Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE SUBTEORIAS DE LA DOBLE DUALIDAD

J.L. Freire Nistal

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad de Santiago de Compostela

Abstract When we work on a category K with structural reflection to Set, we can cut the induced double dualization monad on Set out of the induced respective monad on K. This allows us to show how structures over K on the correpresentative object induce subtheories of the double dualization monad. Applications to varieties of algebras over K are given.

Comunicación:

Sea L un objeto de una categoría K para el cual existe la potencia L^X para cualquier conjunto X. Entonces la teoría algebraica inducida sobre la categoría C de conjuntos por la adjunción $L^{(-)} \dashv \mathrm{Hom}_K(-,L): K° \longrightarrow C$, se denomina doble dualidad (|3|,|4|) $\mathbb{T} = (T,\eta,\mu)$. Así $T(X)=\mathrm{Hom}_K(L^X,L)$; $T(f)(A)=A\cdot L^f$ para todo f de $\mathrm{Hom}_C(X,Y)$ y A de $\mathrm{Hom}_K(L^X,L)$; $\mu_X(\phi)=\phi\cdot\varepsilon_{L^X}$ para todo ϕ de $T^2(X)$, siendo ε la counidad de la adjunción. Si se llama $\Pi_x: L^X \longrightarrow L$ la proyección correspondiente, entonces ε queda definida por $\psi = \Pi_\psi \cdot \varepsilon_K$, para todo ψ de $\mathrm{Hom}_K(K,L)$.

Analogamente se denota $\mathbb{C} = (C,\varepsilon,\delta)$ el triple en K inducido por la misma adjunción (cotriple en $K°$). Sean f_1 de $\mathrm{Hom}_C(X,\mathrm{Hom}_K(K,L))$ y f_2 de $\mathrm{Hom}_K(K,L^X)$, los morfismos correspondientes en la biyección natural establecida por la adjunción.

En las condiciones expresadas, se considera una categoría S de objetos con estructura sobre K (|4|), (L,ξ) en S, $f_1: X \longrightarrow T(Y)$ y $f_2: L^Y \longrightarrow L^X$, correspondientes. Entonces, si la familia $\eta_X(x)=\Pi_x: L^X \longrightarrow L$ admite una elevación optimal, y se denota $T_\xi(X)$ el subconjunto de $T(X)$ formado por los admisibles,

$f_1(x)$ está en $T_\xi(X)$ para todo x de X, si y sólo si f_2 es admisible. Como consecuencia, $\underline{T_\xi}$ define una subteoría de $\mathbb{T}$.

Un ejemplo de la situación descrita se obtiene al tomar S como $K^{\mathbb{M}}$ la variedad de $\mathbb{M}$-álgebras sobre K para un triple $\mathbb{M}$. A cada morfismo de teorías de $\mathbb{M}$ a $\mathbb{C}$ le corresponde una subteoría de $\mathbb{T}$. Para probar esta proposición, basta demostrar que las estructuras de $\mathbb{M}$-álgebras en L se corresponden con los morfismos de teorías de $\mathbb{M}$ a $\mathbb{C}$.

Cuando $K = C$ ($\mathbb{T} = \mathbb{C}$), el resultado anterior es consecuencia del teorema (3.2) de (|2|).

El original completo de este trabajo aparecerá publicado en Alxebra 26. Dpto.Algebra y Fund. Santiago.

Bibliografía

|1| Caruncho Castro, J.R. Teoría de Triples. Alxebra 5.(1971) Dpto.Algebra y Fund.Santiago.

|2| Koch, A. On double dualization monads. Math.Scand.27 (1970),151-165.

|3| Linton, F.E.J. Applied functorial semantics, I.Annali di Mat. pura ed appl. LXXXVI (1967) 1-14.

|4| Manes, E. Algebraic Theories. G.T.M. 26 (1976) Springer.