Pub. Mat. UAB
Nº 19 Maig 1980
Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales y
Aplicaciones -Valldoreix, Mayo 1979.

"Controlabilidad no lineal: Una condición suficiente"

José M. Amillo *
Alfredo Somolinos **

Resumen: Después de un breve repaso a los resultados principales sobre controlabilidad de sistemas no lineales se obtiene una nueva condición suficiente para que una amplia clase de estos sea controlable. Se hace aplicación a un sistema físico.

Abstract: After a brief survey of the main results on controllability of non linear systems, a new sufficient condition is worked out for a large class of non linear systems to be controllable. An application is made to a physical system.

* Profesor Adjunto de Matemáticas en la E.T.S. de Ingenieros de Telecomunicación de Madrid.
** Profesor Adjunto. Departamento Ecuaciones Funcionales. Universidad Complutense de Madrid.

1.- Introducción.-

En este artículo nos vamos a ocupar de la controlabilidad de sistemas no lineales del tipo :

$$S : x = f(x,u) \qquad (1)$$

donde; $x \in M$, siendo M una variedad diferenciable conexa de $\mathcal{C}^{\infty}$; $u \in U$, siendo U un subconjunto de $\mathbb{R}^{r}$, $0 \in U$ y f una función $\mathcal{C}^{\infty}$.

Dicha cuestión fue tratada por Kalman, para sistemas lineales, a principio de los sesenta. Diversos autores, Hermann (6), Haynes-Hermes (5), Lobry (7), - Brookett (2), etc., basados en el trabajo de Chow (3) han desarrollado, en esta última década, una teoría - análoga para sistemas no lineales en términos del álgebra de Lie de campos de vectores sobre M generada por la familia $\mathcal{F}_0$ de campos de vectores $f(\cdot\ ,u)$ correspondientes a los valores constantes de $u \in U$, que se llama familia de campos de vectores asociada a S.

Dicha teoría es fundamentalmente una teoría local que en algunos casos proporciona resultados globales. Los principales resultados de la misma son expuestos en 2.- combinando en una nueva forma los trabajos (2), (6), y (7). Introducimos ahi la definición de sistema simétrico para los que proporcionamos resultados de controlabilidad global. Un caso particular de ellos es presentado.

En 3.- desarrollamos una nueva condición suficiente para que una amplia clase de sistemas no lineales sea simétrica obteniéndose para ellos los resultados de controlabilidad local y global correspondientes. En 4.- hacemos una aplicación de los resultados obtenidos en 3.- para estudiar la región de controlabilidad de un importante sistema físico.

Generalmente supondremos M y f C^∞ y a veces analíticas. Los sistemas no autónomos se pueden considerar autónomos suponiendo que t es una nueva variable de estado. Tambien supondremos que el sistema (1) es completo es decir que para cada control medible acotado u(t) y cada $x^o \in M$ existe una solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x(t),u(t))$ satisfaciendo $x(t_o) = x^o$ y $x(t) \in M$ para cada $t \in R$.

2.- Resultados principales sobre controlabilidad no lineal.-

2.1.- Definición : Sean $x^o, x^1 \in M$. Se dice que x^1 es accesible desde x^o, y escribiremos $x^1 A x^o$, si y solo si existe un control medible y acotado u(t) sobre $[t_o,t_1]$ tal que la solución correspondiente $x(t,x^o,u(t))$ de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x,u)$ satisface $x(t_o) = x^o$ y $x(t_1) = x^1$. El conjunto de puntos de M accesibles desde x^o lo representaremos por $A(x^o)$. El sistema S se dice que es controlable si y solo si $A(x) = M$ para cada $x \in M$.

2.2.- Observación.- La relación de accesibilidad es evidentemente reflexiva y transitiva pero en general no será simétrica (piénsese en el caso de que U se redujese a un solo punto). Por ello Hermann y Krener (6) introdujeron la siguiente definición :

2.3.- Definición : Sean $x, y \in M$. Se dice que y es debilmente accesible desde x, y escribiremos $y\ W\ A\ x$, si y solo si existen $x^0 = x, \ldots, x^k = y$ tales que se cumple $x^i\ A\ x^{i-1}$ ó $x^{i-1}\ A\ x^i$ para cada $i = 1, \ldots, k$. El conjunto de puntos de M debilmente accesibles desde x lo representaremos por $W\ A(x)$. - El sistema S se dice que es debilmente controlable si y solo si $W\ A(x) = M$ para cada $x \in M$.

2.4.- Definición : Sea X un campo de vectores sobre una variedad M. Una subvariedad conexa $N \subset M$ es una subvariedad integral de X si para cada $x \in M$ el espacio tangente a N en x, $T_x N$, está completamente contenido en el espacio vectorial $\mathcal{L}(X(x))$ engendrado por la familia de vectores $X(x)$.

2.5.- Teorema : Sea X una familia de campos de vectores, cerrada para el producto de Lie, sobre una variedad M tal que ó 1) X es C^∞ y $\dim \mathcal{L}(X(x)) = k$ para cada $x \in M$ ó 2) X es analítica. Entonces para cada $x \in M$ existe una subvariedad integral de X, $N \subset M$, maximal para la inclusión.

Demostración : Para la condición 1) es el clásico Teorema de Frobenius. Para 2) se puede ver su demostración en Lobry (7).

2.6.- Teorema (Chow) : Sea $\mathcal{F}(x)$ la familia de campos de vectores asociada al sistema S. Si bien ó 1) $\mathcal{F}$ es $\mathcal{C}^\infty$ y $\dim \mathcal{F}(x) = k$ para cada $x \in M$ ó 2) $\mathcal{F}$ es analítica; para cada $x \in M$, $WA(x)$ es la subvariedad maximal integral de $\mathcal{F}$ que contiene a x.

Demostración : Véase Hermann (6)

2.7.- Corolario : Si $\mathcal{F}$ es $\mathcal{C}^\infty$ y $\dim \mathcal{F}(x) = n$ para cada $x \in M$, el sistema S es debilmente controlable.

Demostración : Es consecuencia de 2.6 y de la conexión de M.

2.8.- Corolario : Si $\mathcal{F}$ es analítica y $\dim \mathcal{F}(x_o) = n$ entonces $WA(x_o)$ es un abierto de M que contiene a x_o.

Demostración : Es consecuencia inmediata de 2.6.

2.9.- Definición : Llamaremos sistema simétrico al sistema cuya accesibilidad sea una relación simétrica (y por tanto de equivalencia).

2.10.- Ejemplo : Un sistema de la forma :

$$\dot{x} = u_1 f_1(x) + \dots + u_r f_r(x)$$

o bien en forma matricial :

$$\dot{x} = F(x)\, u$$

con $F(x)$, nxr, y u, rx1, con $u \in U = \{(u_1,\dots,u_r)/ /|u_i| \leq 1 \quad \forall i = 1,\dots,r\}$ es simétrico. En efecto si x_1 es accesible desde x_o con control u, x_o lo será desde x_1 con control -u. Otros aspectos de -

estos sistemas son estudiados por Lobry (7).

2.11.- Observación : En un sistema simétrico accesibilidad y accesibilidad debil coinciden, con lo que podemos enunciar :

2.12.- Corolario : Sea S un sistema simétrico. Si $\mathcal{F}$ es $\mathcal{C}^{\infty}$ y dim $\mathcal{F}(x) = n$ para cada $x \in M$ el sistema es controlable.

Demostración : Es consecuencia de 2.7 y 2.11.

2.13.- Corolario : Sea S un sistema simétrico. Si $\mathcal{F}$ es analítica y dim $\mathcal{F}(x^o) = n$ entonces $A(x^o)$ es un abierto de M que contiene a x^o.

Demostración : Es consecuencia de 2.8 y 2.11.

3.- Condiciones suficientes de controlabilidad para sistemas $\dot{x} = f(x) + g(x)u$

En esta sección nos ocuparemos de los sistemas de la forma :

$$\dot{x} = f(x) + u_1 g_1(x) + \dots + u_r g_r(x) \qquad (2)$$

o bien en forma matricial :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

con f(x) matriz nx1; g(x), nxr y u, rx1. En general estos sistemas no son simétricos. En cambio :

3.1.- Teorema : Sea S un sistema del tipo (2) con $f, g_1 \dots g_r$, $\mathcal{C}^{\infty}$. Si existe $u_o = (u_{1o}, \dots, u_{ro}) \in U$ tal que la ecuación diferencial :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\, u_o$$

admite solución periódica en cada punto x de M, el sistema S es simétrico.

Demostración : Podemos suponer sin perdida de generalidad que $u_0 = 0$, ya que se puede escribir :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = f(x) + g(x)u_0 + g(x)(u-u_0) = $$
$$= f_0(x) + g(x)\, v$$

con $f_0(x) = f(x) + g(x)u_0$ y $v = u-u_0 \in V = U- u_0$

(Obsérvese que $0 \in V$).

Sea $\mathfrak{F}'_0$ la familia de campos de vectores :

$$f_1, \pm g_1, \ldots, \pm g_r$$

y sean A'(x), A(x), (WA'(x), WA(x)), los conjuntos accesibles, (debilmente accesibles), desde x mediante curvas integrales de $\mathfrak{F}'_0$ y S respectivamente.

1) WA'(x) = WA(x). En efecto, por ser

$$[f, f \pm g_i] = \pm [f, g_i]$$

el álgebra de Lie, $\mathfrak{F}'$, engendrada por la familia $\mathfrak{F}'_0$ coincidirá con el álgebra de Lie, $\mathfrak{F}$, asociada al sistema S. 1) se sigue de los teoremas 2.5 y 2.6.

2) A'(x) = WA'(x). Para ello basta demostrar que la accesibilidad mediante curvas integrales de $\mathfrak{F}'_0$ es simétrica. En efecto si y es accesible desde x en un tiempo ε mediante la curva integral correspondiente a f que pasa por x, al ser esta periódica es claro que x será accesible desde y siguiendo la misma curva integral en el sentido creciente de t un

tiempo $T-\varepsilon$, donde T es el periodo de dicha curva. De otra forma podemos avanzar en sentido f y sentido $-f$. Si y es accesible desde x mediante curva integral correspondiente a $+g_i$, x lo será desde y con la correspondiente a $-g_i$ y viceversa. Luego en cualquier caso la accesibilidad para $\mathcal{F}'_0$ es simétrica.

3) $A'(x) \subset A(x)$. Para ello hay que probar que podemos avanzar a lo largo de las curvas integrales de $\pm g_i$, mediante las de f y $f \pm g_i$. Como según 2) podemos avanzar en sentido $-f$ y : $\pm g_i = (f \pm g_i) + (-f)$, todo se reduce a probar que si podemos avanzar en las direcciones de dos campos cualesquiera h_1 y h_2 podemos avanzar (localmente) en la dirección $h_1 + h_2$. En efecto, supongamos $t_0 = 0$ y $x(0) = x_0$. Si nos movemos por h_1 un tiempo t, alcanzamos :

$$x = x_0 + h_1(x_0)t + O(t^2)$$

si ahora seguimos h_2 un tiempo t, alcanzamos :

$$\begin{aligned} y &= x + h_2(x)t + O(t^2) = \\ &= x_0 + h_1(x_0)t + h_2(x_0 + O(t))t + O(t^2) = \\ &= x_0 + (h_1(x_0) + h_2(x_0))\, t + O(t^2) \end{aligned}$$

luego localmente hemos seguido la dirección $h_1(x_0) + h_2(x_0)$ con lo que queda probado 3).

Como $A'(x) \subset WA'(x)$ y $A(x) \subset WA(x)$ de 1), 2) y 3) se deduce que $A(x) = WA(x)$ y por tanto que el sistema S es simétrico.

3.2.- Observaciónes : 1) En Brockett (2) se da un caso particular del teorema anterior. 2) Los periodos de las curvas integrales de $\dot{x} = f(x) + g(x)u_o$ no tienen por que ser iguales.

3.3.- Corolario : En las condiciones del teorema 3.1. si $\dim \mathcal{F}(x) = n$ para cada $x \in M$ el sistema (2) es controlable.

Demostración : Es consecuencia de 3.1. y 2.12.

3.4.- Corolario : En las condiciones del teorema 3.1, siendo $f, g_1, \ldots, g_r$ analíticas si $\dim \mathcal{F}(x^o) = n$, entonces $A(x^o)$ es un abierto de M que contiene a x^o.

Demostración : Es consecuencia de 3.1. y 2.13.

4.- Aplicación.-

Aplicaremos los resultados anteriores al sistema :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -u_1 \operatorname{sen} 2x_1 - u_2 \operatorname{sen}\left(2x_1 + \frac{2\pi}{3}\right) - u_3 \operatorname{sen}\left(2x_1 - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

que representa el funcionamiento de un generador síncrono sin amortiguamiento véase (1) y (4).

1) Sea $u_1 = 1$; $u_2 = u_3 = 0$. El sistema se convierte en :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\operatorname{sen} 2x_1 \end{aligned}$$

con puntos singulares en $x_1 = \pm k \frac{\pi}{2}$; $x_2 = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Por otra parte las curvas integrales de dicho sis-

tema satisfacen :

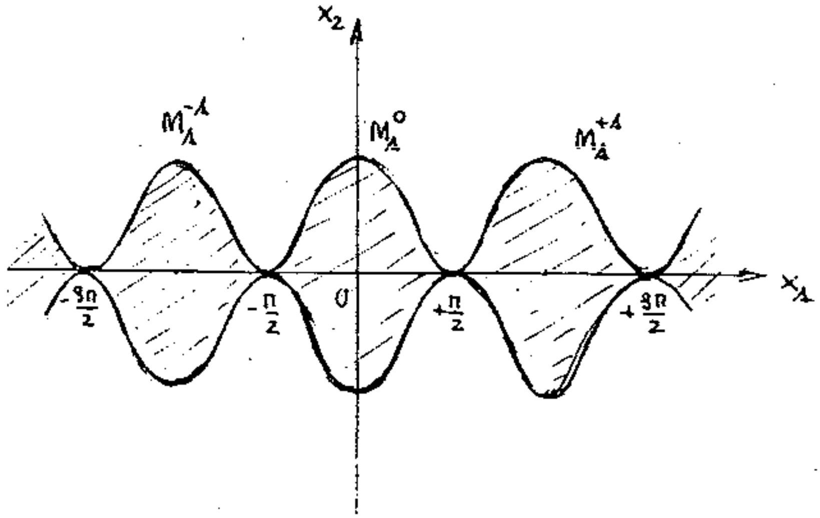
$$x_2\,dx_2 = -\,\mathrm{sen}\,2x_1\,dx_1$$

es decir :

$$x_2^2 = \cos 2x_1 + C$$

siendo C una constante.

Es facil comprobar que las curvas $x_2 = \pm\sqrt{1+\cos 2x_1}$ limitan una región R_1 del plano en cuyo interior M_1 – las soluciones de M_1^n son curvas periódicas contenidas en M_1^n.



$$M_1 = \bigcup_{n=-\infty}^{n=+\infty} M_1^n$$

Análogamente para $u_1 = 0$; $u_2 = 1$ y $u_3 = 0$ obtenemos el sistema :

$$x_1 = x_2$$

$$x_2 = -\text{sen}\ (2x_1 + \frac{2\pi}{3})$$

que presentará una región abierta M_2, traslación de la M_1 en un vector $(-\frac{\pi}{3},0)$ de las mismas característícas que esta.

Y tambien para $u_1 = u_2 = 0$ y $u_3 = 1$ obtenemos el sistema :

$$x_1 = x_2$$

$$x_2 = -\text{sen}\ (2x_1 - \frac{2\pi}{3})$$

que presentará una región abierta M_3, traslación de la M_1 en un vector $(-\frac{\pi}{3},0)$, de las mismas características.

2) Sean f, g_1, g_2 y g_3 los campos :

$$f = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{sen}\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{sen}(2x_1 + \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}; \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{sen}(2x_1 - \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}$$

Para ellos se obtienen los siguientes productos de Lie :

$$[f,g_1] = \begin{pmatrix} -\text{sen}\ 2x_1 \\ 2x_2 \cos\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

$$[f,g_2] = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(2x_1 + \frac{2\pi}{3}) \\ 2x_2 \cos(2x_1 + \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}$$

$$[f,g_3] = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(2x_1 - \frac{2\pi}{3}) \\ 2x_2 \cos(2x_1 - \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}$$

El rango de $f, g_1, g_2, g_3, [f,g_1], [f,g_2], [f,g_3]$ es 2 en cada punto x de $\mathbb{R}^2$.

3) Cada "trozo" M_i^n, $n \in Z_2$, de M_i, i = 1, 2, 3, es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ y por tanto una variedad diferenciable $\mathcal{C}^{\infty}$. En cada uno de ellos se cumplen las condiciones del teorema 3.1. por lo que podemos asegurar que el sistema (3) es controlable en cada M_i^n. La conexión de $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ nos permite afirmar que el sistema es controlable en M. Teniendo en cuenta las trayectorias para $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ podemos afirmar que el sistema es controlable en la región

$$R = \left\{ (x_1, x_2) \ \mathbb{R}^2 / -\sqrt{2} \leq x_2 \leq +\sqrt{2} \right\} .$$

6.- Referencias.-

1.- Amillo, J.M. : "Control en tiempo mínimo de un sistema de potencia no lineal" Tesis Doctoral, E.T.S. Ings. de Telecomunicación, Madrid, 1977.

2.- Brockett, R.W.: "Nonlinear Systems and Differential Geometry" Proceedings I.E.E.E. vol. 64, No. 1, January 1976.

3.- Chow, W.L. : "Nonlinear Systems and Differential - gleichungen ester Ordinung" Math. Ann. vol. 117, pp. 98-105, 1939.

4.- Finch, J.W. and Jones, D.I.: "Optimal Control of - Reluctance Devices", Proc. I.E.E.E., vol 126, No 1, January 1979.

5.- Haynes, G.W. and Hermes, H.: "Nonlinear Controllability via Lie Theory" SIAM, J. on Control, Vol. 8 No 4, November 1970.

6.- Hermann, R. and Krener, A.J.: "Nonlinear Controllability and Observabillity", I.E.E.E. Trans. on Aut. Control, Vol. AC-22, No. 5, October 1977.

7.- Lobry, C.: "Controlabilite des Systemes non lineaires", SIAM, J. on Control, Vol. 8, No. 4, November 1970.