Pub. Mat. UAB
Nº 19 Maig 1980
Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales y
Aplicaciones -Valldoreix, Mayo 1979.

EVOLUCIÓN DE LAS SOLUCIONES DE CIERTOS PROBLEMAS DE DIFUSIÓN CON ABSORCIÓN.

por M. Herrero

Departamento de Ecuaciones Funcionales, Facultad de Matemáticas.
Departamento de Métodos Matemáticos de la Física. Facultad de Físicas,
Universidad Complutense
Madrid - 3

INTRODUCCIÓN.

Es bien sabido que en la teoría clásica de transmisión de calor en un medio homogéneo se admite la hipótesis de que el flujo calorífico es proporcional al gradiente de temperaturas. Se deduce entonces, aplicando un principio de conservación de la energía, la ecuación lineal del calor (en ausencia de fuentes):

$$u_t - \Delta u = 0 \tag{0}$$

En muchas ocasiones, sin embargo, la hipótesis anterior sobre el flujo calorífico no es la más adecuada: existen modelos de interés práctico en los que tal suposición se ve sustituída por una de estas dos:

(S1) El flujo calorífico es proporcional a una función (en general no lineal) del gradiente de temperaturas.

(S2) El flujo calorífico es proporcional al gradiente de una función (en general no lineal) de la temperatura.

En consecuencia, las ecuaciones de evolución que se obtienen ahora son:

(1) $u_t - \operatorname{div}(\beta(\operatorname{grad} u)) = 0$

(2) $u_t - \Delta\beta(u) = 0$

Y los correspondientes operadores de difusión serán:

(01) $Au = -\operatorname{div}(\beta(\operatorname{grad} u))$

(02) $Bu = -\Delta\beta(u)$

Por otra parte, las consideraciones anteriores se aplican a una diversidad de fenómenos de difusión no necesariamente relacionados con la transmisión del calor, como son la distribución de un líquido o gas en un medio poroso, estudio del campo de velocidades en fluídos no newtonianos, etc.

Nuestro interés en este trabajo se centra en el problema de Cauchy (P) asociado a la ecuación (1) con término de absorción $\alpha(u)$

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - \operatorname{div}(\beta(\operatorname{grad} u)) + \alpha(u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0,T) \\ u(0) = u_0(x) \end{cases}$$

Siendo α una función continua, monótona no decreciente, y tal que $\alpha(0) = 0$.

Inicialmente nos centraremos en una elección particular de β (sobre la que no hemos hecho hipótesis hasta el momento). Explícitamente haremos $\beta(s) = (|s_1|^{p-2} s_1, \dots, |s_N|^{p-1} s_N)$ siendo $s = (s_1, \dots, s_N)$, con lo que (P) se escribirá en la forma:

$$(P^*)\quad \begin{cases} u_t - \Delta_p u + \alpha(u) = 0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^N \times (0,T) \\ u(0) = u_0(x) & \text{en} \quad \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Siendo $\Delta_p u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$, $1 < p < +\infty$

Obsérvese que si $p = 2$ se obtiene el operador laplaciano.

Nuestro objetivo en este trabajo es obtener estimaciones sobre el efecto producido por la absorción del medio (representada por $\alpha(u)$) y la difusión (de la que es responsable el operador de segundo orden $\operatorname{div}(\beta(\operatorname{grad} u))$ sobre el comportamiento de la solución u de (P^*) ((P)). Explícitamente, deseamos obtener una respuesta a las siguientes cuestiones:

C1) ¿Es posible que la solución u tenga soporte compacto en la variable espacial x para cada t positivo, aunque el dato inicial $u_0(x)$ no tenga soporte compacto en $\mathbb{R}^N$? Caso afirmativo, ¿Como estimar el tamaño del soporte para cada t?

C2) ¿Es posible que el proceso se extinga en un tiempo finito, en el sentido de que la solución se anule a partir de un cierto instante t_0 (llamado tiempo finito de extinción)? Caso afirmativo, ¿cómo estimar dicho t_0?

Las cuestiones (1) y (2) fueron estudiadas por H. Brézis y A. Friedman [4] para cierta clase de inecuaciones variacionales parabólicas que incluye en particular el problema:

$$(P)\quad \begin{cases} u_t - \Delta u + \alpha(u) = 0 & \text{en} \quad \mathbb{R}^N \times (0,T) \\ u(0) = u_0(x) & \text{en} \quad \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Posteriormente sus resultados fueron obtenidos por otros procedimientos por L.C. Evans y B.F. Knerr [7]. Es de notar que, mientras C2) ha sido estudiada en diferentes situaciones (cf., por ejemplo, Kalashnikov [10], G. Díaz y I. Díaz [5] y la bibliografía allí citada), no conocemos más contribuciones sobre C1) que las anteriormente citadas [4], [7] y las que se exponen en este trabajo. La extensión de los resultados de [4] para problemas asociados al operador $\Delta_p u$ nos fue propuesta por el profesor H. Brézis.

El plan de este trabajo es el siguiente: en primer lugar exponemos las respuestas conocidas sobre C1) y C2) para el problema (P*). A continuación, enunciamos un resultado general para el problema (P) correspondiente a una ámplia categoría de operadores del tipo 01), a saber:

$$Au = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)$$

Siendo β una función monótona cuyas condiciones se precisan en la sección III. Este último resultado ha sido obtenido en colaboración con J.L. Vázquez [9].

Por último, un comentario sobre notación: diremos una propiedad se cumple casi para todo punto, y escribiremos ctp, si tal propiedad se verifica en todo el conjunto que se especifica, salvo quizás en un conjunto de medida nula. El símbolo $\|f\|_{L^p}$ significará la norma en L^p $(1 \leq p \leq \infty)$ de la función f, como es habitual.

II. ESTUDIO DEL PROBLEMA (P*).

Explicitamos a continuación los pasos previos a la obtención del Teorema 1, en el que figuran los resultados fundamentales sobre el estudio de C1) y C2) para el problema (P*). Para más detalles, nos referiremos a [6].

Sean ϕ_1, ϕ_2 dadas por:

$$\phi_1(u) = \begin{cases} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p & \text{si } u \in L^2(\mathbb{R}^N), \text{ grad } u \in L^p(\mathbb{R}^N) \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $1 < p < +\infty$

$$\phi_2(u) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(u) & \text{si } u \in L^2(\mathbb{R}^N), \quad \gamma(u) \in L^1(\mathbb{R}^N) \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $\gamma'(s) = \alpha(s)$.

Se tiene entonces que ϕ_1 y ϕ_2 son convexas, semicontinuas inferiormente y propias (ésto es, $\phi_i \not\equiv +\infty$, $i = 1,2$) en $L^2(\mathbb{R}^N)$ Existen por tanto las subdiferenciales $\partial\phi_1$, $\partial\phi_2$ (una subdiferencial puede considerarse como el gradiente de una función convexa, ver [3]) y se tiene:

a) $\partial\phi_1(u) = -\Delta_p u$

$$u \in D(\partial\phi_1) \iff u \in L^2(\mathbb{R}^N); \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^N),$$

$$i = 1, \ldots N,$$

$\Delta_p u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ y se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \cdot h +$$
$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0, \quad \forall h \in D(\phi_1)$$

b) $\partial\phi_2(u) = \alpha(u)$

$$f \in \partial\phi_2(u) \Longleftrightarrow f(x) \in \alpha(u(x)) \quad \text{ctp} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Por otra parte, si $\phi(u) = \phi_1(u) + \phi_2(u)$, se tiene que $D(\partial\phi) = D(\partial\phi_1) \cap D(\partial\phi_2)$, y $\partial\phi(u) = -\Delta_p u + \alpha(u)$ en $D(\partial\phi)$.

Estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema de existencia para el problema (P*).

Proposición 1.

Sean $f \in L^2(0,T: L^2(\mathbb{R}^N))$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Existe entonces una única $u \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^N))$ solución de (P*). Además se tiene que $u \in W^{1,2}(\delta,T: L^2(\mathbb{R}^N))$ para cada $\delta > 0$ $(\delta < T)$, y $u(t) \in D(\partial\phi)$ casi para todo $t \in (0,T)$.

Para el problema (P*) se tiene el siguiente principio del máximo:

Proposición 2.

Sea $f = 0$, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$. Si u es la solución del problema (P*) dada en la proposición 1, se tiene que, para cada $t > 0$, $u(\cdot,t) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, y además:

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

Necesitamos un resultado que nos permita comparar soluciones de (P*) en abiertos acotados. Para ello, consideramos los problemas

$$
(P_1) \quad \begin{cases} u_t - \Delta_p u + \alpha(u) = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,T) \\ u = g & \text{en} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ u(0) = u_0 & \text{en} \quad \Omega \end{cases}
$$

$$
(P_2) \quad \begin{cases} w_t - \Delta_p w + \alpha(w) = 0 & \text{en} \quad \Omega \times (0,T) \\ w = h & \text{en} \quad \partial\Omega \times [0,T] \\ w(0) = w_0 & \text{en} \quad \Omega \end{cases}
$$

Siendo g, $h \in L^\infty(\partial\Omega \times [0,T])$, Ω un abierto acotado y regular en $\mathbb{R}^N$. Se tiene entonces,

Proposición 3.

Sean u, w soluciones de los problemas (P_1) y (P_2) satisfaciendo las condiciones de regularidad de la proposición 1. Entonces, si $g \leq h$ ctp. y $u_0 \leq w_0$ ctp, se tiene que $u(x,t) \leq w(x,t)$ $\forall t > 0$, ctp Ω.

Utilizaremos a continuación las siguientes hipótesis que versan respectivamente sobre el balance entre absorción y difusión, la magnitud de la absorción y la decadencia del dato inicial $u_0(x)$ en el infinito. Por simplicidad (y por interés físico) nos reduciremos al caso en que $u_0(x) \geq 0$, si bien los resultados que se obtienen siguen siendo válidos en una situación más general.

$$
(H_1) \quad \int_0^1 \frac{ds}{(s\alpha(s))^{1/p}} < +\infty
$$

$$
(H_2) \quad \int_0^1 \frac{ds}{\alpha(s)} < +\infty
$$

$$(H_3) \qquad \begin{cases} u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \\ \\ u_0(x) \to 0 \ \text{ uniformemente si } \ |x| \to \infty \end{cases}$$

Se tiene ahora,

Teorema 1.

Sea $p > 2$. Si se verifican (H_2) y (H_3), se tiene que: i) Para cada $t > 0$, el soporte de la solución $S(t)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$.

ii) Existe un $t_0 > 0$ tal que $u(x,t) = 0$ ctp si $t \geq t_0$

Si $1 < p \leq 2$, y se verifican (H_1) y (H_3), se tienen los mismos resultados que en el caso anterior.

Demostración. Nos limitaremos a señalar las líneas generales (una demostración completa puede verse en [8]). Veamos en primer lugar el caso $p > 2$; el resultado puede obenerse en dos pasos.

1) Construcción de supersoluciones:

Sea $t_0 > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Escribiremos $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0N})$; $X = (x_1, \ldots, x_N)$ representará un punto genérico de $\mathbb{R}^N$. Definimos la función:

$$w(x,t) = \tilde{g}(t_0 - t) + \sum_{i=1}^{N} f(x_i - x_{0i})$$

Donde $g(t)$, $f(x)$ vienen dadas por:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{g(t)} \frac{ds}{\alpha(s)} = \frac{t}{N+1} \quad , \quad \tilde{g}(s) = \begin{cases} g(s) & \text{si } s \geq 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases} \\ \\ \displaystyle\int_0^{f(x)} C\left[\int_0^s \beta(\xi)\,d\xi\right]^{-1/p} = x \quad \text{si } x \geq 0, \quad \text{con } c=(N+1)^{1/p} \\ \\ f(-x) = f(x) \quad \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que:

$$\begin{cases} w(x_0,t_0) = 0 \\ w_t - \Delta_p w + \alpha(w) \geq 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N \times (0,T) \end{cases}$$

2.<u>Comparación lejos del origen</u>.

Sea $\varepsilon > 0$ fijo; sea $S^{\varepsilon}(0) = \{x \in \mathbb{R}^N : u_0(x) \geq \varepsilon\}$. En virtud de (H_3), existe R finito tal que $S^{\varepsilon}(0) \subset B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x|<R\}$ Por otra parte, sea $r > 0$ tal que $\sum_{i=1}^{N} f(x_i - x_{0i}) \geq \|u_0\|_{L^\infty}$ si $|x-x_0| \geq r$. Si imponemos:

$$x_0 \notin S^{\varepsilon}(0) + r$$

Es fácil ver ahora que, si $B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x-x_0| < r\}$:

$$\begin{cases} w_t - \Delta_p w + \alpha(w) \geq 0 & \text{en} \quad B(x_0,r) \times (0,t_0) \\ w \geq \|u_0\|_{L^\infty} & \text{en} \quad B(x_0,r) \times [0,t_0] \\ w(0) \geq \varepsilon & \text{en} \quad B(x_0,r) \end{cases}$$

Mediante la proposición 3, se sigue ahora que $0 \leq u \leq w$ ctp en $B(x_0,r) \times (0,t_0]$. Es fácil concluir ahora que $u = 0$ ctp al exterior de $S^{\varepsilon}(0) + r$.

Por otra parte, si se tiene que $g(t_0) \geq \|u_0\|_{L^\infty}$ (un tal t_0 siempre existe, ya que $g(t) \to \infty$ si $t \to \infty$), la comparación puede efectuarse sin restricciones en cuanto a la lejanía del origen y se deduce la existencia de un tiempo finito de extinción (precisamente t_0).

Finalmente, si $1 < p \leq 2$, basta observar que $(H_1) \Longrightarrow (H_2)$ y se puede razonar como en el caso anterior.

Observaciones.

1) Un operador similar al estudiado anteriormente es

$$Bu = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla_u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \quad 1 < p < +\infty$$

siendo $|\nabla_u| = (\sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial x}{\partial x_i})^2)^{1/2}$. El operador Bu ha sido empleado como modelo adecuado interviniendo en ciertos problemas de glaciología (cf. Pelissier [13]), dinámica de fluídos viscosos (cf. Ladyzenska'ia [11]), etc. Un estudio teórico de este operador puede verse, p.e. en Lions [12]. Los resultados del Teorema 1 son válidos para el problema obtenido al reemplazar en (P*) $\Delta_p u$ por Bu, bajo las mismas hipótesis. La demostración, sin embargo, requiere algunas modificaciones interesantes (ver [9] para una situación más general).

2) Los métodos empleados en la demostración permiten obtener la existencia de soluciones con soporte compacto en x para cada t, en el caso en que los datos tengan soporte compacto. En realidad esta propiedad (conocida con el nombre de propagación finita de señales) puede obtenerse también para el problema sin absorción (ésto es, con $\alpha(u) = 0$) si $p > 2$, mientras que tal propiedad no se cumple en general si $1 < p < 2$ (cf. [6]). Si $N = 1$, este hecho se corresponde con el diferente comportamiento de los fluídos no newtonianos cuando $p > 2$ (fluídos dilatantes) ó $p < 2$ (fluídos pseudoplásticos).

3) Si (H_1) no se verifica, existen contraejemplos (en dimensión $N = 1$), que muestran que en general no se tiene i) ni ii)

III. UN RESULTADO GENERAL.

Desde el punto de vista de la respuesta a las cuestiones C1) y C2), $\Delta_p u$ no es un caso aislado dentro de los operadores de tipo 01), sino que su comportamiento coincide con el de una amplia categoría de tales operadores. En esta sección nos limitaremos a enunciar un resultado general en esta dirección, remitiendo para todo tipo de detalles a [9].

Consideremos ahora el problema:

$$(P)\quad \begin{cases} u_t - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right) + \alpha(u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0,T) \\ u(0) = u_0(x) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Siendo α como en la Sección II, $\beta = \partial j$, donde $j: \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ es una función convexa s.c.i y propia, tal que $j(0) = 0$, $j \geq 0$, $\liminf_{|r|\to\infty} \frac{j(r)}{r} = \infty$. Supondremos además que j verifica la condición Δ_2 de Orlicz (cf. [1]). Se tiene entonces:

<u>Proposición</u> 4.

<u>Si</u> $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^N)$, <u>existe una única</u> $u \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^N))$ <u>solución de</u> (P). <u>Se tiene además que</u> ctp $t \in (0,T)$, $j(\frac{\partial u}{\partial x}(t)) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $j^*(\beta(\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, <u>para todo</u> $i = 1,\ldots N$, <u>siendo</u> $(j^*(s))' = \beta^{-1}(s)$, $\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(\beta(\frac{\partial u}{\partial x_i}(t))) \in L(\mathbb{R}^N)$ <u>y satisface la condición de integración por partes:</u>

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)\cdot h + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\cdot\frac{\partial h}{\partial x_i} = 0$$

<u>Para todo</u> $h \in L^2(\mathbb{R}^N)$ <u>tal que</u> $j(\frac{\partial h}{\partial x_i}) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ $\forall i = 1,\ldots N$.

El teorema de existencia reseñado en la proposición 4 se obtiene por métodos variacionales, a partir de una adecuada integral de energía (ver [3] para otros ejemplos en los que se aplica el procedimiento anterior).

Si definimos ahora las funciones:

$$\phi(t) = \sqrt{N+1} \cdot \sqrt{j^*(\beta(t))}$$

$$\psi(t) = \phi^{-1}(t)$$

$$\gamma(t) = \int_0^t \alpha(s)ds$$

Y escribirmos:

$$(H_4) \qquad \int_0^1 \frac{ds}{(\psi \circ \gamma^{1/2})(s)} < +\infty$$

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.

Si se verifican las hipótesis (H_2), (H_3) y (H_4), el problema (P) verifica las siguientes propiedades:

i) Para cada $t > 0$, el soporte de la solución es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$.

ii) Existe un $t_0 > 0$ tal que $u(x,t) = 0$ ctp si $t \geq t_0$.

Observación.

La hipótesis (H_4), referente al balance entre absorción y difusión, nos da (H_1) si $\beta(s) = |s|^{p-2} s$.

REFERENCIAS.

[1] P.A. Adams: "Sobolev Spaces", Academic Press, New York (1975).

[2] H. Brezis: "Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert". Notas de Matematica, North Holland (1973).

[3] H. Brezis: "Monotonicity methods in Hilbert Spaces and some applications to nonlinear partial differential equations", en Contributions to Nonlinear Functional Analysis, E. Zarantonello, ed. (1971)

[4] H. Brezis - A. Friedman: "Estimates on the support of solutions of parabolic variational inequalities". Ill. Journal of Math. 20 (1976), pag. 82-99.

[5] G. Díaz - I. Díaz: "Finite extinction time for a class of nonlinear parabolic equations" (Aparecera).

[6] I. Díaz - M. Herrero: "Proprietes de support compact pour certaines equations elliptiques et paraboliques non lineaires", Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), Serie (1978), pag. 812-815.

[7] L.C. Evans - B.F. Knerr: "Instantaneous shrinking of the support of nonnegative solutions to certain nonlinear parabolic equations and variational inequalities". (aparecera).

[8] M. Herrero: "Sobre el comportamiento de las soluciones de ciertos problemas parabolicos no lineales", (aparecera).

[9] M. Herrero - J.L. Vazquez: "On a class of nonlinear parabolic equations" (aparecera).

[10] A.S. Kalashnikov: "The propagation of disturbances in problems of nonlinear heat conduction with absorption". Zh. vychsl. Mat. mat Fiz 14 (1974) pag. 891-905.

[11] O. Ladyzenska'ia: "Sur de nouvelles equations dans la dynamique des fluides visqueux et leur resolution globale" Troudi. Mat. Inst. Stekloff (1976), pag 85-104.

[12] J.L. Lions: "Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires", Ed. Dunod (1968).

[13] M.C. Pelissier: "Sur quelques problemas non lineaires en glaciologie", These 3eme cycle. Publications mathematiques d'Orsay (1977).