Pub. Mat. UAB
Nº 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

NOTA SOBRE EL SIGNIFICADO LOGICO DE CIERTAS ESTRUCTURAS RESIDUADAS ELEMENTALES

J.M. Font Llovet, A.J. Rodríguez Salas

Dpto. de Estadística Matemática
Universidad de Barcelona

Abstract:

Starting from an abelian grupoid which is ordered and residuated we study the logical significance of the "residue" operation, specially if we add the most natural algebraic properties to the base structure, obtaining then several well-Known structures of mathematical logic, such as the deductively-complete algebras and the algebras of Sales,Hilbert,Abbott,Wajsberg and Boole.We also give some properties of the deductive systems and obtain an special version of the deduction theorem of Pla([3]).

Las álgebras de Heyting, modelo del cálculo proposicional intuicionista, son el ejemplo más conocido de estructura residuada que posee un significado lógico.La residuación como operación algebraica fue introducida por la escuela de Ward ([1] , [6]) en los años 30 y actualmente existe una extensa literatura sobre residuación en retículos. Últimamente se ha llegado a estudiar los semiretículos residuados ([2]), siempre tomando como referencia diversos fragmentos del cálculo proposicional. Esta nota debe considerarse como un intento de desvelar las conexiones existentes entre las propiedades lógicas de la operación"residuo" (que nos sugieren interpretarla como implicación) y las algebraicas de la estructura de partida, a la que dotameos en principio del mínimo indispensable.

Sea $(A,.,\leq)$ un <u>grupoide</u> (. es una operación interna en

A cuyo símbolo omitiremos si no hay lugar a confusión) abeliano, ordenado ($\leq$ es un orden an A tal que si $a \leq b$ entonces $ac \leq bc$) y residuado (para cada $(a,b) \in A \times A$, existe $a \to b = \text{máx}\{x \in A: ax \leq b\}$). La nueva operación recibe el nombre de residuo. A continuación daremos algunas propiedades inmediatas con significado lógico. Por a,b,c,... entendemos elementos arbitrarios de A.

Proposición 1 :

(1) $c \leq a \to b$ sii $ac \leq b$

(2) $a \leq b$ implica $c \to a \leq c \to b$ (*isotonía por la izquierda*)

(3) $a \leq b$ implica $b \to c \leq a \to c$ (*antiisotonía por la derecha*)

(4) $a \leq b \to c$ implica $b \leq a \to c$ (*conmutación de premisas débil*)

(5) $a{\cdot}b = \text{mín}\{y \in A: b \leq a \to y\}$ (*. es el residuo dual de*)

Proposición 2 :

Las siguientes propiedades son equivalentes:

(1) La operación $\circ$ es asociativa

(2) $ab \to c = a \to (b \to c)$ (*Ley de importación-exportación*)

(3) $a.(b \to c) \leq b \to ac$

(4) $a \to (b \to c) \leq b \to (a \to c)$ (*Conmutación de premisas*)

(5) $b \to c \leq (a \to b) \to (a \to c)$

(6) $b \to c \leq (c \to a) \to (b \to a)$ (*Leyes del Silogismo*)

Recordemos que un elemento $u \in A$ es ordenador cuando $a \leq b$ equivale a $u \leq a \to b$.

Proposición 3 :

u es ordenador sii u es neutro para . .

Proposición 4 :

Si existe un elemento neutro u, entonces son equivalentes:

(1) u es máximo para el orden $\leq$.

(2) La operación . es casi-íntegra (es decir, $ab \leq b$)

(3) $a \to (b \to a) = u$ (*Ley de Absorción*)

En los supuestos de la proposición 4, se satisfacen las *Leyes de Identidad* ($a \to a = u$) y de la *Conjunción* ($a \to (b \to ab) = u$). Además un elemento $0 \in A$ es mínimo para $\leqslant$ si y sólo si es absorbente para . .

Nos encontramos ahora en condiciones de obtener una de las estructuras más elementales ligadas a la parte implicativa del cálculo proposicional(véase [4]).

Proposición 5 :

Si $(A, ., \leqslant, u)$ es un monoide abeliano ordenado y residuado cuyo neutro es máximo para el orden, entonces $(A, \to, u)$ es una álgebra deductivamente completa .

En lo sucesivo supondremos que nos encontramos en las condiciones de la proposición 5. Recordemos que los sistemas deductivos de $(A, \to, u)$ son $X \subseteq A$ tales que $u \in X$ y $a \to b \in X$, $a \in X$ imlican $b \in X$. Entonces,

Proposición 6 :

Los sistemas deductivos coinciden con los submonoides que son filtros de orden.

Designamos por D al operador consecuencia sobre $\wp(A)$ asociado al sistema clausura de los sistemas deductivos de $(A, \quad, u)$

Los resultados que siguen asimilan funcionalmente la operación . a la conjunción lógica, dado el carácter implicativo de la $\to$:

Proposición 7 :

(1) Si $H \subseteq A$, $D(H)$ es el filtro de orden engendrado por el submonoide engendrado por H.

(2) $D(a,b) = D(a.b)$

(3) $a \in D(H,b)$ sii existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^n \to a \in D(H)$.

Obsérvese que la expresión $b^n \to a$ que significa $(b \cdot \overset{(n}{\ldots} \cdot b) \to a$, equivale aquí a la expresión original de Pla([3])

$b \to (b \to \ldots^{(n}(b \to a) \ldots)$.

Si añadimos propiedades al monoide abeliano obtendremos otras álgebras usadas en lógica:

Proposición 8 :

Son equivalentes:

(1) $a^2 = a$

(2) $a \to (b \to c) = (a \to b) \to (a \to c)$ (*Ley autodistributiva*)

(3) $a \to (a \to b) = a \to b$ (*Eliminación de premisas repetidas*)

Proposición 9 :

Si se dan las condiciones de la proposición 8,$(A, \to, u)$ es un semiretículo([2]) y un álgebra de Hilbert en la que $a.b = \inf \{a,b\}$.

En otra línea distinta encontraremos también estructuras conocidas:

Proposición 10 :

Si se cumple $(a \to b) \to b = (b \to a) \to a$, entonces$(A, \to, u)$ es una álgebra de Sales. Si además existe un elemento 0 mínimo para $\leq$, entonces $(A, \to, u, o)$ es álgebra de Wajsberg ([5]).

En[5]se demuestra el recíproco para la última parte; es decir que toda álgebra de Wajsberg se obtiene como estructura residuada como hemos descrito.

Finalmente las líneas de las proposiciones 9 y 10 se conjugan para dar como resultado el álgebra más clásica de la lógica matemática :

Proposición 11 :

Sea $(A, ., \leq, u, 0)$ un monoide abeliano ordenado y residuado en el que el neutro u es máximo, existe mínimo 0, la operación es idempotente, y el residuo $\to$ cumple la Ley de Sales $(a \to b) \to b = (b \to a) \to a$. Entonces $(A, \to, u, 0)$ es un álgebra de Boole.

Referencies:

[1] DILWORTH-WARD.:"Residuated Lattices"Bull.A.M.S(1939)pp335-354.

[2] NEMITZ "Implicative semilattices" Trans A.M.S.(1965)pp128-142

[3] PLA,"Contribució a léstudi de les estructures algebraiques dels sistemes lògics deductius" Tesi Doctoral 1975.

[4] TORRENS."Estudi i algebraització de certes lógiques:àlgebres d-completes".Tesi Doctoral 1980.

[5] RODRIGUEZ SALAS."Sobre àlgebras de Wajsberg" Tesi doctoral 1980.

[6] WARD."Structure residuation"Annals of Math. (1938)pp558-568 .