Pub. Mat. UAB
Nº20 Set. 1980
Actes VII JMHL

CONSTRICCION RESPECTO DE HOMOMORFOS

Amparo Cortés Monleón

Dpto. de Algebra
Universidad de Valencia

"Para un homomorfo H, cerrado para subgrupos normales y para productos directos, saturado ó con la Z-propiedad se tienen los resultados siguientes: G H-constricto, implica G (H-separable)-constricto, y si $G_{H'} = 1$, se verifica la equivalencia.
En las condiciones dadas para el homomorfo H, la clase de los grupos H-constrictos, es de Fitting, extensible, no es homomorfo y verifica la condición segunda de formación".

1. Introducción y notación.

La notación utilizada será la standard en teoría de grupos vease [2]. Diremos que un subgrupo M de G es H-maximal, cuando sea maximal como H-subgrupo normal. Designaremos por L(G) el radical semisimple de G. Los conceptos relativos a grupos semisimples pueden verse en [3].

En lo que sigue H será un homomorfo en las condiciones anteriores. Los resultados para H saturado, son válidos en general para H con la Z-propiedad, sin mas que sustituir H' por 1.

(1.1) Proposición

Si H saturado, todo grupo nilpotente es producto directo de un H-grupo y de un H'-grupo. Si H verifica la Z-propiedad, todo grupo nilpotente es H-grupo.

(1.2) Teorema

Sea G un grupo con $G_{H'} = 1$; Sea $L(G)$ su radical semisimple, y designemos por $L_H(G)$ a $L(G)^H$, sea $K = L_H(G)M$, donde M es un subgrupo de G, H-maximal; entonces:
i) $L_H(G)$ es semisimple ; ii) $[L_H(G), M] = 1$; iii) $L_H(G) \cap M = Z(L_H(G))$; iv) $(L_H(G))^{H'} = L_H(G)$; v) $C_G(K) \leq M \leq K$

2. Constricción

(2.1) Definición

Un grupo G es H-constricto si $C_{\bar{G}}(\bar{M}) \leq \bar{M}$, donde $\bar{G} = G/G_{H'}$ y $\bar{M}$ es un subgrupo de $\bar{G}$, H-maximal.

(2.2) Teorema

Si $G_{H'} = 1$, y M es un H-maximal de G ; son equivalentes:
1) G H-constricto ; 2) $L(C_G(M)) = 1$; 3) $L(G)$ es H-grupo.

(2.3) Lema

Sea N, H'-subgrupo normal de G, entonces G es H-constricto si y solo si G/N lo es.

(2.4) Teorema bis

Para un grupo G, son equivalentes:
1) G H-constricto ; 2) $L(C_{\bar{G}}(\bar{M})) = 1$, siendo $\bar{M}$ H-maximal de $\bar{G}$; 3) $L(\bar{G})$ H-grupo.

Observaciones: 1) Como consecuencia del teorema (1.2) y del teorema anterior, la definición de grupo H-constricto es independiente del maximal elegido.
2) Designaremos por C la clase de los grupos H-constrictos. C no es homomorfo, ver [3].
Daremos a continuación algunas propiedades de la clase C.

(2.5) Proposición

Si G es H-constricto y $N \trianglelefteq G$, entonces N es H-constricto.

(2.6) Proposición

La clase C es extensible.

Nota: C verifica la Z - propiedad y es fuertemente saturada.

(2.7) Proposición

La clase C verifica la condición segunda de formación.

Demostración: Sean G/N_1 y G/N_2, H-constrictos, y $N_1 \cap N_2 = 1$. N_1N_2/N_1, es normal en G/N_1, luego N_1N_2/N_1 es H- constricto, y por tanto N_2 lo es. Por (2.6) G es H- constricto.

3. H- separabilidad y H - constricción.

En este apartado se da un teorema de equivalencia entre G H- constricto y G (H - separable) - constricto y como consecuencia probaremos que la clase C es cerrada para producto de subgrupos normales.

(3.1) Definición

G es H- separable si posee una serie normal

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots\ldots \trianglelefteq G_n = G$$

tal que los factores G_{i+1}/G_i, son H- grupos ó H' - grupos.

(3.2) Proposición

La clase de los grupos H - separables es formación de Fitting extensible y contiene a los grupos resolubles.

(3.3) Teorema

Si G H - separable, entonces G H- constricto.

Demostración: Sea $\bar{G} = G/G_{H'}$, $\bar{G}$ es H - separable por tanto $L_H(\bar{G})$ es H - separable. Sabemos que $L_H(\bar{G})$ es semisimple y es producto de las componentes no H - grupos de $L(\bar{G})$, por tanto $(L_H(\bar{G}))^H = L_H(\bar{G})$. Por otra parte $(L_H(\bar{G}))^{H'} = L_H(\bar{G})$ por iv) del teorema (1.2).

Por ser $L_H(\bar{G})$ H - separable su H - serie descendente acaba en 1. Luego $L_H(\bar{G}) = 1$, de donde se seguiría $L(\bar{G})$ es H - grupo. Por tanto se tiene que $\bar{G}$ es H - constricto y por Lema (2.3) G es H - constricto.

(3.4) Teorema

Si G es H - constricto, entonces G es (H - separable) -constricto Si además $G_{H'} = 1$, se verifica la equivalencia.

Demostración: Si G H - constricto, $L(G/G_{H'})$ H - grupo, luego $L(G/G_{H'})$ H - separable y $G/G_{H'}$ (H - separable) - constricto, y por (3.2) G (H- separable) - constricto.
Si $G_{H'} = 1$ y G (H - separable) - constricto, L(G) es H - separable, por (3.3) será H - constricto, luego $L(L(G)) = L(G)$ es H - grupo y por tanto G, H - constricto.

Observación: Al ser la clase de los H - separables formación de Fitting saturada el producto de dos normales (H - separables) - constrictos es (H - separable) - constricto.

(3.5) Lema

Sean $M,N \trianglelefteq G$, ambos H - constrictos y $(MN)_{H'} = 1$, entonces MN es H - constricto.

(3.6) Teorema

Sean $M,N \trianglelefteq G$, ambos H - constrictos, entonces MN lo es.

Demostración: Sean $\bar{M}$ y $\bar{N}$, definidos por $\bar{M} = M(MN)_{H'}/(MN)_{H'}$, $\bar{N} = N(MN)_{H'}/(MN)_{H'}$; Por ser $\bar{M} \cong M/M \cap (MN)_{H'} = M/M_{H'}$, será H - constricto, lo mismo $\bar{N}$. Además $(\bar{M}\bar{N})_{H'} = 1$; luego por (3.5) $\bar{M}\bar{N}$, es H - constricto y por (2.3) MN es H - constricto.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Cortés Monleón A.: Constricción en formaciones con la Z-propiedad. Actas VI Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas. Santander. (1979).

[2] Huppert B.: Endliche Gruppen I. Springer-Verlag. Berlin. (1967).

[3] Pérez Monasor F.: Grupos finitos separados respecto de una formación de Fitting. Sem. García Galdeano. Zaragoza. (1973).