_I$, entonces $\varprojlim_I^{(1)} M_i = 0$, lo cual permite obtener, dado un diagrama con L finitamente cogenerado:

$$\begin{tikzcd} & & F \arrow[dr, "f"] & & \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

un levantamiento maximal de f a un cociente de M mayor que N y así se puede probar que F es plano si y sólo si $\mathrm{Ext}^1_R(F,L) = 0$ para todo $L\in\mathcal{C}$, de donde, por inducción , se obtiene el resultado.

Teniendo en cuenta que todo R-módulo FC (de hecho, todo R-módulo) no nulo tiene un cociente cocíclico no nulo ([9]), se obtiene:

PROPOSICION 5 ([4]). Sea R un anillo clásico. Se verifica:

$$wD(R) = \sup\{id(M) \mid M\in {}_R\mathrm{Mod} \text{ cocíclico}\}$$

Lo anterior puede ser utilizado para caracterizar los anillos clásicos R tales que $wD(R)\leq 1$. Para ello se utilizará el siguiente concepto ([6]): Un anillo R (no necesariamente conmutativo) se dice cosemihereditario por la izquierda si todo cociente FC de un R-módulo por la izquierda inyectivo FC es inyectivo. Se obtiene:

PROPOSICION 6 ([3],[4]). Sea R un anillo clásico. Son equivalentes:

i) $wD(R)\leq 1$

ii) R es cosemihereditario

iii) Todo cociente FC de un R-módulo inyectivo cocíclico es inyectivo

iv) Todo cociente de un R-módulo inyectivo cocíclico es inyectivo.

Un anillo R se dice fuertemente cosemihereditario por la izquierda ([6]) si todo cociente FC de un inyectivo $M\in {}_R\mathrm{Mod}$ es inyectivo. Se obtiene:

PROPOSICION 7 ([3]). Sea R un anillo clásico coherente o un dominio clásico. Son equivalentes:

i) R es semihereditario

ii) R es fuertemente cosemihereditario

iii) R es cosemihereditario

iv) $wD(R)\leq 1$.

Ejemplos de anillos que verifican las cuatro condiciones equivalentes de la Proposición anterior los proporcionan los dominios de valoración casi maximales y los anillos conmutativos noetherianos semihereditarios (hereditarios).

La Proposición 4 puede ser explotada para obtener más información sobre la dimensión débil de algunos anillos clásicos más particulares. Un anillo conmutativo R se dice coartiniano si todo R-módulo FC es finitamente generado, lo cual equivale a que los anillos locales R_m sean artinianos para todo ideal maximal m de R ([8]) (R localmente artiniano). Tales anillos son clásicos y aplicando la Proposición 4 a la clase $\mathcal{C}$ de los R-módulos simples se obtiene:

PROPOSICION 8 ([4]). Sea R conmutativo coartiniano. Entonces:

$$wD(R) = \sup \{ id(S) \mid S \in {}_R\text{Mod simple} \}$$

El resultado obtenido en la Proposición 8 puede ser mejorado utilizando localización. Un anillo conmutativo se dice conoetheriano si todo R-módulo FC es artiniano, lo cual equivale a que R sea localmente noetheriano ([8]). En particular, tales anillos son clásicos y se puede demostrar:

PROPOSICION 9 ([4]). Sea R conmutativo conoetheriano. Entonces:

$$wD(R) = \sup \{ id(S) \mid S \in {}_R\text{Mod simple} \}$$

B I B L I O G R A F I A

1.- CARTAN,H.;EILENBERG,S.: Homological algebra. Princeton U. Press (1956)

2.- COUCHOT,F.: Sous-modules purs et modules de type cofini. Lect. Notes in Math. 641, Springer (1978).

3.- GOMEZ PARDO,J.L.: Inyectividad pura y dimensión débil. Pendiente de publicación en Rev. Mat. Hisp. Amer.

4.- GOMEZ PARDO,J.L.: Sobre la dimensión débil de algunas clases de anillos conmutativos. Pendiente de publicación.

5.- JENSEN,C.U.: Les foncteurs derivés de $\varprojlim$ et leurs applications en théorie des modules. Lect. Notes in Math. 254, Springer (1972).

6.- MILLER,R.W.;TURNIDGE,D.R.: Factors of cofinitely genrated injective modules. Comm. in Algebra 4 (3), 233-243 (1976).

7.- STENSTRÖM,B.: Pure submodules. Arkiv for Mat. 7, 159-171 (1967).

8.- VAMOS,P.: The dual of the notion of "finitely generated". J. London Math. Soc., 43, 643-646 (1968).

9.- VAMOS,P.: Classical rings. J. Algebra 34, 114-129 (1975).

10.- WARFIELD,R.B.: Purity and algebraic compactness for modules. Pacific J. Math. 28, 699-719 (1969).