Pub. Mat. UAB
Nº 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

ANILLOS CONMUTATIVOS CUYAS EXTENSIONES ENTERAS VERIFICAN LA PROPIEDAD DE "GOING-BETWEEN"

José María Giral Silió

Dpto. de Algebra
Universidad de Barcelona

Abstract: Let A and B denote commutative rings. We say that $A \subset B$ satisfies going-between if given prime ideals $P_1 \subset P \subset P_2$ of A and $Q_1 \subset Q_2$ of B such that $Q_1 \cap A = P_1$, $Q_2 \cap A = P_2$, then there exist a prime ideal Q of B such that $Q_1 \subset Q \subset Q_2$ and $Q \cap A = P$. We say A is a GB_2-ring if every integral extension $A \subset B$ satisfies going-between. We give characterizations of GB_2-rings, specially in the noetherian case, and determine the finitely generated k-algebras and the series rings $k[[X_1,\dots,X_n]]$ which are GB_2-rings, being k a field.

Introducción.

Los anillos que se mencionan son conmutativos y unitarios. Si A es un anillo, Spec A, dim A, A' designan respectivamente el espectro primo de A, la dimensión de Krull de A y el cierre entero de A en su anillo total de fracciones. Si P es un ideal primo de A, h(P), ch(P) son respectivamente la altura y coaltura de P. Decimos que una extensión $A \subset B$ verifica la propiedad de "*going-between*" si para toda terna $P_1 \subset P \subset P_2$ de Spec A y todo par $Q_1 \subset Q_2$ de Spec B tales que $Q_1 \cap A = P_1$, $Q_2 \cap A = P_2$, existe Q en Spec B tal que $Q_1 \subset Q \subset Q_2$ y $Q \cap A = P$. Dicha propiedad, que denominamos así por analogía con los clásicos términos de "going-up" y "going-down", es de interés para un conocimiento mas profundo de la aplicación Spec B $\rightarrow$ Spec A. Nos ha sido sugerida por una cuestión de W. Krull ([3], p.755), aún no resuelta completamente en el ámbito de los anillos noetherianos: si $A \subset B$ es una extensión entera con A y B anillos íntegros y A íntegramente cerrado y si $Q_1 \subset Q_2$ son ideales primos adyacentes de B, ¿lo son también $Q_1 \cap A \subset Q_2 \cap A$? ($Q_1 \subset Q_2$ se dicen adyacentes si $h(Q_2/Q_1) = 1$).La cuestión del "going-between" es desde luego mucho mas fuerte que la del problema de Krull y a diferencia de éste,es de interés para los anillos mas habituales.

Estudiamos el alcance de la propiedad de "going-between" a través de las siguientes definiciones,para un anillo A:

A se llama un *GB_0-anillo* si todas sus extensiones son GB-extensiones.

A se llama un *GB_1-anillo* si es íntegro y todas sus extensiones que son anillos íntegros son GB-extensiones.

A se llama un *GB_2-anillo* si todas sus extensiones enteras son GB-extensiones.

El caso mas interesante es el de los GB_2-anillos y casi todos los resultados se refieren a él.Por razones de espacio no se incluyen demostraciones,ejemplos ni interpretaciones geométricas,ni se tratan las generalidades del tema.

1-Caracterización de los GB_0 y GB_1-anillos.

La siguiente proposición reduce el problema al caso de los GB_1-anillos.

(1.1) Proposición.Un anillo A es un GB_0-anillo si y solo si A/p es un GB_1-anillo para todo ideal primo minimal p de A.

Se demuestra luego que basta considerar extensiones de A que sean anillos de valoración:

(1.2) Proposición.Sea A un anillo íntegro,K su cuerpo de cocientes.A es un GB_1-anillo si y solo si para todo anillo de valoración V de K que contiene a A, $A \subset V$ es una GB-extensión.

Un anillo íntegro A se llama un *GD-anillo* si toda extensión $A \subset B$ con B íntegro verifica el "going-down".Se tiene ahora una nueva caracterización de los GD-anillos (véase [1] para una información completa sobre ellos).

(1.3) Corolario.Sea A un anillo íntegro.A es un GB_1-anillo si y solo si es un GD-anillo.

2-Caracterización de los GB_2-anillos.

La caracterización básica es:

(2.1) Proposición.Un anillo A es un GB_2-anillo si y solo si $A/P \subset (A/P)'$ verifica el "going-down" para todo $P \in \operatorname{Spec} A$ tal que $ch(P) > 1$.

(2.2) Corolario.Para un anillo A las siguientes condiciones son equivalentes:

a) A es un GB_2-anillo.

b) Toda extensión finita de A es una GB-extensión.

c) Toda extensión entera monógena de A es una GB-extensión.

(2.3) Corolario. Sea A un anillo íntegro. A es un GB_2-anillo si y solo si toda extensión entera monógena íntegra de A es una GB- extensión.

(2.4) Corolario. Sea A un anillo local henseliano íntegro íntegramente cerrado con dim A < 4. Entonces A es un GB_2-anillo.

3-El caso noetheriano.

Sea $A \subset B$ una extensión de anillos, $P \in \operatorname{Spec} A$. Se dice que P es *uniramificado* en B si existe un único $Q \in \operatorname{Spec} B$ tal que $Q \cap A = P$. El teorema de McAdam ([4]) relativo al "going-down" entre un anillo noetheriano íntegro y su cierre entero permite reformular (2.1) de manera mas sencilla:

(3.1) Corolario. Sea A un anillo noetheriano. A es un GB_2-anillo si y solo si para todo $P \in \operatorname{Spec} A$ tal que $ch(P) > 1$, todo ideal primo de A/P de altura > 1 es uniramificado en $(A/P)'$.

En el caso noetheriano es también posible dar un criterio para decidir cuándo el paso al cierre entero es una GB-extensión. Es posible suponer que el anillo es reducido.

(3.2) Proposición. Sea A un anillo noetheriano reducido, p_i $i = 1,\ldots,n$ sus ideales primos minimales, $A_i = A/p_i$. $A \subset A'$ es una GB-extensión si y solo si para cada $i = 1,\ldots,n$ todo $P \in \operatorname{Spec} A_i$ con $h(P) > 1$ es uniramificado en A_i'.

(3.3) Corolario. Sea A un GB_2-anillo noetheriano. Entonces A' es un GB_2-anillo.

4-El caso de álgebras finitogeneradas.

Se formula ahora una condición necesaria que tiene la ventaja de no utilizar extensiones enteras y que es la clave de los dos teoremas que siguen. Se recuerda que en un anillo noetheriano A un *G-ideal* es un ideal primo que está contenido en solo un número finito de ideales primos de A.

(4.1) Proposición. Sea A un anillo noetheriano íntegro, K su cuerpo de cocientes, $\alpha \in K$. Supóngase que existen ideales primos distintos Q_0, Q_1, Q_2 de $A[\alpha]$ tales que $Q_0 \subset Q_1 \cap Q_2$ y que $Q_1 \cap A = Q_2 \cap A = P$ y $Q_0 \cap A = P_0$ verifican: $h(P/P_0) = 1$ y P no es un G-ideal de A. Entonces A no es un GB_2-anillo.

La aplicación de (4.1) conduce a considerar la llamada conjetura de Kaplansky-Hochster: si A es un anillo noetheriano íntegro y $P_1, P_2 \in \operatorname{Spec} A$ son de altura dos, ¿existe algún ideal primo $\neq (o)$ contenido en $P_1 \cap P_2$?. El teorema siguiente utiliza la respuesta positiva de McAdam a dicha conjetura cuando A es un anillo de polinomios con coeficientes en un anillo noetheriano ([5]).

Si B es un anillo de dimensión de Krull finita n llamamos *radical dimensional* de B a la intersección de los ideales maximales de B de altura n y lo denotamos rd(B).

(4.2) Teorema. Sean $A \subset B$ anillos íntegros tales que B es un GB_2-anillo noetheriano y una A-álgebra finitogenerada con $gr.tr._A B > 0$. Entonces $\dim B < 4$ y si $rd(B) = 0$, $\dim B < 3$.

(4.3) Corolario. Sea k un cuerpo, B una k-álgebra finitogenerada íntegra con $\dim B > 1$. B es un GB_2-anillo si y solo si $\dim B = 2$ y $\operatorname{Spec} B' \to \operatorname{Spec} B$ es un homeomorfismo.

El siguiente teorema permite obtener información en el caso local, a diferencia de (4.2), a cambio de hipótesis mas fuertes. Por anillo *regular* se entiende un anillo A tal que A_M es un anillo local regular para todo ideal maximal M de A.

(4.4) Teorema. Sea A un anillo íntegro regular, X una indeterminada, B un anillo íntegro tal que $A[X] \subset B$ es una extensión finita, $P \in \operatorname{Spec} B$. Si B_P es un GB_2-anillo, entonces $h(P) < 4$.

5-El caso de anillos de series de potencias.

No es posible ahora basarse en (4.1) porque la conjetura de Kaplansky-Hochster tiene aquí respuesta negativa ([5]). Si A es un anillo local noetheriano y $\hat{A}$ su completado, $\hat{A}$ puede ser un GB_2-anillo sin serlo A. La siguiente proposición establece sin embargo que en tal caso A cumple ciertas condiciones de uniramificación, lo que es la clave del método seguido en este caso.

(5.1) Proposición. Sea A un anillo local noetheriano íntegro cuyas fibras formales son geométricamente normales. Sea $P \in \operatorname{Spec} A$ con $ch(P) > 1$ y tal que el ideal maximal de A/P es uniramificado en (A/P)'. Si $\hat{A}$ es un GB_2-anillo entonces la extensión $A/P \subset (A/P)'$ verifica el "going-down".

Para aplicar (5.1) se establece la proposición siguiente, que da en condiciones generales ejemplos de anillos que en la terminología de Grothendieck son "unibranches" pero no localmente "unibranches". Es de señalar que el ejemplo de ([2] 6.15.2) tiene una demostración incorrecta.

(5.2) Proposición. Sea B un anillo factorial, X, Y, Z, indeterminadas, $q \in \operatorname{Spec} B$, $P_1 = (q,X,Y)$, $P_2 = (q,X,Y,Z)$. Existe un ideal primo Q de $B[X,Y,Z]$, $Q \subset P_1$ tal que si $C = B[X,Y,Z]/Q$, P_2/Q es uniramificado en C' y P_1/Q no es uniramificado en C'.

Utilizando (5.1) y (5.2) se obtiene:

(5.3) Proposición. *Sea* B *un anillo noetheriano factorial cuyas fibras formales son geométricamente normales. Sea* $q \in \operatorname{Spec} B$, $A = B[X,Y,Z]_{(q,X,Y,Z)}$. *Si* $\hat{A}$ *es un* GB_2*-anillo, entonces* $q = (0)$.

(5.4) Corolario. *Sea* k *un cuerpo.* $k[[X_1,\dots,X_n]]$ *es un* GB_2*-anillo si y solo si* $n < 4$.

Referencias:

[1] *D.E.Dobbs, I.J.Papick,* Going-down:a survey, Nieuw. Arch. Wisk. 26(1978), 255-291.

[2] *A.Grothendieck, J.Dieudonné,* EGA IV 2e. partie, I.H.E.S. Publ.Math. 24, Pais (1965).

[3] *W.Krull,* Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. III Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie, Math. Z. 42(1937), 745-766.

[4] *S.McAdam,* Going-down, Duke Math. J. 39 (1972), 633-636.

[5] *S.McAdam,* Intersections of heigth 2 primes, J.Algebra 49 (1977), 315-321.