PUBL. Mat. UAB
Nº 18 Abril 1980
Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales
y Aplicaciones. Valldoreix, Mayo 1979.

UN PROCESO DE ESTABILIZACION EN MML
CON COEFICIENTES VARIABLES

PEDRO M. AGUADO
J.M. CORREAS

Dpto. de Matemáticas II
Escuela Tecnica Superior de
Ingenieros Industriales.
Universidad de ZARAGOZA.

1.- INTRODUCCION

En [2] se introducen fórmulas multipasos lineales (MML) de la forma

$$(1.1) \quad \sum_{j=0}^{k} \alpha_j(h)\, y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j(h)\, f_{n+j}, \quad k \geq 1, \; h \in (0,h_o], \; h_o > 0$$

para el tratamiento numérico del problema de valor inicial (PVI)

$$(1.2) \qquad y' = f(t,y), \qquad t \in [0,T]$$

$$y(0) = y_o \qquad f : [0,T] \times R^s \longrightarrow R^s \text{ contínua lispchitziana}$$

siendo y_n la aproximación a $y(t_n)$ obtenida al aplicar la fórmula (1.1) al PVI (1.2) con longitud de paso h, $f_n := f(t_n, y_n)$, $t_n := nh$. Los coeficientes $\alpha_j(h)$, $\beta_j(h)$ satisfacen las siguientes condiciones:

i) $\alpha_j, \beta_j : [0, h_o] \longrightarrow R$, $j = 0(1)k$ son funciones acotadas en $[0, h_o]$ y contínuas en 0^+, dependientes de la longitud de paso h.

ii) $|\alpha_k(h)| > hL|\beta_k(h)|$ para $h \in [0, h_o]$, L constante de Lipschitz de f.

iii) $|\alpha_o(h)| + |\beta_o(h)| > 0$ para $h \in [0, h_o]$.

iv) Los polinomios $\rho(\zeta) := \sum_{j=0}^{k} \alpha_j(h)\, \zeta^j$, $\sigma(\zeta) := \sum_{j=0} \beta_j(h)\, \zeta^j$ no tienen ceros comunes para ningun $h \in [0, h_o]$.

En dicho trabajo se estudia la clase de tales fórmulas caracterizada mediante operadores lineales en diferencias $L_h : C^1[0,T] \to C[0,T]$, definidos mediante expresiones de la forma

$$L_h[y](t) := \sum_{j=0}^{k} \left[\alpha_j(h)\, y(t+jh) - h\, \beta_j(h)\, y'(t+jh)\right],$$

anuladores de espacios lineales $\Pi_p(w)$ engendrados por familias de funciones $\{\phi_o, \phi_1, \ldots, \phi_p\}$ dadas por

$$\phi_o(t,w) := \begin{cases} \cos vt \text{ si } w < 0 \\ 1 \quad \text{ si } w = 0 \\ \cosh vt \text{ si } w > 0 \end{cases}, \phi_n(t,w) := \int_o^t \phi_{n-1}(x,w)dx,\ n = 1, 2, \ldots.$$

donde $v := |w|^{1/2}$, w parámetro real.

Los esquemas multipasos lineales así construidos integran exactamente polinomios algebráicos, funciones trigonométricas y funciones exponenciales. En [3], mediante la introducción de una cierta transformación, se amplía el espacio de funciones integradas exactamente, para incluir las del tipo

$$e^{ut} \quad \phi_n(t,w), \quad u, w \in R, \quad n \in N.$$

En el presente trabajo se generaliza dicha situación para integrar exactamente la clase más general de funciones $t^n e^{ut} \cos vt$, $t^n e^{ut} \text{ sen } vt$, $u, v \in R$, $n \in N$ que aparecen como soluciones del PVI lineal de coeficientes constantes

$$\begin{aligned} y' &= A\, y \\ y(0) &= y_o \end{aligned}, \quad A \text{ matriz constante real } s \times s. \tag{1.3}$$

Como idea unificadora del trabajo se analizan las propiedades estabilizadoras de un grupo de transformaciones ya sugerido en [3]. Como consecuencia, partiendo de un MML que integra exactamente las funciones $e^{\lambda_l t}$, $\lambda_l \in C$, $l = 1(1)s$ se construye un MMl que tiene a $\lambda_l h$, $l = 1(1)s$ como puntos interiores de su región de estabilidad absoluta.

2.- EL GRUPO DE TRANSFORMACIONES $T_{\gamma,\delta}$

Sea $(\hat{\rho},\hat{\sigma})$ un esquema multipasos lineal definido por los polinomios

$$(2.1) \qquad \hat{\rho}(\zeta) := \sum_{j=0}^{k} \hat{\alpha}_j(h)\zeta^j \qquad\qquad \hat{\sigma}(\zeta) := \sum_{j=0}^{k} \hat{\beta}_j(h)\zeta^j$$

y consideremos el esquema (ρ,σ) obtenido a partir de $(\hat{\rho},\hat{\sigma})$ mediante la transformación $T_{\gamma,\delta} : (\hat{\rho},\hat{\sigma}) \longrightarrow (\rho,\sigma)$ definida por las relaciones

$$(2.2) \qquad \begin{aligned} \alpha_j(h) &:= \left[\hat{\alpha}_j(h) + \delta h\hat{\beta}_j(h)\right] e^{-j\gamma h} \\ \beta_j(h) &:= \hat{\beta}_j(h)\, e^{-j\gamma h} \qquad\qquad j = 0(1)k \end{aligned}$$

donde γ,δ son números complejos. Es evidente que si ambos esquemas $(\hat{\rho},\hat{\sigma})$ y (ρ,σ) han de ser de coeficientes constantes, necesariamente los parámetros γ,δ de la transformación han de ser reales.

Si se utiliza la notación

$$(2.3) \qquad \begin{bmatrix} \alpha_j(h) \\ \beta_j(h) \end{bmatrix} = e^{-j\gamma h} \begin{bmatrix} 1 & \delta h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_j(h) \\ \hat{\beta}_j(h) \end{bmatrix}, \qquad j = 0(1)k$$

resulta inmediato comprobar que el conjunto τ de aplicaciones $T_{\gamma,\delta}$ $\gamma,\delta \in C$ definidas por (2.2) es un grupo biparamétrico con respecto a la operación composición de aplicaciones, siendo la identidad $T_{o,o}$ y $T^{-1}_{\gamma,\delta} = T_{-\gamma,-\delta}$.

Observese que, en general, se puede considerar la transformación $T_{\gamma,\delta}$ actuando tanto sobre el esquema multipasos lineal como sobre el problema de valor inicial. En efecto, aplicar el esquema $T_{\gamma,\gamma}$ $(\hat{\rho},\hat{\sigma})$ al PVI (1.2) supone calcular $\{y_n\}$ como solución aproximada del PVI (1.2) mediante la ecuación en diferencias

$$(2.4) \quad \sum_{j=0}^{k} \left[\hat{\alpha}_j(h) + \gamma h \hat{\beta}_j(h)\right] e^{-j\gamma h} y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \hat{\beta}_j(h) e^{-j\gamma h} f_{n+j}$$

la cual se puede escribir para cualquier $\delta \in C$ como

$$(2.5) \quad \sum_{j=0}^{k}\left[\hat{\alpha}_j(h)+\delta h\hat{\beta}_j(h)\right]e^{-j\gamma h} y_{n+j}=h\sum_{j=0}^{k} \hat{\beta}_j(h)e^{-jh\gamma}\left[f_{n+j}-(\gamma-\delta)y_{n+j}\right]$$

pudiendo interpretarse como el esquema $T_{\gamma,\delta}$ $(\hat{\rho},\hat{\sigma})$ aplicado al PVI

$$(2.6) \quad \begin{aligned} y' &= f(t, y) - (\gamma-\delta)y, \quad t \in [0, T] \\ y(0) &= y_o. \end{aligned}$$

Es interesante conocer en términos de los parámetros γ y δ la relación existente entre aplicar el MML $(\hat{\rho},\hat{\sigma})$ al PVI (1.2) y aplicar el MML $(\rho,\sigma) = T_{\gamma,\delta}.(\hat{\rho},\hat{\sigma})$ al PVI (2.6). En particular, cuando $\delta=\gamma$, ¿qué influencia tiene que usar uno u otro de los esquemas $(\hat{\rho},\hat{\sigma})$, (ρ,σ) para tratar numéricamente el mismo PVI? Evidentemente, dicha influencia vendrá dada a través del comportamiento de dichos esquemas con respecto a convergencia y estabilidad.

<u>Lema 2.1</u>.- Si $(\rho,\sigma) = T_{\gamma,\delta}.(\hat{\rho},\hat{\sigma})$, cualquiera que sean γ, δ, $\lambda \in C$ $h > 0$ las dos proposiciones siguientes son equivalentes :

1ª x_i, $i = 1(1)k$ son las raíces de la ecuación $\rho(\zeta) - \lambda h\sigma(\zeta) = 0$.

2ª $\hat{x}_i = e^{-\gamma h} x_i$, $i = 1(1)k$ son las raíces de la ecuación $\hat{\rho}(\zeta) - (\lambda-\delta) h\hat{\sigma}(\zeta) = 0$.

Demostración : Basta considerar que

$$\rho(\zeta) := \sum_{j=0}^{k} \alpha_j(h)\zeta^j = \sum_{j=0}^{k} \left[\hat{\alpha}_j(h)+\delta h\hat{\beta}_j(h)\right] e^{-j\gamma h}\zeta^j = \sum_{j=0}^{k} \hat{\alpha}_j(h)\ (e^{-\gamma h}\zeta)^j +$$

$$+\delta h \sum_{j=0}^{k} \hat{\beta}_j(h)\ (e^{-\gamma h}\zeta)^j = \hat{\rho}(e^{-\gamma h}\zeta)+\delta h\hat{\sigma}(e^{-\gamma h}\zeta)$$

$$\sigma(\zeta) := \sum_{j=0}^{k} \beta_j(h)\zeta^j = \sum_{j=0}^{k} \hat{\beta}_j(h)e^{-j\gamma h}\zeta^j = \sum_{j=0}^{k} \hat{\beta}_j(h)\ (e^{-\gamma h}\zeta)^j = \hat{\sigma}(e^{-\gamma h}\zeta)$$

En consecuencia,

$$\underset{i=1(1)k}{\rho(x_i) - \lambda h\sigma(x_i) = 0} \iff \underset{i=1(1)k}{\hat{\rho}(e^{-\gamma h}x_i) - (\lambda-\delta)\ h\hat{\sigma}(e^{-\gamma h}x_i) = 0}\ .$$

A continuación se desarrollan algunas aplicaciones de este Lema.

3.- CONDICION DE LAS RAICES

La "condición de las raíces" de Dahlquist [4] juega un papel fundamental en la teoría de convergencia para métodos multipasos lineales con coeficientes constantes, pues equivale a la propiedad de cero-estabilidad. No obstante, es poco eficiente en cuanto a la determinación de esquemas cuya aplicación con longitud de paso h fija presente estabilidad numérica; por ello se recurre a otros tipos de estabilidad, frecuentemente basados en propiedades de las raíces de ecuaciones de la forma :

$$\rho(\zeta) - \lambda h\sigma(\zeta) = 0 \tag{3.0}$$

Con el fin de superar las limitaciones de los MML con coeficientes constantes, algunos autores (Gautschi [5]; Norsett [10]; Bettis [1]; Lambert [6] y [7]; Sigurdsson [7] y [8]; Mäkela, Nevaulinna y Sipilä [9]; Sarkany y Liniger [11]) han introducido MML cuyos coeficientes dependen de la longitud de paso h, pero conservan en general el mismo concepto de "condición de las raíces" que para MML de coeficientes constantes. Sin embargo en [2] se introduce la clase de esquemas multipasos lineales (1.1) con coeficientes variables (α_j, β_j, $j = 0(1)k$ funciones reales definidas y acotadas en $[0, h_o]$, $h_o > 0$, y contínuas en 0^+, $|\alpha_o(h)| + |\beta_o(h)| > 0$ en $[0, h_o]$) para la integración numérica del PVI (1.2). En dicho trabajo se define la siguiente "condición de las raíces" :

<u>Definición 3.1</u>.- C-condición. El esquema (ρ,σ) satisface la C-condición para el número complejo λ si existen constantes $h_* > 0$, $c_i > 0$, $i=1(1)k$ tales que para todo $h \in [0, h_*]$ las raíces x_i de la ecuación (3.0) verifican

1ª $\quad |x_i| \leq c_i^h$, $i = 1(1)k$

2ª $\quad |x_i| < 1$ si x_i es múltiple.

La correspondiente definición de "condición de raíces" de Dahlquist para los MML con coeficientes variables propuestos en [2] sería la siguiente :

<u>Definición 3.2</u>.- D-condición. El esquema (ρ,σ) satisface la D-condición si existe $h_* > 0$ tal que para todo $h \in [0, h_*]$ las raíces x_i de la ecuación $\rho(\zeta) = 0$ verifican :

1ª $\quad |x_i| \leq 1$, $i = 1(1)k$

2ª $\quad |x_i| < 1$ si x_i es múltiple.

<u>Observación 3.1</u>.- Si el MML es de coeficientes constantes entonces $h_* = +\infty$ en Definición 3.2.

A continuación se considera la relación existente entre los dos conceptos de C-condición y D-condición de las raíces introducidos en las Definiciones 3.1 y 3.2, en el sentido siguiente : Por una parte, la D-condición es caso particular de la C-condición; y por otra, se muestra que dado un cierto MML $(\hat{\rho},\hat{\sigma})$ que no cumple la D-condición de las raíces, (y por lo tanto no cero-estable en el sentido de la teoría de MML de coeficientes constantes), pero sí la C-condición, se puede transformar en otro MML (ρ,σ) que sí sea cero-estable (en ese mismo sentido). Este proceso cero-estabilizador se consigue haciendo que la transformación correspondiente actue sobre las raíces de la ecuación característica $\hat{\rho}(\zeta) = 0$ modificándolas de tal manera que las raíces de la nueva ecuación característica $\rho(\zeta) = 0$ cumplan la D-condición

Si se considera la transformación $T_{\gamma,0}$ actuando sobre un MML $(\hat{\rho},\hat{\sigma})$, la ecuación característica del MML (ρ,σ) resultante es

$$\sum_{j=0}^{k} \hat{\alpha}_j(h)\ (e^{-\gamma h}\zeta)^j = 0$$

con lo cual tomando γ con $\mathrm{Re}\gamma h$ suficientemente elevado se puede conseguir que $(\hat{\rho},\hat{\sigma})$ satisfaga la D-condición (estricta) de las raíces. De manera general, se tiene el siguiente resultado.

<u>Teorema 3.1</u>.-

(i) Todo MML que verifica la D-condición verifica la C-condición.
(ii) Para cada MML $(\hat{\rho},\hat{\sigma})$ que verifica la C-condición, existen MML(ρ,σ) que verifican la D-condición.

Demostración :

(i) Es evidente que la D-condición es un caso particular de la C-condición para $\lambda = 0$, $c_i = 1$, $i = 1(1)k$.

(ii) Si $(\hat{\rho},\hat{\sigma})$ satisface la C-condición para $\lambda \in C$, existe $h_* > 0$, $c_i > 0$, $i = 1(1)k$ tales que las raíces $\hat{x}_i$ $i = 1(1)k$ de la ecuación $\hat{\rho}(\zeta) - \lambda h\hat{\sigma}(\zeta) = 0$ satisfacen :

1ª $|\hat{x}_i| \leq c_i^h$ para todo $h \in (0, h_*]$, $i = 1(1)k$.
2ª $|\hat{x}_i| < 1$ si $\hat{x}_i$ múltiple.

Si todos los $c_i \leq 1$ no hay nada que demostrar, pues basta tomar $(\rho,\sigma) = (\hat{\rho},\hat{\sigma})$.

Si algun $c_i > 1$, tómese $\gamma \in C$ tal que $\mathrm{Re}\gamma = \log \max_{i=1(1)k} c_i$ y obténgase $(\rho,\sigma) = T_{-\gamma,-\lambda}\ (\hat{\rho},\hat{\sigma})$. Entonces, según Lema 2.1, las raíces de x_i de $\rho(\zeta) = 0$ son $x_i = e^{-\gamma h}\ \hat{x}_i$ y cumplen

$$|x_i| = |e^{-\gamma h}\ \hat{x}_i| = e^{-\mathrm{Re}\gamma h}\ |\hat{x}_i|,$$

luego

$$|x_i| \leq e^{-\mathrm{Re}\gamma h}\ c_i^h \leq 1 \quad \text{para todo} \quad h \in (0,\ h_*]$$

y si x_i múltiple $|x_i| < e^{-\mathrm{Re}\gamma h} < 1$, ya que $\mathrm{Re}\gamma > 0$.

4.- CARACTER ESTABILIZADOR DE LAS TRANSFORMACIONES $T_{\gamma,\delta}$.

Uno de los objetivos fundamentales que se persiguen al introducir MML de coeficientes variables (v. [1], [6], [8], [10], [11]) es conseguir mejores propiedades de estabilidad con respecto a los MML análogos de coeficientes constantes. A continuación se muestra cómo mediante transformaciones $T_{\gamma,\delta}$ adecuadas se consiguen MML estabilizados en algún sentido. Introduciremos previamente la siguiente definición.

Definición 4.1.- Un MML (ρ,σ) dependiente de un parámetro $\bar{\lambda}$ es *localmente A-estable* si cada $\bar{\lambda}$ con $\mathrm{Re}\bar{\lambda} < 0$ pertenece al interior de la región de estabilidad absoluta.

Teorema 4.1.- Para cada MML $(\hat{\rho},\hat{\sigma})$ que cumpla la D-condición de las raíces el esquema $(\rho,\sigma) = T_{\lambda,\lambda}\ (\hat{\rho},\hat{\sigma})$ es localmente A-estable.

Demostración : Tómese $\gamma = \delta = \lambda$ en Lema 2.1 Entonces, si las raíces $\hat{x}_i$, $i = 1(1)k$, de $\hat{\rho}(\zeta) = 0$ satisfacen la D-condición se tiene que las raíces $x_i = e^{\lambda h}\ \hat{x}_i$ de $\rho(\zeta) - \lambda h\sigma(\zeta) = 0$ son de módulo menor que 1 para $\mathrm{Re}\ \lambda h < 0$. Además, por continuidad de las raíces de un polinomio con respecto a sus coeficientes, para cada λh con $\mathrm{Re}\lambda\ h < 0$ existe un entorno V de λh tal que para cada $\widetilde{\lambda h} \subset V$ las raíces de $\rho(\zeta) - \widetilde{\lambda h}\sigma(\zeta) = 0$ son de módulo menor que 1.

Teorema 4.2.- Cada MML $(\hat{\rho},\hat{\sigma})$ y cada región de *estabilidad relativa* $\hat{S}_\gamma := \{\hat{\lambda}h \in C \mid$ las raíces $\hat{x}_i$ de $\hat{\rho}(\zeta) - \hat{\lambda}h\hat{\sigma}(\zeta) = 0$ cumplen $|\hat{x}_i| < e^{\mathrm{Re}\gamma h}\}$

$$h \in [0, h_*], \ \mathrm{Re}\gamma h > 0$$

se transforman por $T_{-\gamma,-\delta}$ en un MML (ρ,σ) con región de *estabilidad absoluta* $S_o := \{\lambda h \in C \mid$ las raíces x_i de $\rho(\zeta) - \lambda h\sigma(\zeta) = 0$ cumplen

$$|x_i| < 1, \ h \in [0, h_*]$$
$$= \hat{S}_\gamma - \delta h.$$

Demostración : Según Lema 2.1, para cualesquiera γ, $\delta,\lambda \in C$ x_i, $i = 1(1)k$, son raíces de $\rho(\zeta) - \lambda h\sigma(\zeta) = 0$ si y sólo si $\hat{x}_i = e^{\gamma h} x_i$ son raíces de $\hat{\rho}(\zeta) - (\lambda + \delta)\, h\hat{\sigma}(\zeta) = 0$. Entonces, para cada

$$(\lambda + \delta)h \in \hat{S}_\gamma \quad \text{se tiene} \quad |\hat{x}_i| < e^{\mathrm{Re}\gamma h},$$

y como $x_i = e^{-\gamma h}\, \hat{x}_i$ cumple que

$$|x_i| = e^{-\mathrm{Re}\gamma h}\, |\hat{x}_i| < 1 ,$$

resulta que $\lambda h \in S_o$. Es decir, $S_o = \hat{S}_\gamma - \delta h$.

5.- INTEGRACION EXACTA DE FUNCIONES

Los MML de coeficientes variables introducidos en [2] y [3] integran exactamente las funciones $e^{ut}\,\phi_n(t,w)$, u, $w \in R$, $n \in N$. En esta sección se establece un resultado que permite la construcción de MML que integran exactamente las combinaciones lineales de funciones de la forma

$$(5.1) \qquad t^n\, e^{ut} \cos vt, \quad t^n\, e^{ut} \operatorname{sen} vt, \quad u,\ v \in R,\ n \in N$$

o, lo que es lo mismo, a las funciones

$$e^{\lambda t}\,\phi_n(t,w),\ \lambda \in C,\ w \in R,\ n \in N.$$

Teorema 5.1.- El esquema

$$\sum_{j=0}^{k} \hat{\alpha}_j(h)\, y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \hat{\beta}_j(h)\, f_{n+j}$$

[illegible] exactamente a las funciones $t^n \cos vt$, $t^n \operatorname{sen} vt$, $n = 0(1)p$ si y sólo si se verifican las condiciones

$$D_o \ : \ \sum_{j=0}^{k}\left[\hat{\alpha}_j(h)\,\phi_o(j,\lambda) - \lambda\,\hat{\beta}_j(h)\,\phi_1(j,\lambda)\right] = 0$$

$$D_1 \ : \ \sum_{j=0}^{k}\left[\hat{\alpha}_j(h)\,\phi_1(j,\lambda) - \hat{\beta}_j(h)\,\phi_o(j,\lambda)\right] = 0$$

....

$$D_{2r} \ : \sum_{j=0}^{k}\left[\left(\frac{j^{r-1}}{r-1}\hat{\alpha}_j(h) - j^{r-2}\hat{\beta}_j(h)\right)\phi_o(j,\lambda) - \frac{j^{r-1}}{r-1}\,\lambda\hat{\beta}_j(h)\phi_1(j,\lambda)\right] = 0$$

$$D_{2r+1} \ : \ \sum_{j=0}^{k}\left[\left(\frac{j^{r-1}}{r-1}\hat{\alpha}_j(h) - j^{r-2}\hat{\beta}_j(h)\right)\phi_1(j,\lambda) - \frac{j^{r-1}}{r-1}\hat{\beta}_j(h)\phi_o(j,\lambda)\right] = 0$$

$$r = 1(1)p, \quad \text{donde} \quad \lambda = -v^2 h^2 < 0.$$

Demostración : Para $n = 0$ ya está demostrado en [2]. Para $n = 1$ basta anular idénticamente las funciones $t \exp(\pm ivt)$ mediante el operador L_h para obtener D_2 y D_3. El resto se completa por inducción.

Es un cálculo directo demostrar ahora el siguiente

Corolario 5.1.- El esquema

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j(h)\, y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j(h)\, f_{n+j}$$

integra exactamente 1 las funciones $t^n e^{ut} \cos vt$, $t^n e^{ut} \operatorname{sen} vt$, $n = 0(1)p$ si y solo si $(\rho,\sigma) = T_{u,u}(\hat{\rho},\hat{\sigma})$, donde el MML $(\hat{\rho},\hat{\sigma})$ satisface las condiciones D_i, $i = 0(1)\ 2p+1$, del Teorema 5.1.

A continuación se considera la existencia de MML estabilizados a partir de los MML considerados en el Corolario 5.1.

Teorema 5.2.- Para cada MML $(\hat{\rho},\hat{\sigma})$ que integra exactamente a las funciones $\exp(\lambda_l\, t)$, $\lambda_l \in C$, $l = 1(1)s$ existen $\gamma,\delta \in C$ tales que el MML $(\rho,\sigma) = T_{\gamma,\delta}(\hat{\rho},\hat{\sigma})$ contiene a $(\lambda_l - \delta)h$, $l = 1(1)s$ en el interior de su región de estabilidad absoluta.

Demostración : Sea $(\hat{\rho},\hat{\sigma})$ un MML que integra exactamente a las funciones $\exp(\lambda_l\, t)$, $l = 1(1)s$. Entonces ([3]) la ecuación $\hat{\rho}(\zeta) - (\log\zeta)\ \hat{\sigma}(\zeta) = 0$ tiene a $\exp(\lambda_l\, h)$, $l = 1(1)s$ como raíces. En consecuencia, cada ecuación $\hat{\rho}(\zeta) - \lambda_l h\sigma(\zeta) = 0$, $l = 1(1)s$ polinómica de grado k posee la raíz $\exp(\lambda_l\, h)$ y otras $k-1$ raíces.

La acotación de dichas raíces se tiene como aplicación del Teorema de Gerschgorin, de modo que la ecuación

$$\sum_{j=0}^{k} \left[\hat{\alpha}_j(h) - \lambda_l\, h\, \hat{\beta}_j(h)\ \zeta^j = 0 \quad \text{con} \quad \alpha_k(h) - \lambda_l\, h\, \beta_k(h) \neq 0,\ h \in (0,\ h_*\right],$$

tiene sus raíces x_i, $i = 1(1)k$ acotadas por

$$\frac{1}{\eta_l + 1} \leq |x_i| \leq \mu_l + 1,\ i = 1(1)k$$

donde

$$\mu_l := \max_{j=0(1)k} \left| \frac{\alpha_j(h) - \lambda_l\, h\, \beta_j(h)}{\alpha_k(h) - \lambda_l\, h\, \beta_k(h)} \right|$$

$$\eta_l := \max_{j=0(1)k} \left| \frac{\alpha_j(h) - \lambda_l\, h\, \beta_j(h)}{\alpha_o(h) - \lambda_l\, h\, \beta_o(h)} \right|$$

Tomando $L := \min_{l=1(1)s} \frac{1}{\eta_l + 1}$, $U := \max_{l=1(1)s} \mu_l + 1$

resulta que el conjunto de raíces de las ecuaciones

$$\hat{\rho}(\zeta) - \lambda_l\, h\, \hat{\sigma}(\zeta) = 0, \quad l = 1(1)s$$

verifican

$$L \leq |x_i| \leq U.$$

Si $U < 1$ es evidente que $\lambda_l h$, $l = 1(1)s$, están en el interior de la región de estabilidad absoluta del MML $(\hat{\rho},\hat{\sigma})$. En este caso el Teorema 5.2 se cumple trivialmente con $\gamma = \delta = 0$.

Si $U \geq 1$ tómese γ tal que $\mathrm{Re}\gamma h > \log U$ y definamos

$$\hat{S}_\gamma := \left\{ \begin{array}{l} \lambda h \in C \,|\, \text{las raíces } \hat{x}_i \text{ de } \hat{\rho}(\zeta) - \lambda h \hat{\sigma}(\zeta) = 0 \text{ cumplen que} \\ |\hat{x}_i| < e^{\mathrm{Re}\gamma h},\ h \in [0, h_*],\ \mathrm{Re}\gamma h > 0 \end{array} \right\}$$

Evidentemente, $\lambda_l h$ pertenecen al interior de $\hat{S}_\gamma$, $l = 1(1)s$.

De acuerdo con Teorema 4.2, el MML $(\rho,\sigma) = T_{-\gamma,-\delta}(\hat{\rho},\hat{\sigma})$ tiene a $(\lambda_l - \delta)h$, $l = 1(1)s$ como puntos interiores de la región de estabilidad absoluta $S_o = \hat{S}_\gamma - \delta h$.

6.- APLICACION A PVI LINEALES.

Para integrar exactamente los problemas lineales: $\begin{array}{l} y' = Ay \\ y(0) = y_o \end{array}$

donde A matriz real constante $s \times s$ y λ_l valor propio de A de orden de multiplicidad p_l, $l = 1(1)m$, $\sum_{l=1}^{k} p_l = s$, siempre es posible referirse a la correspondiente forma canónica de Jordan y construir un esquema que integre exactamente las correspondientes funciones de la forma : $t^n e^{ut} \cos vt$, $t^n e^{ut} \operatorname{sen} vt$, $n = 0(1)\ p-1$.

Para conseguirlo, de acuerdo con el Teorema 5.1, basta imponer para cada valor propio λ_l las condiciones siguientes :

i) Si λ_l es valor propio real de orden de multiplicidad p_l, debe tomarse $p = p_l$, $v = 0$, $u = \lambda_l$, imponiendo las condiciones C_o, C_1, ... , C_{p_l-1} y aplicando a continuación la transformación $T_{u,u}$.

ii) Si $\lambda_l = u_l + iv_l$, es valor propio complejo de orden de multiplicidad p_l debe tomarse $p = p_l$, $v = v_l$, $u = u_l$, imponiendo las condiciones D_o, D_1, D_2, ... , D_{2p_l-1}, y aplicando a continuación la transformación $T_{u,u}$.

<u>Observación</u>.- Las condiciones C_i, $i = 0(1)p_l-1$, son las conocidas expresiones para esquemas multipasos lineales con coeficientes constantes. [6].

BIBLIOGRAFIA

[1] BETTIS, D. G. (1970) Stabilization of finite difference methods of numerical integration. Cel. Mech. <u>2</u>.

[2] CORREAS, J.M. (1977) Convergencia y estabilidad de una clase de métodos lineales de varios pasos con coeficientes variables. Actas IV Jorn. Math. Hisp. Lusas. Jaca 1977.

[3] CORREAS, J.M. (1978) Sobre estabilidad de métodos multipasos lineales con coeficientes variables. V Jorn. Luso-Espanh. Math. Averiro, 1978.

[4] DAHLQUIST, G. (1956) Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations. Math. Scand. <u>4</u>, pp. 33-55.

[5] GAUTSCHI, W. (1961) Numerical integration of ordinary differential equations based on trigonometric polynomials. Numer. Math. 3, pp. 381-397.

[6] LAMBERT, J.D. (1970) Linear Multistep Methods with mildly varying cofficients. Math. of Comput. 24, pp. 81-94.

[7] LAMBERT, J.D. and SIGURDSSON (1972) Multistep methods with variable matrix coefficientes. SIAM J. Numer. Anal., 9, pp. 715-733.

[8] SIGURDSSON, S.T. (1973) Multistep Methods with variable matrix coefficients for systems of ordinary differential equations. Thesis) Chalmers Inst. of Techn., Göteborg, Sweden. Rept. 1973.04.

[9] MÄKELA, M. NEVANLINNA, O. and SIPILÄ, A.H. (1974) On the concepts of convergence, consistency, and stability in connexion with some numerical methods. Num. Math. 22, pp. 261-274.

[10] NØRSETT, S.P. (1969) An A-stable modification of the Adams-Bashfort methods. Proc. Conf. on Numer. Sol. of Diff. Eq. Dundee 1968.

[11] SARKANY, E.F. and LINIGER, W. (1974) Exponencial fitteng of matricial multistep methods for ordinary differential equations. Math. of Comput. 28, pp. 1035-1052.