Pub. Mat. UAB
Nº 19 Maig 1980
Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales y
Aplicaciones -Valldoreix, Mayo 1979.

Soluciones Periódicas de Ecuaciones Diferenciales

Alfonso Casal y Alfredo Somolinos *

Resumen: Se prueba la existencia de soluciones periódicas para sistemas fuertemente no lineales con una fuerza externa periódica pequeña. Se utiliza un teorema de punto fijo basado en el teorema de Shauder y en un Lema de Chu y Diaz en el que se generaliza la idea de la norma de Bielecki.

* Profesores Adjuntos. Departamento de Ecuaciones Funcionales. Universidad Complutense de Madrid.

1. Introducción.

Muchos sistemas físicos que pueden modelarse por ecuaciones diferenciales, no lineales, presentan el fenómeno de las oscilaciones autoexcitadas. Independientemente del estado inicial, el sistema comienza a oscilar hasta llegar a un movimiento periódico de una amplitud y un período determinados solamente por las caracteristicas del sistema y no por el dato inicial

En algunos casos interesa el eliminar estas oscilaciones autoexcitadas, sobre todo si tienen gran amplitud.

Vamos a ver que añadiendo una fuerza exterior periódica que perturbe el sistema, se puede hacer que el sistema sea "arrastrado" por esta perturbación y oscile con la misma frecuencia de la perturbación y amplitud muy pequeña.

2. Soluciones Periódicas.

Estudiarems ecuaciones diferenciales del tipo

(1) $$x' = Ax + f(x) + e\, g(t)$$

donde x está en R^n, e es un parámetro pequeño, A es una matriz constante, la función f(x) es continua a trozos y $f(x) = 0(|x|^a)$ para $a > 1$ y la función g(t) es localmente integrable y periódica de período p.

Cuando el sistema lineal autónomo asociado a (1) no tiene soluciones p-periódicas, el problema de hallar soluciones periódicas de (1) es equivalente a hallar los puntos fijos del operador T sobre el espacio P de las funciones continuas y periódicas de período p, donde T viene definido por

(2) $$Tx(t) = \int_0^p (G(t,s)\, f(x(s)) - eg(s))ds.$$

La matriz G(t,s) es la función de Green correspondiente al problema lineal. (Ver Rouche-Mawhin(3)). Llamaremos G al sup de la norma de G(t,s) para t,s en el intervalo)0,p(.

Como la función f no es Lipschitziana no podemos aplicar el teorema de la aplicación contractiva. Para aplicar el Teorema de Schauder en su versión mas sencilla tenemos que probar que T aplica una bola en si misma. Esto no es fácil de ver, dado que no se hacen hipótesis sobre G. Superamos esta dificultad con el siguiente Lema de Chu y Diaz (1).

Lema: Sea T un operador sobre un conjunto B, si existe un operador K, definido en B y tal que K^{-1} existe y $K^{-1}TK$ tiene un punto fijo y en B' , entonces T tiene un punto fijo x=Ky en KB'.

Prueba: $K^{-1}TKy=y$ implica $T(Ky)=Ky$.

Teorema: Dado el sistema (1) como arriba, supongamos que el sistema lineal asociado no tiene soluciones p-periódicas. Entonces existen números positivos y pequeños h y e' tal que para todo e menor que e' existen soluciones p-periódicas de (1) con norma menor que h.

Prueba:

Probaremos que el operador T definido en (2) tiene un punto fijo sobre el espacio P.

Utilizando el teorema de Ascolí-Arzela se puede probar directamente que el operador T es compacto. Esto es tambien consecuencia de un teorema mas general de Mawhin (2,3), según el cual T es completamente contínuo.

Definimos el operador K sobre P como la division por un escalar $Kx(t) = x(t)/k$, para k mayor que cero. Su inversa será la multiplicación por k.

Es inmediato que el operador $K^{-1}TK$ es compacto puesto que T lo es. Utilizaremos el teorema de Schauder para probar que tiene un punto fijo en la bola unidad B de P, para todo valor de e menor que un cierto e' y un k suficientemente grande. El Lema nos da el teorema inmediatamente tomando h=1/k.

De la definición de K y de T obtenemos

$$|K^{-1}TK\, x(t)| \leq k\int_0^p |G(t,s)|\,|f(x(s)/k)-eg(s)|ds$$

Tomando un k suficientemente grande y teniendo en cuenta que x está en la bola unidad B, podemos escribir $|f(x/k)| \leq C\ |x/k|^a$. Substituyendo arriba obtenemos:

$$|K^{-1}TK\ x| \leq k\int_0^p GC\ |x/k|^a + Geg^o k\ ds \leq kpGC/k^a + eGg^o k$$

puesto que x está en B. Hemos llamado g^o a la integral de la norma de g.

Tomando k suficientemente grande podemos conseguir que el primer término de esta última expresión sea menor que 1/2, y una vez fijado el k tomamos e'lo suficientemente pequeño para que el segundo término sea también menor que 1/2.Así pues el operador $K^{-1}TK$ aplica B en si misma para todo valor de e menor que e', y por lo tanto tiene un punto fijo en B. Por el lema T tiene un punto fijo en KB es decir en la bola de radio 1/k. Esto prueba el teorema.

Notas:

1.No hace falta preocuparse de la existencia de soluciones. La prueba del teorema da al mismo tiempo la existencia de la solución y el hecho de que es periódica.

2. Se afirma la existencia de "al menos" una solución p-periódica. No se dice nada de la unicidad ni de la estabilidad. Esta última es fundamental en las aplicaciones y habrá que determinarla en cada caso.

3. El mismo argumento se transporta punto por punto a ecuaciones con argumento retrasado cuya parte lineal no tiene soluciones p-periódicas.

Bibliografía.

1. Chu S.C. y J.B Diaz , On "in the large"application of the contraction principle. en Differential Equations and Dynamical Systems , Hale-LaSalle Ed. Academic Press. 1967.

2. Mawhin J. Periodic solutions of nonlinear functional differential equations. Journal of Differential Equations 10(1971) 20-29.

3. Rouche N. y J. Mawhin. "Equations differentialles ordinaires". Vol.2 Masson, Paris,1973.