PUBL. Mat. UAB
Nº 18 Abril 1980
Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales
y Aplicaciones. Valldoreix, Mayo 1979.

ALGUNOS PROBLEMAS EN DERIVADAS PARCIALES SEMILINEALES CON MEDIDAS.

por Juan Luis Vázquez Suárez.
Dpto. de Ecuaciones Funcionales.
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madríd.

1. INTRODUCCION.

Vamos a tratar de algunos problemas elípticos y parabólicos que pueden formularse respectivamente de la forma

$$(P_{el}) \quad \begin{cases} u + Au = f \quad \text{en} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ + \text{ condiciones de contorno en } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

y

$$(P_{ev}) \quad \begin{cases} u_t + Au = F \quad \text{en} \quad Q_T = \Omega \times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{en} \quad \bar{\Omega} \\ + \text{ condiciones de contorno en } S_T = \partial\Omega \times [0,T] \end{cases}$$

donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^N$ de frontera regular, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $F: Q_T \to \mathbb{R}$ y $v_0: \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ son funciones medibles o medidas y A es un operador en general no lineal y multívoco que generaliza el operador laplaciano $-\Delta$.

En el presente artículo expondremos algunos resultados para problemas del tipo (P_{el}) y (P_{ev}) válidos cuando alguno de los datos f, F, u_0 son medidas de Radón acotadas. Físicamente ello es de extrema importancia al permitir tratar como datos impulsos localizados, cargas puntuales, puntos de control y una variada clase de fenómenos que se describen en términos de la "función" delta de Dirac, δ.

Dado un abierto Ω de $\mathbb{R}^N$, se define

$$\mathfrak{M}(\Omega) = \{f \in [C_0(\Omega)]': \int|df| < +\infty\}.$$

Si $C_*(\Omega)$ es un conjunto de las funciones continuas en Ω que tienden a cero "es el infinito" (es decir, según el filtro de los complementos de los subconjuntos compactos) con la topología "sup", resulta que $\mathfrak{M}(\Omega) = [C_*(\Omega)]'$. Además $L^1(\Omega)$ es denso en $\mathfrak{M}(\Omega)$, si $f \in L^1(\Omega)$ $\|f\|_1 = \|f\|_{(\Omega)}$ y todo conjunto acotado en $\mathfrak{M}(\Omega)$ es relativamente compacto para la topología $\sigma(\mathfrak{M},C_*)$ [cf. como referencia Edwards [10], pp. 280-288].

Estos resultados pueden ser utilizados para resolver (P_{el}), (P_{ev}) con datos en $\mathfrak{M}(\Omega)$ siempre que conozcamos una buena teoría en $L^1(\Omega)$ (por ej., m-acretividad, ver más adelante) y además la aplicación solución sea acotada de $L^1(\Omega)$ en un espacio funcional adecuado que nos permita el paso al límite. El procedimiento a seguir consiste en aproximar (P_{el}), (P_{ev}) por

$$(P_{el})\quad \begin{cases} u_n + Au_n = f_n & \text{con} \quad f_n \in L^1(Q_T),\ \ f_n \rightharpoonup f \ \ \text{en} \ \ \sigma(\ ,C\ ) \\ + \text{ cond. contorno} \end{cases}$$

$$(P_{ev})\quad \begin{cases} (u_n)_t + Au_n = F_n & \text{con} \quad f_n \in L^1(Q_T),\ F_n \rightharpoonup F \ \ \text{en} \ \ \sigma \\ u_n(x,0) = u_{0n} & \text{con} \quad u_{0n} \in L^1(\Omega),\ \ u_{0n} \rightharpoonup u_0 \ \ \text{en } \sigma \\ + \text{ cond. contorno} \end{cases}$$

Dos palabras sobre técnicas y notación: Un <u>operador</u> (en general multívoco) en un espacio de Hilbert H, p.e. $L^2(\Omega)$ es una aplicación $A\colon D(A) \quad H \to P(H)$, $P(H)$ = partes de H. Por abuso de notación escribiremos $A\colon D(A) \to H$. Se dice <u>monótono</u> si

(1) $\qquad \forall x, y \in D(A) \qquad \langle Ax - Ay,\ x-y\rangle \geq 0$

Un operador monótono es <u>maximal</u> (o.m.m.) si lo es en sentido de inclusión de grafos (en $H \times H$). Según un famoso teorema de Minty, $A\colon D(A) \to H$ es un o.m.m. sii el rango $R(I + A) =$ $= H$ (I = identidad).

En adelante β representará un grafo (u operador) maximál monótono (g.m.m.) de $\mathbb{R}$; en particular β suele ser una "potencia"

$$\beta(s) = |s|^{q-1} \quad s, \quad q > 0.$$

En [5] se recoge la información sobre operadores monótonos con vista a la aplicación a problemas estacionarios y de evolución.

Si X es un espacio de Banach, p.e., $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, el concepto de operador monótono es favorablemente generalizado con el concepto de <u>operador acretivo</u>: $A: D(A) \quad X \to P(X)$ es acretivo si

(2) la aplicación $R_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ es una contracción:

$$D(R_\lambda) \subset X \to X \quad \text{para todo} \quad \lambda > 0$$

A es <u>m-acretivo</u> (generalización de o.m.m.) si $R(I + \lambda A) = X$, es decir, en términos de ecuaciones, si $u + \lambda Au = f$ tiene solución u para toda $f \in X$ y todo $\lambda > 0$.

Una referencia de operadores acretivos y resultados puede verse en [2].

Finalmente $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ son los espacios de Lebesgue sobre un abierto Ω de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. $M^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ son los espacios de Marcinkiewicz (cf. [4], apéndice) ó L^p débiles (cf. [14], §9). Es de notar que $M^p \subset L^p_{loc}$, $1 \leq q < p$. Para $k \geq 0$ y $1 \leq p \leq \infty$, $W^{k,p}(\Omega)$ y $W_0^{k,p}(\Omega)$ son los espacios de Sobolev usuales.

Un resumen de todos los resultados a utilizar puede verse en [15].

2. ALGUNOS PROBLEMAS CON MEDIDAS.

2.1. <u>La ecuación de Thomas-Fermi.</u>

La Teoría de Thomas-Fermi es un modelo de tipo electrostático que representa una buena aproximación de la Teoría de Schrodinger para la Mecánica Cuántica y se aplica con éxito por ejemplo en la determinación del radio efectivo de un átomo o en el estudio de la interacción entre átomos neutros, cf. E.H. Lieb - B. Simon [12] para una exposición de resultados sobre TF hasta 1977. Dado el funcional

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{3}{5}\int_{\mathbb{R}^3}\rho(x)^{5/3}dx - \int v(x)\rho(x)dx + \frac{1}{2}\iint \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|}\,dxdy$$

$$+ \; U, \text{ definido para } \rho \in L^1 \cap L^{5/3}(\mathbb{R}^3),\ \rho \geq 0$$

donde $V = \sum_{j=1}^{k} z_j |x-R_j|^{-1}$ es la energía potencial electrostática debida a los núcleos de carga z_j situados en R_j y $U = \sum_{1\leq i<j\leq k} z_i z_j |R_i - R_j|^{-1}$ es la energía de repulsión núcleo-núcleo, se trata de minimizar $\mathcal{E}(\rho)$ en la clase de densidades de carga electrónica ρ especificada, obteniéndose la existencia de una densidad ρ_{TF} para una energía $\mathcal{E}_{TF} = \min \mathcal{E}(\rho)$.

Tras una serie de cálculos, la ecuación de Euler correspondiente se puede presentar de la forma

$$\text{(3)} \qquad -\frac{1}{4\pi}\Delta\phi + \phi^{3/2} = \sum_{j=1}^{k} z_j\ \delta(x-R_j)$$

donde δ es la masa de Dirac.

H. Brézis, cf. [7], aborda directamente el estudio de (3) mediante las técnicas de operadores m-acretivos desarrolladas en [8] y [4]. El problema (3) es un caso particular del problema

$$(P_1) \qquad -\Delta u + \beta(u) \ni f$$

donde β es un g.m.m. de $\mathbb{R}$ tal que $0 \in \beta(0)$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ se obtiene una buena teoría - L^1:

Teorema 1. [4].

i) *Sea* $N \geq 3$. *Para todo* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *existe una única* $u \in M^{N/N-1}$ *tal que* $|\nabla u| \in M^{N/N-1}$ *y existe una única* $w \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *tales que* $-\Delta u + w = f$, $w \in \beta(u)$ *ctp, es decir, resuelven* (P_1).

ii) Sea $N = 2$ y $0 \in \operatorname{Int} \beta(\mathbb{R})$. Para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ existe $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ tal que $|\nabla u| \in M^2(\mathbb{R}^2)$ y existe $w \in L^1(\mathbb{R}^N)$ única cumpliendo (P_1): $-\Delta u + w = f$, $w \in \beta(u)$ ctp.

iii) Sea $N = 1$ y $0 \in \operatorname{Int} \beta(\mathbb{R})$. Para todo $f \in L^1(\mathbb{R})$ existe $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ y existe $w \in L^1(\mathbb{R})$ única cumpliendo $-\Delta u + w = f$ $w \in \beta(u)$ ctp.

Además si u, $\hat{u}$, w, $\hat{w}$ son soluciones correspondientes respect. a f, $\hat{f}$ se tiene $\|(w-\hat{w})^+\|_1 \leq \|(f-\hat{f})^+\|_1$ y la aplicación $f \to (u, \operatorname{grad} u)$ es acotada

i) si $N \geq 3$ de L^1 en $M^{N/N-2} \times M^{N/N-1}$

ii) si $N = 2$ de L^1 en $W^{1,p}_{loc} \times M^2$ $1 \leq p < 2$.

iii) si $N = 2$ de L^1 en $L^\infty \times L^\infty$.

Los resultados anteriores implican que el operador $A = -\Delta \circ \beta^{-1}$, definido de forma apropiada, es m-acretivo en $L^1(\mathbb{R}^N)$ y la aplicación $f \to \beta\ ((I+A)^{-1} f)$ es acotada de $L^1(\mathbb{R}^N)$ en los espacios antedichos.

En [3] Ph. Bénilan y H. Brézis realizan el procedimiento de aproximación $-L^1$ previsto en §1 para (P_1) cuando f es una medida acotada y se obtienen para $N \geq 3$:

Teorema 2 [3]:

Sea $N \geq 3$ y β un g.m.m. tal que $0 \in \beta(0)$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i) $D(\beta) = \mathbb{R}$ y $\displaystyle\int_1^\infty [\beta(r) - \beta(-r)] r^{2(N-1)/N-2} dr < +\infty$ (C_N)

ii) para todo $f \in (\mathbb{R}^N)$ existe $u \in M^{N/N-2}(\mathbb{R}^N), |\nabla u| \in$ $\in M^{N/N-1}$ existe $w \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $w \in \beta(u)$, $-\Delta u + w = f$ ctp.

iii) idem para el caso particular $f = \pm\delta$.

Además en caso de verificarse i), ii), iii) las soluciones u, w son únicas y se tiene (T-acretividad de A).

$$\|(w-\hat{w})^+\|_1 = \|(f-\hat{f})^+\| \tag{4}$$

Este resultado lo extendemos para dimensiones $N = 1,2$ en el trabajo [15]:

Teorema 3: 1) Sea $N = 2$ y β un g.m.m. tal que $0 \in \beta(0)$, $0 \in \operatorname{Int} \beta(0)$. Entonces son equivalentes:

i) $D(\beta) = \mathbb{R}$ y $\displaystyle\int_0^\infty [\beta(r) - \beta(r)]\, e^{-ar} dr < \infty$ (C_2)
para todo a 0.

ii) para todo $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ existe $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $|\nabla u| \in$ $\in M(\mathbb{R}^2)$ y existe $w \in L^1(\mathbb{R}^2)$ y $w \in \beta(u)$, $-\Delta u + w = f$, ctp.

iii) idem para $f = c\delta$, $c \in \mathbb{R}$

2) Sea $N = 1$ y β un g.m.m. tal que $0 \in \beta(0)$ y $0 \in \operatorname{Int} \beta(\mathbb{R})$. Entonces son equivalentes:

i) $D(\beta) = \mathbb{R}$ (C_1)

ii) para todo $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ existe $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ y existe $w \in L^1(\mathbb{R})$ y $w \in \beta(u)$, $-\Delta u + w = f$ ctp.

En ambos casos w es única y u es única salvo (posiblemente) una constante aditiva. Se cumple la desigualdad (4) [T-acretividad].

2.2. El problema (P_1) tiene también interés cuando el espacio base es un abierto acotado Ω de $\mathbb{R}^N$. Sea como antes β un g.m.m. de $\mathbb{R}$ tal que $0 \in \beta(0)$. Planteamos

$$(P_\Omega)\begin{cases} -\Delta u + \beta(u) \ni f & \text{en } \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 & \text{en } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

H. Brézis y W. Strauss muestran que el operador $A = -\Delta \circ \beta^{-1}$ es m-acretivo en $L^1(\Omega)$ en el siguiente sentido:

Teorema 4. [8]: Para todo $f \in L^1(\Omega)$ existe $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ $1 \leq q < \frac{M}{N-1}$ única y existe $w \in L^1(\Omega)$ única tales que $-\Delta u + w = f$, $w \in \beta(u)$ ctp.. Además si u, w corresponden a f se tiene

$$\|(w-\hat{w})^+\|_1 \leq \|(f-\hat{f})^+\|_1$$

y la aplicación $f \to u$ es acotada: $L^1(\Omega) \to W_0^{1,q}(\Omega)$.

A partir de estos resultados A. Bamberger en [1] aplica el procedimiento de aproximación $-L^1$ del §1 para obtener soluciones de (P_Ω) cuando f es de la forma $g + \delta_{x_0}$, $g \in L^1(\Omega)$ y $\delta_{x_0}(x) = \delta(x-x_0)$, imponiendo a β ciertas condiciones de crecimiento.

Este resultado puede ser mejorado utilizando las técnicas de §2.1. Así nosotros obtenemos:

Teorema 5. [16]: Sea β un g.m.m. de $\mathbb{R}$ tal que $0 \in \beta(0)$. Son equivalentes:

i) β cumple la condición (C_N) de los Th. 2,3.

ii) Para todo $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, existen $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$ única y $w \in L^1(\Omega)$ única tales que $-\Delta u + w = f$, $w \in \beta(u)$ ctp.

iii) idem para $f = c\delta$, $c \in \mathbb{R}$.

Además en este caso $\|(w-\hat{w})^+\|_1 \leq \|(f-\hat{f})^+\|$, en el sentido ya apuntado.

~~~~~~~~~~~~~~

En el caso en que Ω sea un abierto no acotado de $\mathbb{R}^N$ carecemos de una buena teoría de existencia en $L^1(\Omega)$, salvo en el caso en que $f \in L^1_0(\Omega)$, es decir f tenga soporte compacto, pues entonces se tiene,

Teorema 6. [17]: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ de frontera regular Γ y sea β un grafo m.m. de $\mathbb{R}$ tal que $0 \in \beta(0)$ y que

$$\int_{-1}^{1} ds\left(\int_0^s \beta(t)dt\right)^{-1/2} < \infty \qquad \text{(SC)}$$

Entonces para toda $f \in L^1_0(\mathbb{R}^N)$ existe una única $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$ y existe una única $w \in L^1(\Omega)$ tales que $-\Delta u + w = f$, $w \in \beta(u)$ ctp., es decir u resuelve el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \beta(u) \ni f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

Además u y w tienen soporte compacto.

Para otros resultados ver [6] y [9].

Aplicando la técnica de aproximación L^1 obtenemos

Teorema 7. [16]: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto no acotado de frontera regular Γ y sea β un g.m.m. tal que $0 \in \beta(0)$ y cumpliendo (SC). Entonces son equivalentes:

i) cumple (C_N).
~~~~~~~~~~~~~~

ii) para todo $f \in \mathcal{M}_0(\Omega)$, medida acotada de soporte compacto, existen u y w como en el Th. 6.

2.3. Un problema de evolución.

A. Bamberger trata asímismo el problema

$$(P\ )\quad \begin{cases} u_t - \Delta u + \beta(u) \ni f + g(t)\ \delta_{x_0}(x) & \text{en} \quad Q = \Omega_0(0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{en} \quad \Sigma = \Gamma \times [0,T] \end{cases}$$

donde $T > 0$, $f \in L^2(Q)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ y $g \in L^\alpha(0,T)$. Así se tiene,

Teorema 8 [1]: Si

i) β es una función $C^1(\mathbb{R})$ creciente tal que $0 \in \beta(0)$ $0 \le \beta'(\lambda) \le d_1|\lambda|^{p-1} + d_2$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ con $p \ge 1$, $d_1 \ge 1$, $d_2 \ge 0$.

ii) $1 \le p < q^*(\alpha) = \inf\left(\frac{N+2}{N-2+\frac{2}{\alpha}}, \frac{N}{N-2}\right)$.

Entonces (P_2) tiene una solución única $u \in L^q(0,T:L^q(\Omega))$ $\forall q$: $1 \le q < q^*(\alpha)$. Además si $1 \le r < r^*(\alpha) = \inf\left(\frac{N+2}{N-1+\frac{2}{\alpha}}, \frac{N}{N-1}\right)$ $u \in L^r(0,T;\ L^r(\Omega)$.

Esta ecuación tiene interés en ciertos modelos físicos, por ej. en técnica de reactores nucleares en que la variable de control es la posición x_0 del punto en que se aplica el impulso δ_{x_0}. En [1] se estudia la dependencia de u respecto a x_0.

2.4. Impulsos como dato inicial de una ecuación de evolución: soluciones tipo fuerte.

S. Kamenomostskaya, estudia en [11], [12] el problema

$$(P_3) \qquad \begin{cases} u_t = (\beta(u))_{xx} & \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

en que $u_0(x) = E\delta(x)$, E constante, es un dato inicial localizado. (P_3) puede describir la densidad de filtración de un gas en un medio poroso o, ciertos fenómenos que ocurren al comienzo de una explosión nuclear. Definidas las correspondientes soluciones generalizadas (P_3) que S. Kamenomostskaya denomina "de tipo fuente" se demuestra:

Teorema 9 [11]: *Sea β una función continua: $[0, \beta) \to \mathbb{R}$, de clase C^6 en $(0,\infty)$ tal que $\beta(0) = 0$, $\beta'(0) \geq 0$, $\beta(\infty) = \infty$; $\beta(u) > 0$ y $\beta'(u) > 0$ si $u > 0$; además para todas m,M: $0 < m < M$, $\beta(u)$ y $\beta'(u)$ son acotadas en $[0,M]$ y $\beta''(u)$ hasta $\beta^{VI}(u)$ son acotadas en $0 < m \leq u \leq M$. Entonces (P_3) tiene soluciones únicas generalizadas para todo $E \geq 0$.*

El Teorema 9 puede ser extendido con técnicas como las anteriormente expuestas a grafos maximales monótonos β tales que $0 \in \beta(0)$. Asímismo las soluciones tipo fuerte existen para diversos problemas de evolución con operadores monótonos de tipo divergencial. Sobre ello tratamos en [18].

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Bamberger, "Etude de deux equations non-lineaires avec une masse de Dirac au second membre". Preprint, 1979

[2] Ph. Benilan, "Equations d'evolution dans un espace de Banach quelconque et applications". These Univ. Paris XI, Orsay, 1972.

[3] Ph. Benilan - H. Brezis - M. Crandall, "A semilinear Equation in $L^1(\mathbb{R}^N)$". Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa II, nº 4 (1975), pp. 523-555.

[4] Ph. Benilan - H. Brezis, "Non-Linear Problems Related to the Thomas-Fermi Equation", En preparación.

[5] H. Brezis, "Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert". Lecture Notes, 5, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[6] H. Brezis, "Solutions of variational inequalities with compact support", Uspekhi Mat. Nauk, 129 (1974), pp. 103-108.

[7] H. Brezis - E. Lieb, "Long Range Atomic Potentials in Thomas--Fermi Theory", aparecera en Comm. in Math. Phys.

[8] H. Brezis - W. Strauss, "Semilinear Elliptic Equations in L^1". J. Math. Soc, Japan, 25 (1973), pp. 565-590.

[9] I. Diaz, "Soluciones con soporte compacto para ciertos problemas semilineales", aparecera en Collectanea Mathematica.

[10] R.E. Edwards, "Functional Analysis. Theory and Applications", Holt, Rinehart & Winston, New York. 1965.

[11] S. Kmenomostskaya, "Source-type solutions for Equations of Nonstationary Type". J. Math. Anal & Appl. 64 (1978) pp. 263-276.

[12] S. Kamenomostskaya, "The Asymptotic Behaviour of the Solutions of the Filtration Equation". Israel J. Math. 14 (1973).

[13] E. Lieb - B. Simon, "The Thomas-Fermi Theory of Atoms, Molecules and Solids", Adv. in Math., 23 (1977), pp. 22-116.

[14] E. Stein - G. Weiss, "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces", Princeton Univ. Press, Princeton 1971.

[15] J.L. Vazquez, "Existencia, unicidad y propiedades de algunas ecuaciones en derivadas parciales semilineales", Tesis Doctoral, Univ. Complutense de Madrid 1979.

[16] J.L. Vazquez, "On the equation $-\Delta u + \beta(u) \ni f$ on an unbounded open set in $\mathbb{R}^N$", aparecera.

[17] J.L. Vazquez, "Existencia de soluciones de soporte compacto para una ecuación diferencial semilineal sobre un abierto no acotado", Actas de las VI Jornadas Hispano-Lusas de Matematicas. Santander, 1979. (aparecera).

[18] J.L. Vazquez, "Sobre soluciones tipo fuente", en preparacion.