Pub. Mat. UAB
Nº 19 Maig 1980
Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales y
Aplicaciones -Valldoreix, Mayo 1979.

UN MODELO QUE GENERALIZA A LA ECUACION DE BURGERS

por José María Fraile Peláez.

1. Introducción.

Cierto tipo de movimientos en un gas maxwelliano, vienen regidos por la siguiente ecuación

$$(1)\quad \begin{cases} p_t - \frac{1}{2} p_{xx} + p\, p_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega \\ p(\partial\Omega, t) = 0, \quad \text{siendo } \partial\Omega \text{ la frontera de } \Omega \\ p(x,0) = p_0(x) \;, \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

conocida bajo el nombre de ecuación de Burgers; ciertamente, (1) puede considerarse como un caso particular de

$$(2)\quad \begin{cases} p_t - (\beta(p))_{xx} + (\phi(p))_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega \\ p(\partial\Omega, t) = 0 \\ p(x,0) = p_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

ecuación asociada a un proceso que presenta un término de difusión no lineal, y donde el término asociado a la presión es lo suficientemente general como para que valga casi cualquier coas. Sobre (2) existe ya abundante literatura (cf. [1], [4] p.e.)

pero nuestro propósito no es sino el de proponer una generalización de (1) algo más razonable que (2), para lo que nos basaremos en criterios estrictramente matemáticos. En todo caso, observemos que las funciones β, ϕ que corresponderán a una formulación (2) de (1) son, precisamente,

$$\beta(r) = r, \quad \phi(r) = r^2,$$

salvo constantes multiplicativas que en nada afectarán a nuestro razonamiento. Y nuestra conjetura es que debe de haber alguna razón para que en (1) aparezcan precisamente el par de funciones $\beta(\cdot)$, $\phi(\cdot)$ arriba indicado, y no otro. Por lo tanto, interesa buscar una relación entre ϕ y β para poder habler de ecuación que generaliza a la de Burgers.

2. Modelo para la Ecuación (1).

J. Cole observa (cf. [5]) que, si $p(x,t)$ es una solución de la ecuación (1), la función

$$\begin{cases} v(x,t) = \exp(-\int_a^x p(y,t)dy) \\ x \in (a,b) = \Omega \end{cases}$$

es solución de la ecuación lineal

$$(3) \qquad \begin{cases} v_t = v_{xx} \\ v(x,0) = \exp(-\int_a^x p(y)dy) > 0 \\ v(a,t) = 1, \quad v(b,t) \geq 0; \end{cases}$$

además, $v(x,t) \geq 0$ y, teniendo en cuenta que

$$v_x(x,t) + p(x,t)\, v(x,t) = 0$$

así como las condiciones de contorno para $p(x,t)$, se sigue que $v_x(a,t) = v_x(b,t) = 0$.

El criterio que vamos a adoptar para reconocer las buenas elecciones de ϕ, β, está basado en el cambio que liga a las funciones $p(x,t)$ y $v(x,t)$; o, aûn, en que la ecuación transformado de la generalización de (1) conduzca a una ecuación -posiblemente no lineal- que sea una generalización de (3).

Esquemáticamente, el proceso es como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} p(x,t) \ \text{ solución} \\ \text{de } \ (2) \end{array}\right\} \xrightarrow{v(x,t) = \exp(\theta\int_a^x p(y,t)dy)}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} v_t - \beta'(p) \ \ \{p_x - \dfrac{\phi(p)}{\beta'(p)}\} \ . \exp\left(- \int_a^x \ p(y,t)dy\right) = 0 \\ v(x,o) \geq o \quad \text{dado} \\ v_x(\partial\Omega\,;\,t) = o \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\phi(p) = p^2 . \beta'(p)} \begin{cases} v_x - \beta'(p) \ v_{xx} = o \\ v(x,o) \geq o \qquad \text{dado} \\ v_x(\partial\Omega\,,\,t) = o \end{cases}$$

Si tenemos en cuenta que -allí donde tenga sentido-

$$p(x,t) = - v_x / v$$

se llega a

$$\begin{cases} v_t - \beta'\left(- \dfrac{v_x}{v}\right) v_{xx} = o \\ v(x,o) \geq o \quad \text{dado} \\ v_x(\partial\Omega\,,\,t) = o \end{cases}$$

En realidad, tanto el dato inicial como la solución $v(x,t)$ deberían de ser estrictamente positivos de acuerdo con el cambio realizado; por otra parte, en (1), $\beta(r) = r$ es multiplicativa y, en la última ecuación si imponemos que $\beta'(r)$ sea multiplicativa (lo que revierte, por la forma de la ecuación, en que lo sea β), entonces ésta se transforma en

$$\begin{cases} |\beta(v)|_t + |\beta(-v_x)|_x = o \\ v(x,o) \geq o \qquad \text{dado} \\ v_x(\partial\Omega\,,\,t) = o \end{cases}$$

Ahora bien, $\beta(r) = r$ es, respecto de la ecuación (1), una función impar, de manera que vamos a imponer que nuestra $\beta'(r)$ genérica también lo sea; en tal caso, se obtiene

$$\begin{cases} |\beta(v)|_t - |\beta(v_x)|_x = o \\ v(x,o) \geq o \qquad \text{dado} \\ v_x(\partial\Omega\,,\,t) = o \end{cases}$$

Supongamos ahora que

$$\beta(r) = o \Longrightarrow r = o$$

Entonces, la condición de contorno puede escribirse como $\beta(v_x(\partial\Omega\,,\,t)) = o$ y, si hacemos el cambio $\beta(v(x,t)) = z(x,t)$, se obtiene una nueva ecuación

$$(4) \quad \begin{cases} z_t - |\beta([\beta^{-1}(z)]_x)|_x = o \\ z(x,o) = \beta(v(x,o)) \qquad \text{dado} \\ z_x(\partial\Omega\,,\,t) = o \end{cases}$$

donde la última identidad ha necesitado que se suponga que $\beta'(r)$ envíe conjuntos acotados en conjuntos acotados, así como que $v_x(\partial\Omega, t) = o$. Nótese que, si β es monótono no decreciente, la condición inicial para este último problema resulta ser no negativa.

Finalmente, (4) parece ser una buena generalización de (3), lo que nos mueve a definir como "clase de Burgers" a las ecuaciones del tipo

$$(5)\quad \begin{cases} p_t - |\beta(p)|_{xx} + p^2|\beta'(p)|_x = o \\ p(\partial\Omega, t) = o \\ p(x,o) = p_o(x) \qquad \text{dado} \end{cases}$$

observando que, si β es tal y como se ha ido necesitando en el razonamiento, una ecuación cierta forma equivalente será la (4), en en tanto que si β no es multiplicativa (pero sí todo lo demás), sólo podemos comparar (5) con

$$(6)\quad \begin{cases} v_t - \beta'(-\dfrac{v_x}{v})\, v_{xx} = o \\ v(x,o) \geq o \qquad \text{dado} \\ \beta(v_x(\partial\Omega, t)) = o \end{cases}$$

§3. La ecuación (4).

Sea $\Omega = (o,1)$, p.e. y consideremos el operador A definido por su grafo como

$$A = \{|u,v| \in L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) \ / \ u \in W^{1,1}(\Omega), \ \exists\, w \in W_o^{1,1}(\Omega)$$
$$\text{con} \quad w \in \beta(u_x) \quad \text{en c.t.}\ \Omega \ , \ \text{tal que} \ -w_x = v\}$$

y sea $A\beta^{-1}$ el operador definido por su grafo como

$$A\beta^{-1} = \{|u,v| \in L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) \;/\; A^{-1}(v) \cap \beta^{-1}(u) \neq \Phi\} \;,$$

donde debe entenderse que β^{-1} es un nuevo operador

$$\beta^{-1} = \{|u,w| \in L^1(\Omega) \times L^1(\Omega) \;/\; w(x) \in \gamma(u(x)) \text{ en c.t. } x \in \Omega\} \;, \text{ con } \gamma(r) = \beta^{-1}(r)$$

Puede demostrarse el siguiente resultado, sin mas que combinar adecuadamente los elementos de ([1], [4], [2]):

"sea $j(r)$ convexa, semicontinua inferiormente, $j(0) = 0$; $\frac{j(r)}{|r|} \to \infty$ si $|r| \to \infty$; sea $\beta = \partial j$, con

$$\begin{cases} \beta(r) = 0 \Longrightarrow r = 0 \;; \quad R(\beta) = \mathbb{R} \\ \beta^{-1} \text{ es inyectiva,} \end{cases}$$

Entonces el operador $A\beta^{-1}$ es m-acretivo en $L^1(\Omega)$".

Este resultado permite aplicar el teorema de generación de semigrupos de Crandall-Liggett al operador $A\beta^{-1}$, obteniendo así que la ecuación

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} + A\beta^{-1}z = 0 \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

admite, para cada $x_0 \in \overline{D(A\beta^{-1})}^{L^1(\Omega)}$, una única solución fuerte $z \in C([0,\infty); \overline{D(A\beta^{-1})}^{L^1(\Omega)})$; que la aplicación

$$S(t) : z_0 \in \overline{D(A\beta^{-1})}^{L^1(\Omega)} \to S(t)z_0 = z(t)$$

es un c_0-semigrupo de contracciones sobre $\overline{D(A\beta^{-1})}^{L^1(\Omega)}$, así como que, si $z_0 \in D(A\beta^{-1})$, la fórmula no lineal de Hille es válida:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \left(I + \frac{t}{n} A\beta^{-1}\right)^{-n} z_0 = z(t) \\ \text{uniformemente en } t \text{ acotados} \end{cases}$$

Para otras propiedades, véase [3].

Nótese que la ecuación (7) es la formulación abstracta de (4) en $L^1(\Omega)$.

Existe, sin embargo, una mancha en este resultado: el semigrupo $S(t)$ que determina (7) no tiene por qué poseer un generador infinitesimal, ni siquiera débil; y, por lo tanto, la relación existente entre $A\beta^{-1}$ y $\{S(t)\}_{t>0}$ es unilateral; ello se debe a que el operador $A\beta^{-1}$ no satisface, en general, un principio de comparación (para esta observación, cf. [1], [4], p.e.); por otra parte, la no existencia de un principio general de comparación restringe mucho las posibilidades de estudiar otras propiedades de las soluciones, como la de extinción en tiempo finito. Sin embargo, y adoptando técnicas parecidas a las desarrolladas por J.I. Díaz, puede demostrarse que, si $\beta(r) = r^{\alpha}$, $\alpha > 1$, no hay extinción de soluciones en tiempo finito; de hecho, este mismo autor anuncia un resultado general en su contribución a este Congreso (cf. [6] , teor.), aunque probablemente, su demostración esté basada, entre otros hechos, en que las potencias gozan de la propiedad multiplicativa, lo que permite construir subsoluciones de variables separadas.

Finalmente, cabe anunciar que sobre esta y otras cuestiones con ella relacionadas trataremos en un trabajo, actualmente en preparación, en el que intentaremos ofrecer respuestas parciales.

BIBLIOGRAFIA.

[1] BENILAN, Ph., These, Orsay 1972.

[2] BENILAN, Ph., "Principe du maximum et perturbation d'operateurs accretifs dans $L^1(\Omega)$".

[3] CRANDALL, M.G. - LIGGETT, T., "Generation of semigroups of non-linear transformations in general Banach spaces" Amer. J. Math. 93(1972), 265-298.

[4] LE, C.H., "These de 3eme cycle". Universite Pierre et Marie Curie

[5] COLE, J., "On a quasilinear parabolic equation occurring in aero dynamics", Quarterly of Appl. Math. IX (1951).

[6] DIAZ, J.I., "Resultados y metodos sobre la propiedad de extincion en tiempo finito para ecuaciones de evolucion", en estas mismas actas.

José María Fraile Peláez
Dpto. de Ecuaciones Funcionales
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense.