Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE FUNCIONS DE NEGACIÓ FEBLE PER LA TEORIA DE CONJUNTS DIFUSOS.

Francesc Esteva, Xavier Domingo

Dpt. de Matemàtiques i Estadística, E.T.S.A.B.
Universitat Politècnica de Barcelona

1: Introducció

El punt de partida del present treball és doble:

-Per un costat es parteix del concepte de funció de negació sobre un conjunt ordenat $(C,\leq)$ (Sales,[6]) com una aplicació $\tau: C \to C$ decreixent i tal que per tot $x \in C$ és $x \leq \tau^2(x)$, estudiades pel mateix Sales i Pla ([3]), i del tractament de les funcions de negació en reticles complets i el teorema d'extensió (Esteva, [2]).

-Per altre part, en la teoria dels conjunts difusos ([8]) es defineixen les negacions com aplicacions decreixents $n:[0,1] \to [0,1]$ tals que $n(0)=1$, $n(1)=0$; aquestes negacions s'anomenen ordinàries, febles o fortes segons satisfacin $x \geq \tau^2(x)$, $x \leq \tau^2(x)$ ó $x=\tau^2(x)$ respectivament. E. Trillas([5]) ha caracteritzat les negacions fortes amb punt de simetria sobre un conjunt J tal que $\{0,1\} \subset J \subset [0,1]$ i $1-J=J$ mitjançant generadors additius. En particular, han quedat caracteritzades per aquesta via funcional totes les funcions de negació forta en $[0,1]$.

A partir d'aquests resultats estudiem les negacions febles en $[0,1]$, donant una descomposició factorial i la caracterització mitjançant generadors additius en alguns cassos concrets.

2: Estudi de les negacions febles de $[0,1]$.

2.1. Com a funcions de $[0,1]$ en $[0,1]$ les negacions febles són funcions n monòtones decreixents amb $n(0)=1$ i $n(1)=0$ que compleixen:

<u>Proposició 2.1.1</u>. Si $n:[0,1]\to[0,1]$ és una negació feble, aleshores:

(i) n és continua per l'esquerra en tot $x\in[0,1]$,

(ii) n és continua per la dreta en tot $x\notin n([0,1])$,

(iii) n verifica les lleis de De Morgan infinites si i només si es forta.

Això ens diu que el conjunt D_n dels punts de discontinuitat de n (conjunt de cardinal inferior o igual al numerable) és un subconjunt de $n([0,1])$. El fet d'ésser $n([0,1])$ inf-semirreticle complet que conté 0 i 1 porta a que no tot subconjunt numerable de $[0,1]$ pugui ésser el subconjunt D_n per a una certa n. Per exemple, no hi ha cap negació feble n per la qual $D_n = Q\cap[0,1]$.

Per altre part, tot i no essent cert en general que el límit d'una successió de negacions febles (cas de que existeixi) sigui una negació feble, es verifica:

<u>Proposició 2.1.2.</u> Tota negació forta o feble amb un nombre finit de punts de discotinuitat és límit uniforme d'una successió de negacions febles esgraonades amb un nombre finit de punts de discontinuitat.

2.2. En segon lloc estudiem la "simetria" de les negacions febles.

<u>Proposició 2.2.1</u>. Si $n:[0,1]\to[0,1]$ és una negació feble,

(i) Si n és discontinua en x_o, aleshores n és constant en $(n(x_o^+),\ n(x_o^-))$.

(ii) Si $(a,b)\neq\emptyset$ és un interval obert maximal en el que n és constant, aleshores n té una discontinuitat en $n(b)$ i és $n(n(b)^+)=a$ i $n(n(b)^-)=b$.

Això ens diu que tota negació feble conserva, en cert sentit, la simetria que tenen les negacions fortes respecte

$y=x$; només cal identificar el simètric d'un salt amb un troç de funció constant, i recíprocament.

Aquesta constatació ens porta a definir el que entendrem per funció "simètrica" respecte $y=x$ i a veure que una condició necessària i suficient perquè $f:[0,1] \to [0,1]$ sigui una negació feble és que sigui decreixent i "simètrica" respecte $y=x$.

Donada una negació n i considerats els conjunts d'elements positius $P_n (x < n(x))$, negatius $N_n (x > n(x))$ i fixos $F_n (x = n(x))$ (vid. [2]), vist que N_n i P_n són subintervals disjunts amb un punt de separació s, hi ha dues possibilitats:

(1) $F_n = \{s\}$, i aleshores $N_n = [0,s)$ i $P_n = (s,1]$,

(2) $F_n = \emptyset$, i aleshores $N_n = [0,s]$ i $P_n = (s,1]$.

El <u>nivell de simetria</u> d'una negació n ([4] i [5]) es defineix com $s_n = \bigvee_{a\in[0,1]} (a \wedge n(a)) = \bigwedge_{a\in[0,1]} (a \vee n(a))$.

En el cas (1) és evident que el nivell de simetria de n és el punt s, però en el (2) tenim que $\bigvee_{a\in[0,1]} (a \wedge n(a)) = s$, i

$\bigwedge_{a\in[0,1]} (a \vee n(a)) = n(a)$, i per tant sembla lògic prendre com a nivell de simetria l'interval $(s,n(s))$. En aquest cas parlarem, doncs, de <u>l'interval de simetria</u> de la negació n.

3: Descomposició factorial de les negacions febles.

Sigui n una negació feble amb un nombre finit de punts de discontinuitat; N defineix una descomposició de $[0,1]$ en subintervals I_i d'extrems superiors b_i en els que n és constant o contínua i estrictament decreixent. Sigui $K = \{i; n_{|I_i}$ és constant$\}$, i $K' = \{(i,j); n(I_i) = I_j\}$. Aleshores:

<u>Proposició 3.1</u>. Si n és una negació feble en $[0,1]$ amb un nombre finit de punts de discontinuitat, existeixen negacions fortes n_i de $[0,1]$ tals que:

$$n = \sum_{(i,j)\in K'} n_i \, 1_{I_i \Delta I_j} + \sum_{i\in K} n(b_i) 1_{I_i}.$$

(on 1_C representa la funció característica de C i Δ la diferència simètrica)

Recíprocament:

Proposició 3.2. Sigui $I_1 = [0,a_1]$, $I_i = (a_{i-1},a_i]$ $i = 2,\dots,k$ una partició de $[0,a_k]$. Tota familia de funcions $f_i:[0,1] \to [0,1]$ $i = 1\dots k$ tals que cada f_i és o una constant o una negació forta, $f_i(a_i) \geq f_{i+1}(a_i)$ per $i = 1\dots k$, i $f_k(a_k) \geq a_k$, defineix una única negació n de $[0,1]$ tal que $n|_{I_i} = f_i|_{I_i}$ i $N_n = [0,a_k]$, donada per:

$$n = \sum_{i\in K} a_i \, 1_{I_i} + \sum_{i\notin K} f_i \, 1_{I_i\Delta(f_i(a_{i-1}),f_i(a_i)} + a_k \, 1_{(a_k,f_k(a_k))}.$$

4: Generadors additius per a negacions febles.

A partir dels resultats de Esteva ([2]) i Trillas ([5]) obtenim generadors additius per a les negacions febles de $[0,1]$ amb imatge simètrica respecte del punt 1/2. Concretament:

Proposició 4.1. Si n és una negació feble en $[0,1]$ amb imatge simètrica respecte del punt 1/2 i interval de simetria $(s,n(s))$, existeixen funcions creixents i bijectives $f:n([0,1])\cup(s,n(s)) \to n([0,1])\cup(s,n(s))$ tals que:

$$(\&) \quad n(x) = \begin{cases} f^{-1}(f(1)-f(\wedge\{y \in n([0,1]);\ y \geq x\})) & \text{si } x\in[0,1]-(s,n(s)) \\ s & \text{si } x\in(s,n(s)). \end{cases}$$

Recíprocament:

Proposició 4.2. Si $\{0,1\}\subset J\subset[0,1]$ i $J = 1-J$, tota funció $f:J \to J$ creixent i bijectiva defineix (per (&)) una única negació feble $n:[0,1]\to[0,1]$ amb interval de simetria (s,t) (on $s = \sup\{x\in J;\ f(x) \geq x\}$ i $t = \inf\{x\in J;\ f(x) \leq x\}$) i $n([0,1]) = J$.

REFERÈNCIES

1. BODIOU,G. "Théorie dialectique des probabilités", Gauthier Villars, Paris (1964)
2. ESTEVA,F. "Contribución al estudio de la estructura del conjunto de negaciones definidas en un retículo", Stochastica, Vol.1 nº 1(1975), 49-66.
3. PLA,J. "Sobre negaciones en retículos", Actas II Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas, Madrid 1973.
4. PREPARATA,F.P.-YEH,R.T. "Continuously Valued Logic", Journ. of Comp. and Syst. Sci., 6 (1972), 397-418.
5. TRILLAS,E. "Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos", Stochastica, Vol.III,nº 1 (1979), 47-59.
6. SALES,F. de A. "Aplicaciones de Galois en conjuntos ordenados y en retículos", Collect. Mathem. Vol.XXI, 1 (1970) 19-39.
7. SALES,F. de A. "Algebras de Hilbert", Curso monográfico de doctorado, Univ. de Barcelona, 1973.
8. ZADEH,L. "Fuzzy sets", Inf. and Control, 8 (1965), 338-353.