PUBL. Mat. UAB
Nº 18 Abril 1980
Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales y
Aplicaciones. Valldoreix, Mayo 1979.

TRATAMIENTO NUMERICO DE PVI PARA EDO MEDIANTE MML DE COEFICIENTES VARIABLES

por

J.M. CORREAS

Departamento de Matemáticas II,
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales,
Universidad de Zaragoza.

El objeto de estas notas es dar una breve introducción esquemática a un tipo de métodos numéricos poco desarrollados cuyo tratamiento no es frecuente en la literatura y cuyas ideas fundamentales aparecen algo dispersas e incluso, salvo en algunos trabajos específicos, poco definidas. Se trata de los métodos basados en esquemas multipasos lineales (MML) de coeficientes variables.

Una causa importante en la motivación de tales esquemas hay que buscarla en las limitaciones de los esquemas multipasos lineales de coeficientes constantes, basados en operadores lineales L_h definidos por

$$(1)\quad L_h[y](t):=\sum_{j=0}^{k}\left[\alpha_j\, y(t+jh)-h\beta_j \frac{d}{dt}\, y(t+jh)\right],\ \alpha_j,\beta_j \text{ constantes}$$

al aplicarlos a la integración numérica del problema de valor inicial (PVI)

$$(2) \quad \begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad t \in [0,T] \\ &y(0) = y_0 , \quad f:[0,T] \times R^S \to R^S \end{aligned}$$

con solución única. El operador (1) aplicado al PVI (2) con paso de integración constante $h > 0$ produce la ecuación en diferencias finitas

$$(3) \qquad \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \, y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j \, f_{n+j}$$

donde $t_n := nh$, y_{n+j} aproxima los valores $y(t+jh)$, $f_{n+j} := = f(t_{n+j}, y_{n+j})$, y si se dispone de un "starting procedure" para determinar los valores $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ la fórmula (3) puede aplicarse para generar una sucesión finita $\{y_n\}_0^N$ que aproxima a la solución exacta $y(t)$ del PVI (2) en los puntos de la red $t_n = nh$, $n = 0(1)N$.

Bajo condiciones adecuadas (V.G. Hall and J.M. Watt) se consigue <u>convergencia</u> en el sentido de que

$$(4) \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t}} y_n = y(t) \quad , \quad t \in [0,T]$$ para todo PVI (2) de una

clase (general) dada, quedando caracterizada esta exigencia analíticamente imprescindible mediante el slogan general

(5) CONVERGENCIA = CONSISTENCIA + ESTABILIDAD

Por una parte, <u>consistencia</u> equivale a <u>orden $p \geq 1$</u>, estando caracterizado <u>orden p</u> por las condiciones

$$(6) \quad \begin{aligned} &\sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0 , \quad \sum_{j=1}^{k} j\alpha_j - \sum_{j=0}^{k} \beta_j = 0 \quad , \\ &\sum_{j=1}^{k} [j^{r-1} \alpha_j - (r-1) \, j^{r-2} \beta_j] = 0, \quad r = 3(1)p \end{aligned}$$

que traducen el hecho de integrar exactamente las funciones

$1,t,\ldots,t^p$ (es decir, la fórmula ML(3), con valores y_μ $\mu = 0(1)k-1$ exactos, integra sin error de discretización los PVI(2) cuyas soluciones son polinomios algebraicos de grado $\leq p$).

Y por otra parte, el concepto de estabilidad recogido en (5) equivale a la condición de las raices de Dahlquist, la cual se define exigiendo de las raices ζ_l $l = 1(1)k$ de la ecuación $\rho(\zeta) := \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \zeta^j = 0$ que cumplan las condiciones

$$\text{(7)} \qquad \begin{array}{ll} \text{i)} & |\zeta_l| \leq 1 \qquad l = 1(1)k\ , \\ \text{ii)} & |\zeta_l| < 1 \quad \text{si } \zeta_l \text{ es múltiple.} \end{array}$$

El principal efecto del teorema fundamental de convergencia es delimitar las fórmulas (3) de interés, eliminando cualquier MML que no satisfaga estas dos condiciones de consistencia y estabilidad. Es natural, además, tratar de conseguir orden de precisión elevado dentro de la clase de MML convergentes, siendo bien conocido el hecho de que el orden máximo alcanzable de un MML de k pasos estable es $k + 2$ con k par (métodos estables optimales).

Sin embargo, el teorema de convergencia no garantiza que un MML consistente y estable dé resultados numéricos satisfactorios al computar con h fijo; ni tampoco ayuda a elegir un valor h con el que se puedan esperar resultados aceptables para un PVI dado. Para responder a esta cuestión se han desarrollado teorías de estabilidad débil, condicional, numérica, etc. por diversos autores (T.E. Hull, H. Brunner,). En particular, es interesante constatar que los métodos estables optimales presentan inestabilidad débil (lo cual se comprende fácilmente pues todas las raices de la ecuación característica son de módulo 1).

Pero las dificultades no siempre dependen del método numérico, sino que a veces proceden de la naturaleza del

PVI: por ejemplo, un comportamiento "stiff" caracterizado fundamentalmente por una razón de "stiffness" local (V.G. Hall and J.M. Watt)

$$(8) \qquad S(t) := \max_{i=1(1)s} |\mathrm{Re}\,\lambda_i| / \min_{i=1(1)s} |\mathrm{Re}\,\lambda_i| \gg 1$$

donde λ_i $i = 1(1)s$ son los autovalores de $\frac{\partial f}{\partial y}$. La mayor dificultad que surge al intentar obtener una aproximación numérica a la solución $y(t)$ de un problema "stiff" es la inestabilidad numérica. Para conseguir estabilidad absoluta es necesario usar un paso h tal que cada valor $h\lambda_i$ $i = 1(1)s$ pertenezca al interior de la región de estabilidad absoluta del método numérico; para métodos con regiones de estabilidad absoluta acotada el paso h queda así restringido al orden de magnitud de $\min_{i=1(1)s} |\mathrm{Re}\,\lambda_i|^{-1}$, y como el intervalo de integración puede exceder al valor $\max_{i=1(1)s} |\mathrm{Re}\,\lambda_i|^{-1}$ el número de pasos de integración requerido puede ser muy grande, comparable a la "razón de stiffness" del sistema, lo cual hace que el cálculo resulte prohibitivamente caro, pues valores de $S(t)$ del orden de 10^6 son frecuentes en problemas de cinética de reacciones químicas, reactores nucleares, control de procesos, teoría de circuitos, etc. Para vencer esta limitación de estabilidad sobre el paso h se ha deseado disponer de métodos numéricos que posean regiones de estabilidad infinitas: por ejemplo, métodos A-estables (Dahlquist, 1963) para integración numérica de problemas "stiff" localmente estables. Sin embargo, A-estabilidad es un concepto demasiado restrictivo, ya que ningún MML explícito puede ser A-estable y el orden de un MML A-estable es ≤ 2 (siendo la regla trapezoidal la única fórmula A-estable de orden 2); por ello, se suaviza la exigencia introduciendo métodos $A(\alpha)$-estables (Widlund, 1967), stiff-estables (Gear 1971; Jeltsch, 1976), o B-estables (Bickart y Rubin, 1974).

Si se tiene en cuenta que los dos criterios teóricos fundamentales aplicados a la validación de métodos numéricos son medida de la precisión y tamaño de las regiones de estabilidad, ambos ponderados por el número de evaluaciones de función, y si se considera que el objetivo final a alcanzar con un algoritmo de integración automática es conseguir un paso h tan largo como sea posible al mínimo costo posible dentro de un margen de error preestablecido, se comprenderá que, junto a los problemas "stiff", aparezcan otros tipos de problemas limitando la aplicabilidad de MML con coeficientes constantes y sugiriendo la necesidad de nuevos métodos. Por ejemplo, muchos problemas de tipo oscilatorio (cálculo de órbitas, oscilaciones amortiguadas, teoría de la señal, etc.) deben ser integrados sobre largos periodos de tiempo, siendo imprescindible para ello disponer de métodos precisos que admitan longitud de paso grande.

Los métodos en diferencias finitas clásicos para la integración numérica de PVI (2) se basan en aproximación polinómica y, por consiguiente, integran exactamente polinomios algebraicos de un orden dado. Pero cuando se aplican a problemas oscilatorios, que tienen soluciones no polinómicas, resultan inestabilidades numéricas; concretamente, si uno de los métodos clásicos de 4ª ó 5ª orden se emplean para la integración del movimiento kepleriano circular los puntos resultantes espiralan hacia afuera a partir de la órbita circular exacta.

Estos y otros hechos han llevado a diversos autores a la necesidad de construir métodos eficientes para el tratamiento numérico de problemas "stiff" y oscilatorios, entre otros. Por lo que respecta a MML, ha habido varios intentos de construcción y análisis de fórmulas MML con CV

$$(9) \qquad \sum_{j=0}^{k} \alpha_j(h)\, y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j(h)\, f_{n+j}$$

donde los coeficientes variables α_j, β_j dependen de la longitud de paso h a través de un producto λh con λ parámetro real, o a través de $t_n = nh$. A continuación vamos a comentar brevemente aquellos trabajos que, a nuestro juicio, han supuesto una aportación definitiva a la teoría de MML con CV.

Entre los diversos aspectos que se pueden resaltar en el análisis de MML con CV nos vamos a fijar especialmente en tres conceptos fundamentales:

1) DETERMINACION DE LOS COEFICIENTES, ligado con la idea de modificación de MML con CC.

2) ORDEN de precisión, estrechamente relacionado con integración exacta de funciones.

3) ESTABILIDAD en conexión con la condición de las raices utilizada.

Probablemente, el antecedente más remoto de las ideas que aquí se pretende resaltar hay que buscarlo en el artículo de W. GAUTSCHI (1961), donde se especifican métodos trigonométricos Adams-Bashforth y Adams-Moulton hasta cuatro pasos, dando los coeficientes como series de potencias de un parámetro real v; cuando $v \to 0$, se obtienen los correspondientes MML con CC. La aportación teórica más impotante consiste en un teorema donde da condiciones suficientes para la existencia de métodos trigonométricos que integran exactamente polinomios de Fourier (con frecuencias múltiplos enteros de una frecuencia fundamental). Gautschi define orden 2n como integración exacta de las funciones 1, cos wt,..., cos nwt, sen wt,..., sen nwt. Muestra algunas aplicaciones numéricas y observa que el periodo $T = 2\pi/w$ puede ser sobreestimado, o subestimado hasta un cierto $T_0 < T$, produciendo menor error absoluto que con los correspondientes MML con CC.

Motivado por su aplicación a problemas de Mecánica Celeste, D.G. BETTIS (1970) modifica los MML de CC clásicos para integrar exactamente productos de polinomios algebraicos y polinomios de Fourier. Para obtener los "métodos modificados" parte de los coeficientes constantes clásicos y sólo varia los dos últimos. En estos trabajos Bettis desarrolla "métodos modificados" tipo Adams-Bashforth y Adams-Moulton con n pasos, dando expresiones compactas para n = 2,3 y un algoritmo recurrente para n arbitrario. El orden N, N par, para las fórmulas modificadas de Bettis

$$(10) \qquad y_{n+1} - y_n = \sum_{j=0}^{N} \beta_j \, f_{n+i-j}, \quad i = 1 \text{ implícita}, \; i = 0 \text{ explícita}$$

corresponde a integración exacta de las funciones $t^p \cos vt$, t^p sen vt, p = 0(1) N/2. Se hace aplicación a cálculo numérico de órbitas, observando que estas fórmulas admiten paso h mayor de lo habitual en MML con CC. Al efecto que producen en este tipo de problemas, comparando con los resultados dados por MML con CC, Bettis le denomina "estabilización". Las ideas de Bettis han sido desarrolladas posteriormente por C. Simó (1977) y J.M. Correas y colaboradores (1977, 1979), entre otros.

Desde un punto de vista más teórico, M. MÄKELÄ (1970) considera MML con CV(9) donde $\alpha_j(h) = \alpha_j + h\, a_j(h)$ con α_j constantes y las funciones $a_j(h)$, $\beta_j(h)$ son acotadas. Establece un teorema de existencia de MML desde un planteamiento interpolatorio. En cuanto al orden, considera espacios de polinomios algebricos y funciones trigonométricas equiparando orden con grado de precisión. En su trabajo, Mäkelä hace un análisis de convergencia, generalizando la condición de consistencia pero conservando la condición de las raices de Dahlquist.

Varios autores, W. LINIGER y R.A. WILLOUGHBY (1970), G. BJUREL (1972), P.J. van der HOUWEN (1977) han propuesto métodos exponencialmente adaptados para obtener propiedades de estabilidad adecuadas para ecuaciones diferenciales "stiff". Por otra parte, con frecuencia es conveniente clasificar los métodos de acuerdo con las clases de problemas que integran exactamente; esto conduce a resultados útiles, como muestran T. LYCHE (1972), y M. MÄKELÄ, O. NEVANLINNA y A.H. SIPILÄ (1974). Estos introducen una manera sistemática de construir MML que integran exactamente problemas con soluciones en espacios $\Lambda_{rs} := \{t^j e^{\lambda_i t} | j = 0(1)r, \lambda_i \in R,\ i = 1(1)s\}$. La construcción proporciona los coeficientes $\alpha_j(h)$, $\beta_j(h)$ explícitamente y un medio para probar convergencia y estudiar el efecto de adaptación exponencial sobre las regiones de estabilidad de los métodos. Se basan en interpolación de Hermite-Birkhoff generalizada, pero se restringen a valores reales de λ_i porque las propiedades de interpolación HB compleja no son suficientemente conocidas.

J.D. LAMBERT (1970) considera MML basados en fórmulas

$$(11) \qquad \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j + h\ a_j(t)] y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} [\beta_j + h\ b_j(t)] f_{n+j}$$

donde a_j, b_j son funciones especificadas por la ecuación diferencial particular considerada. De este modo es posible controlar las características de estabilidad débil del método. Lambert define orden p del operador $L_h[y](t) := = \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j\ y(t+jh) - h\ \beta_j \frac{d}{dt} y(t+jh)]$ y orden r del operador $M_h[y](t) := = \sum_{j=0}^{k} [a_j(t)\ y(t+jh) - h\ b_j(t) \frac{d}{dt} y(t+jh)]$ en la forma habitual, y orden de la fórmula (11) como $\min\{p, r+1\}$. El método resulta ser consistente si y sólo si orden ≥ 1, y el operador $L + hM$ es estable si L es estable. En estas condiciones prueba el teorema fundamental CONVERGENCIA = ESTABILIDAD + CONSISTENCIA. En este artículo, Lambert considera la subclase de MML (11) con $a_j(t) = \hat{a}_j\, q(t)$, $b_j(t) = \hat{b}_j\, q(t)$ con $\hat{a}_j$, $\hat{b}_j$ constantes, $q(t) = -\frac{\partial f}{\partial y}$ aplicados únicamente al PVI (2) escalar, resultando esta elección condición necesaria para controlar el efecto de inestabilidad débil. De este modo logra superar la barrera de inestabilidad débil asociada con los MML clásicos estables optimales y obtiene versiones estabilizadas en los casos $k = 2$, $k = 4$. Es importante destacar aquí que en este trabajo de Lambert aparece violada por primera vez en la literatura, aunque no de manera explícita, la condición de las raíces de Dahlquist en el sentido de MML con coeficientes constantes.

S.T. SIGURDSSON (1973) realiza en su tesis el trabajo indudablemente más completo que existe en la literatura sobre MML con coeficientes variables. Considera la clase (k,s) - MML con coeficientes matriciales variables

$$(12) \qquad \sum_{j=0}^{k} \left[\alpha_j I + \sum_{r=1}^{s} a_j^{(r)}\, h^r Q_n^r\right] y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \left[\beta_j I + \sum_{r=1}^{s-1} b_j^{(r)}\, h^r\, Q_n^r\right] f_{n+j}$$

con $\alpha_k = 1$, α_j, $a_j^{(r)}$, β_j, $b_j^{(r)}$ constantes reales, Q_n matriz $N \times N$ real o compleja. Tales fórmulas pueden interpretarse para cada n como combinaciones lineales con coeficientes matriciales de $s + 1$ MML con coeficientes constantes, y presentan la posibilidad de adaptación al PVI (2) en el sentido de que si Q_n se elige como una aproximación a $-\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n)$ se puede lograr que la norma $\|f_{n+j} + Q_n\, y_{n+j}\|$ sea pequeña. Sigurdsson define orden p de una fórmula (12) como

$$(13) \qquad \left\| \sum_{r=0}^{s} h^r Q^r\, L^{(r)}\, [y(t), h] \right\| = O(h^{p+1}) \quad \text{cuando } h \to 0 ,$$

donde $L^{(o)}[y(t),h] := \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j\, y(t+jh) - h\, \beta_j \frac{d}{dt} y(t+jh)]$

$$L^{(r)}[y(t),h] := \sum_{j=0}^{k} [a_j^{(r)} \; y(t+jh) - hb_j^{(r)} \; \frac{d}{dt} \, y(t+jh)]$$

$$r = 1(1)s-1$$

$$L^{(s)} \; [y(t),h] := \sum_{j=0}^{k} [a_j^{(s)} \; y(t+jh)] \quad ,$$

siendo el concepto de orden independiente de la elección hecha para la matriz Q_n. Sigurdsson mantiene el clásico resultado de convergencia a base de CONSISTENCIA = ORDEN p y mantener la misma CONDICION DE LAS RAICES de Dahlquist. No obstante, como generalización del trabajo de Lambert (1970), introduce la <u>condición de estabilización</u>

$$(14) \qquad \sum_{j=q}^{k} \binom{j}{q} \; \gamma_j^{(r)} \; x_i^{j-q} = 0, \; r=1(1)s, \; q=0(1)m_i-1, \; i=2(1)l$$

donde $\gamma_j^{(0)} = \alpha_j, \; \gamma_j^{(r)} = a_j^{(r)} + b_j^{(r-1)}, \; r=1(1)s, \; j=0(1)k$

y $\rho(x) = (x-1) \prod_{i=2}^{l} (x-x_i)^{m_i}$ es el primer polinomio característico del MML.

Esta condición de estabilización tiene como consecuencia el hecho de que el <u>orden máximo alcanzable</u> para un (k,s) - MML (12) que satisface (14) es 2s. El análisis de Sigurdsson se basa fundamentalmente en el concepto de <u>A_t-estabilidad</u> que introduce en relación con el PVI

$$(15) \qquad y' = A(t)y, \quad y(0) = y_0, \quad \text{donde}$$

$$(16) \qquad \|A(\tilde{t}) - A(t)\| \leq L_t |\tilde{t} - t|, \; \mu[A(t)] \leq -\alpha < 0, \; \tilde{t},t \geq 0$$

α, L_t constantes, μ norma logarítmica asociada a $\| \quad \|$, y prueba que si un MML (12) cumple la condición de estabilidad (14) se pueden obtener acotaciones del tipo

$$(17) \qquad \|y_n\| \leq \tilde{K} \; \text{máx} \|y_j\| \; e^{-\tilde{\alpha}nh} \; , \; n = 0,1,.., \; \tilde{\alpha}, \; \tilde{K} \; \text{const.}$$

significativas válidas para todo $h > 0$. Desafortunadamente, no puede establecer que cualquier clase general de MML (12) sea totalmente A_t-estable ni conseguir condiciones suficientes sobre h para que (17) sea válido en términos de las constantes α, L_t solamente; pero con hipótesis adicionales sobre $\mu\left[(-1)^{i+1} A(t)^i\right]$, $i = 2(1)s$, y $\| A(t)^i \|$, $i = 1(1)s$ se pueden obtener condiciones de este tipo.

J.M. CORREAS y colaboradores han estudiado, a partir de 1977, MML con coeficientes variables que responden a la fórmula

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j(\lambda)\, y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j(\lambda) f_{n+j}, \text{ donde } \lambda := vh,\ h > 0, \tag{18}$$

v real, $\alpha_j, \beta_j : [0,T] \to C$ son funciones acotadas continuas en 0^+. La finalidad primordial de las fórmulas (18) estudiadas hasta ahora es tratar numéricamente ciertos tipos de problemas antes mencionados (stiff, oscilatorios) consiguiendo mejor "adaptación" que con los MML clásicos de coeficientes constantes. En particular, se pone el énfasis en el concepto de integración exacta de funciones $\phi_n(t,\lambda)$ tales que $\lim_{\lambda\to 0} \phi_n(t,\lambda) = c_n t^n$ con c_n constantes. Desde luego, integración exacta de ϕ_n $n = 0(1)p$ implica orden p en el sentido habitual. Consistencia equivale a integración exacta de ϕ_0 y ϕ_1, y estabilidad equivale a la siguiente condición de las raices: Las raices ζ_i de $\rho(\zeta) - \gamma h\, \sigma(\zeta) = 0$, donde $\rho(\zeta) := \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \zeta^j$, $\sigma(\zeta) := \sum_{j=0}^{k} \beta_j \zeta^j$, cumplen para algún $\gamma \in C$, $h_* > 0$:

$$\text{(19)}\qquad 1)\quad |\zeta_i| \leq e^{\lambda_i h},\quad h \in [0,h_*],\quad \lambda_i \text{ const.}$$

$$2)\quad |\zeta_i| < 1 \text{ si } \zeta_i \text{ es múltiple.}$$

De este modo, se sigue teniendo el teorema fundamental CONVERGENCIA = CONSISTENCIA+ ESTABILIDAD, obteniendo diversas ventajas con relación a MML de coeficientes constantes. Mencionaremos brevemente algunas conclusiones generales sobre los principales resultados obtenidos: En primer lugar, la clase de fórmulas MML de interés (convergentes) aumenta debido a que la condición (19) es más débil que la condición de las raices de Dahlquist. En segundo lugar, los resultados de Bettis (1970) han sido sistematizados y generalizados, llegando a caracterizar las fórmulas MML (18) mediante sistemas de ecuaciones lineales

$$(20) \qquad \sum_{j=0}^{k} \left[\alpha_j - \gamma_l h\ \beta_j\right] e^{j\gamma_l h} = 0$$

$$\sum_{j=0}^{k} \left[j^{r-1}(\alpha_j-\gamma_l h\ \beta_j) - (r-1) j^{r-2}\ \beta_j\right] e^{j\gamma_l h} = 0, \quad r=2(1)p_l\ , \quad l=1(1)\nu$$

que conducen a un algoritmo computacionalmente más eficiente. También se han caracterizado como problemas de interpolación racional de Hermite o como integración exacta de funciones $t^m\ e^{ut} \cos vt$, $t^m\ e^{ut} \operatorname{sen} vt$, $m = 0(1)p$, u, v reales arbitrarios, lo que ha permitido una interpretación más clara de los efectos de "adaptación" y "modificación" de MML. Finalmente, en relación con las propiedades de estabilidad numérica, hay que señalar el aumento de las regiones de <u>estabilidad absoluta</u> que se consigue con MML (18) para valores adecuados del parámetro λ, así como el <u>efecto de estabilización</u> logrado a través de la condición de las raices (19) ya que a partir de un MML (18) con una región R de estabilidad relativa permite construir explícitamente en MML (18) con una región de estabilidad absoluta que es la transformada de R por una traslación. En la actualidad se sigue trabajando en varias direcciones.

A continuación se incluyen las referencias citadas en el texto, algunas fundamentales y otras que parecen las más significativas dentro de cada línea de trabajo directamente relacionada con las ideas aquí expuestas.

AGUADO, P.M. y CORREAS, J.M. "Un proceso de estabilización en MML con coeficientes variables" 2ª Congr. Ec. Dif. y Aplic., Valldoreix, 1979.

BETTIS, D.G. "Stabilization of Finite Difference Methods of Numerical Integration" Cel. Mech. 2 (1970).

BETTIS, D.G. "Numerical Integration of Products of Fourier and Ordinary Polynomials". Num. Math. 14 (1970).

BICKART, T.A. y RUBIN, W.B. "Composite Multistep Methods and Stiff Stability" en "Stiff Differential Systems" Ed. by R.A. Willoughby, Plenum 1974.

BJUREL, G. "Modified linear multistep methods for a class of stiff ordinary differential equations". BIT 12 (1972) 2, 142-160.

BRUNNER, H. "Stabilization of Optimal Difference Operators" Z. Angew. Math. Phys. v. 18 (1967) 438-444.

CORREAS, J.M. "Convergencia y estabilidad de una clase de métodos lineales de varios pasos con coeficientes variables" Actas IV Jorn. Mat. Hisp.-Lusas, Jaca 1977.

CORREAS, J.M. "Linear Multistep Schemes based on Algebraic-trigonometric-Exponential Polynomials", Fist World Conf. on Math. at the Sev. of Man, Barcelona 1977.

CORREAS, J.M., LISBONA, F.J. y PALACIOS, M.P. "Integración Numérica de Orbitas mediante Métodos Multipasos Lineales de Coeficientes Variables" II Asamb. Nac. Astron. Astrof, Cádiz 1977.

CORREAS, J.M. y LOPEZ DE SILANES, C. "Integración numérica de productos de polinomios algebraicos, trigonométricos y exponenciales" VI Jorn. Mat. Hisp.-Lusas, Santander, 1979.

DAHLQUIST, G.C. "A Special Stability Problem for Linear Multistep Methods" BIT 3 (1963) 27-43.

FATUNLA, S.O. "Numerical Integrators for Stiff and Highly Oscillatory Differential Equations" Dept. Comp. Sci, Univ. of Illinois (1977) Rept. UIUCDCS-77-894.

GAUTSCHI, W. "Numerical Integration of Ordinary Differential Equations based on Trigonometric Polynomials" Numer. Math. 3 (1961) 381-397.

GEAR, C.W. "Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations" Prentice Hall, 1971.

GEAR, C.W. "Initial Value Problems: Practical Theoretical Developments". Conf. Comput. Tech. for ODE, Manchester 1978.

GRAF, O.F. y BETTIS, D.G. "Modified Multirevolution Integration Methods for Satellite Orbit Computation" Cel. Mech. 11 (1975) 433-448.

HALL, G. y WATT, J.M. (Eds.) "Modern Numerical Methods for ODE". Clarendon Press, 1976.

HOUWEN, P.J. van der "Construction of Integration Formulas for Initial Value Problems" North-Holland Publ. Co, 1977.

HULL, T.E. "A Proposal for the Design of Subroutines to Solve Initial Value Problems associated with ODE" Tech. Note (1974).

JANIN, G. "Accurate Computation of Highly Eccentric Satellite Orbits". Cel. Mech. 10 (1974) 451-467.

JELTSCH, R. "Stiff Stability and its Relation to A_o-and A(0) - Stability" SIAM J. Numer. Anal. Vol. 13 No. 1 (1976) 8-17.

LAMBERT, J.D. "Linear Multistep Methods with Mildly Varying Coefficients" Math. Comput. 24 (1970) 81-94.

LAMBERT, J.D. y WATSON, I.A. "Symmetric Multistep Methods for Periodic Initial Value Problems" Univ. of Dundee (1975) Rept. No. 12.

LINIGER, W. y WILLOUGHBY, R.A. "Efficient Integration Methods for Stiff Systems of Ordinary Differential Equations" SIAM J. Numer. Anal. 7 (1970) 1, 47-55.

LYCHE, T. "Chebyshevian Multistep Methods for ODE" Num. Math. 19 (1972) 65-72.

MÄKELÄ, M. "On a Generalized Interpolation Approach to the Numerical Integration of ODE" Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI 503 (1971).

MÄKELÄ, M., NEVANLINNA, O. y SIPILÄ, A.H. "On some Generalized Hermite-Birkhoff Interpolation Problems" Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser AI 563 (1973).

MÄKELÄ, M., NEVANLINNA, O. y SIPILÄ, A.H. "Exponentially Fitted Multistep Methods by Generalized Hermite-Birkhoff Interpolation" BIT 14 (1974) 437-451.

MOORE, P. "Orbitally Stable Multistep Methods" Cel. Mech. 17, 3 (1978) 281-297.

PETZOLD, L.R. "An Efficient Numerical Method for Highly Oscillatory Ordinary Differential Equations" Dept. Comp. Sci., Univ. of Illinois (1978) Rept. UIUCDCS-R-78-933.

SIGURDSSON, S.T. "Multistep Methods with Variable Matrix Ceofficients for Systems of ODE" (Thesis) Chalmers Inst. of Technol., Göteborg, Sweden, Rept. 1973.04.

SIMO, C. "Optimal Design of Modified Multistep Methods for the Numerical Integration of Anharmonic Oscillators" Fist World Conf. on Math. at the Serv. of Man., Barcelona 1977.

STETTER, H.J. "Analysis of Discretization Methods for ODE". Springer 1973.

STIEFEL, E. y BETTIS, D.G. "Stabilization of Cowell's Method Numer. Math. 13 (1969) 154-175.

WIDLUND, O.B. "A Note on Unconditionally Stable Linear Multistep Methods" BIT 7 (1967) 65-70.