Pub. Mat. UAB
Nº 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

ALGEBRAS DE KLEISLI

J.M. Barja Pérez, E. G-Rodeja F.

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad de Santiago de Compostela

Abstract A pair of monoid structures $A=(E,\cdot,a)$, $B=(E,*,b)$ are to be called a Kleisli algebra if the law of the triple product $(h*g)\cdot f = h*(g\cdot f)$ is verified. The E. Manes open question on the non-trivial Kleisli algebra existence is answered by studying the Kleisli algebra generated for the empty set.

Comunicación:

Un algebra de Kleisli E es un conjunto con dos estructuras de monoide, $A=(E,\cdot,a)$ y $B=(E,*,b)$, que cumplen la ley del triple producto: $(h*g)\cdot f = h*(g\cdot f)$.

Considerando a A y B como categorías de un solo objeto, una definición equivalente de álgebra de Kleisli es un par de funtores adjuntos, $F \dashv G$, entre las categorías A y B ,

$$F : A \longrightarrow B \quad , G : B \longrightarrow A \quad .$$

Asimismo la definición de un álgebra de Kleisli puede ser dada utilizando las propiedades que corresponden a las nociones de triple, cotriple o por uno de los funtores del par adjunto.

Cuando el par adjunto es una equivalencia de categorías, el álgebra de Kleisli se llama trivial . Toda álgebra de Kleisli trivial es un monoide $A=(E,\cdot,a)$ y un elemento b que posee inverso ρ, donde $B=(E,*,b)$ está definido por $g*f = g\cdot\rho\cdot f$.

La existencia de álgebras de Kleisli no triviales es considerada, por E. Manes (|6|,p.136), como una cuestión abierta. Se obtienen ejemplos de álgebras de Kleisli no triviales:

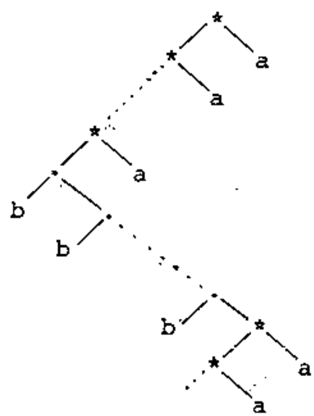
Sean X un conjunto, $P \in X$, $E = End(X,P)$ el conjunto de los endomorfismos de X con punto fijo P y $\sigma:X \longrightarrow X$ una aplicación mónica tal que $\sigma X = X - \{P\}$. Si $B=(E,*,b)$ es la estructura de monoide natural de End(X,P), y $A=(E,\cdot,a)$

$$g\cdot f(P) = P \;,\quad Q\neq P \quad g\cdot f(Q) = (g\,\sigma\, f)(Q)$$
$$a(P) = P \;,\quad Q\neq P \quad a(Q) = \sigma^{-1}(Q) \qquad ,$$

$E(A,B)$ es un álgebra de Kleisli no trivial.

En particular, para $X=\mathbb{N}$ (conjunto de los números naturales), $P = 0$ y $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\sigma(n) = n+1$, se obtiene un álgebra de Kleisli no trivial, $E_{\mathbb{N}}$.

También el álgebra de Kleisli generada por el conjunto vacio $E(\emptyset)$ (en el sentido de la teoría de álgebras universales) es un álgebra de Kleisli no trivial. Cada elemento de este álgebra, puede ser representado por una palabra canónica de la forma



a la que corresponde, como elemento de $E_{\mathbb{N}}$, una aplicación $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(0) = 0$, monotona no decreciente y $f(n+1) = f(n)+1$ para "casi todo" n.

Existe un conjunto de generadores de $E(\emptyset)$ que verifican relaciones análogas a los morfismos cara y degeneraciones de la categoría Δ de objetos simpliciales, y que pueden ser interpretados como generadores de las "operaciones" de un triple o un cotriple.

Si E^* es un álgebra de Kleisli cociente propio de $E(\emptyset)$, el morfismo canónico $\Phi^*\colon E(\emptyset) \longrightarrow E^*$, se factoriza a traves del álgebra de Kleisli trivial sobre el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, $n\cdot m = n+m-1$, $n * m = n+m$.

$$\begin{tikzcd} E(\emptyset) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\Phi^*"'] & & \mathbb{Z} \arrow[dl] \\ & E^* & \end{tikzcd}$$

Por tanto, E^* es trivial e isomorfo a $\mathbb{Z}_n$.

Como toda álgebra de Kleisli no trivial contiene a $E(\emptyset)$, éste es , fundamentalmente, la única respuesta a la pregunta de E. Manes.

El original completo de este trabajo aparecerá publicado en Alxebra 26. Dept. Algebra y Fund. Santiago.

Bibliografia

1 Barr, M. ; Beck, J. Homology and standard constructions. Lect. Notes in Math. 80 (1969), 245-336.

2 Caruncho Castro, J.R. Teoría de triples. Alxebra 5 (1971) Dept. Algebra y Fund. Santiago.

3 Gabriel, P. ; Zisman, M. Calculus of fractions and homotopy theory (1967) Springer.

4 Fernandez Rodriguez, R. Una caracterización de pares adjuntos de Kleisli. VI Jornadas Hispano- Lusitanas. Santander (1979).

5 Mac Lane, S. Categories for the working mathematician. G.T.M. 5 (1971) Springer.

6 Manes, E.G. Algebraic theories (1976) Springer.