

"FLUJOS HAMILTONIANOS PROXIMOS AL FLUJO GEODESICO DE UNA
SUPERFICIE DE REVOLUCION"

J. Solà-Morales

Secció de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Esta comunicación consiste en buena parte en la presentación de resultados que figuran en la Tesina del autor dirigida por C. Perelló y que citamos como referencia (1).

El flujo geodésico de una superficie de revolución es un flujo hamiltoniano del que pueden conocerse muchas propiedades cualitativas por ser totalmente integrable. Nuestro objetivo es conocer cuales de estas propiedades se mantienen en flujos hamiltonianos suficientemente próximos a éste.

Si nos restringimos a las superficies de revolución compactas difeomorfas a T^2 (únicamente por comodidad en ciertas definiciones; los resultados que daremos valen normalmente también para las difeomorfas a S^2 , y éstos son los únicos casos posibles de superficies de revolución compactas y conexas) una superficie de revolución viene dada por una curva $g: S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ (pedimos que g sea una inmersión) que ha cemos girar alrededor del eje X dando lugar a la superficie $M(g)$ dada por $x=g_x(v)$, $y=g_y(v)\cos u$, $z=g_y(v)\sin u$, con $u, v \in S^1$. Si v es un múltiplo de la longitud del arco, concretamente si $\dot{g}_x^2(v) + \dot{g}_y^2(v) = L^2 / (2\pi)^2$ donde L es la longitud de g , el

flujo geodésico de $M(g)$ es el flujo hamiltoniano dado en $T(M)$ por la función de Hamilton $H = (2\pi P_v)^2 / 2L^2 + P_u^2 / 2g_y^2(v)$, donde $P_v = L \dot{v} / (2\pi)^2$ y $P_u = g_y^2(v) \dot{u}$, y la forma $dP_v \wedge dv + dP_u \wedge du$.

El sistema de ecuaciones de Hamilton tiene dos integrales primeras, la energía H y el momento angular P_u , que lo hacen totalmente integrable. A todos los efectos es suficiente el estudio del flujo geodésico restringido a la subvariedad invariante $T_1(M) = H^{-1}(1/2)$ pues en los demás niveles de energía las geodésicas correspondientes son las mismas aunque recorridas a distinta velocidad. La aplicación del Teorema de Liouville-Arnol'd (véase (2)) nos dice que excepto para ciertos valores críticos de la energía y del momento angular las variedades invariantes $I_{c,k} = \{z \in T(M) \mid H(z)=c, P_u(z)=k\}$ son reunión disjunta de toros T^2 . En cada toro el flujo restringido está determinado cualitativamente por su número de rotación ρ .

Un instrumento muy útil para estudiar el flujo en $T_1(M)$ es la aplicación de Poincaré definida en una sección "meridiana" ($u=u_0$) de $T_1(M)$. Esta es superficie de sección del flujo si excluimos un entorno de las líneas $P_u=0$ (se trata del meridiano $u=u_0$ recorrido en los dos sentidos). Llamémosle Σ , considerémosla coordenada por v, P_v , y sea $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$ la aplicación de Poincaré. Es fácil deducir que si $\dot{g}_y(v_0)=0$ entonces $v=v_0, P_v=0$ es un punto fijo de P (correspondiente a la geodésica cerrada que recorre este paralelo) y los valores propios de $DP(v_0,0)$ son $\exp(\pm (2\pi)^2 L^{-1} (\ddot{g}_y(v_0) \cdot g_y(v_0))^{1/2})$. Como se ve $(v_0,0)$ es un punto fijo elíptico si $\ddot{g}_y(v_0) < 0$ (en este caso $g_y(v_0)$ es un máximo relativo, y la geodésica $v=v_0$ es un ecuador exterior) e hiperbólico si $\ddot{g}_y(v_0) > 0$ ($g_y(v_0)$ es un mínimo relativo, y $v=v_0$ es un ecuador interior).

Estudiemos ahora las perturbaciones de este flujo dadas por funciones de Hamilton de la forma $H' = H + H_1$, donde H es la definida anteriormente. El hamiltoniano H' no poseerá en general, claro está, la propiedad de que el flujo sea equivalente en todas las variedades $H' = \text{constante}$ (como ocurre con H), por tanto para fijar nuestra atención en una región concreta nos fijaremos en el flujo en $H' = 1/2$ (como hacíamos con H). Se cumple el siguiente

Lema 1: Sea K un entorno compacto de $T_1(M)$ dentro de $T(M)$ del tipo $K = \{z \in T(M) \mid H(z) \in [1/2 - k, 1/2 + k]\}$ con $0 < k < 1/2$. Entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que si $H_1: T(M) \rightarrow \mathbb{R}$ cumple $\|H_1\|_n^K < \epsilon$ (ha de ser $H_1 \in \mathcal{C}^n(T(M))$) entonces el nuevo hamiltoniano H' tiene una componente conexa de $H' = 1/2$ contenida en K y difeomorfa a $T_1(M)$. Además, imaginando el flujo en esta variedad definido en $T_1(M)$ la superficie Σ definida anteriormente sigue siendo superficie de sección y la aplicación de Poincaré asociada P' (que sigue conservando área) se mantiene próxima a P en norma de $\mathcal{C}^{n-1}(\Sigma)$, todo ello si ϵ es suficientemente pequeño.

Este lema nos permite unificar los campos de definición de los flujos perturbados y reducir los problemas a problemas de perturbación para la aplicación de Poincaré P . Vamos a abordar la cuestión de la supervivencia de los puntos fijos de P (ecuadores).

a) Conservación de ecuadores.

Se cumple el siguiente

Lema 2: Sea P una aplicación diferenciable de un abierto de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 y sea x_0 un punto fijo por P de manera que

$DP(x_0)$ no tenga el valor propio 1. Entonces si P' es lo suficientemente próxima a P en norma \mathcal{B}^0 de un entorno cerrado de x_0 , P' tiene un punto fijo x_1 cerca de x_0 .

Y se llega al siguiente resultado:

Proposición 1: Si $\|H_1\|_2$ es lo bastante pequeña se conserva un número finito de ecuadores (exteriores e interiores) como puntos fijos (resp. elípticos e hiperbólicos) de P mientras éstos cumplan que $2\pi(\dot{g}_y(v_0) \cdot g_y(v_0))^{1/2}/L$ sea distinto de 0 y de $i/2$.

b) Estabilidad de los ecuadores exteriores.

El problema que nos planteamos a continuación es el de la estabilidad orbital de los ecuadores exteriores del flujo perturbado (puntos fijos elípticos de P'). Para resolverlo haremos uso del Teorema del Twist (véase (2)).

La aplicación P (no perturbada) en las proximidades de un ecuador exterior puede escribirse en coordenadas "polares" I, α (donde I depende sólo de P_u) como $P(I, \alpha) = (I, \alpha + 2\pi/\rho(I))$, donde ρ es el número de rotación del flujo en el toro invariante correspondiente. Por lo tanto puede ponerse fácilmente en forma normal de Birkhoff

$$P(I, \alpha) = (I, \alpha + a_0 + a_1 I + O(I^2))$$

donde

$$a_0 = (2\pi)^2 (-\dot{g}_y(v_0) \cdot g_y(v_0))^{1/2}/L$$

$$a_1 = \frac{-\pi^2 \cdot (-\ddot{g}_y^3(v_0) + g_y(v_0) \ddot{g}_y(v_0) \ddot{g}'_y(v_0) - (5/3) g_y(v_0) \ddot{g}_y^2(v_0))}{L \cdot \dot{g}_y^2(v_0)}$$

Y aplicando el Teorema del Twist obtenemos el siguiente

Teorema 1: Si $M(g)$ tiene un ecuador exterior en $v=v_0$, si $H_1 \in \mathcal{P}^6(T(M))$, $\|H_1\|_4^K < \varepsilon$, para cierto $\varepsilon > 0$ lo bastante pequeño, si $a_1 \neq 0$ y $\lambda = \exp(ia_0)$ es tal que $\lambda^3 \neq 1$ y $\lambda^4 \neq 1$, entonces el flujo correspondiente a $H' = H + H_1$ tiene en $H' = 1/2$ una trayectoria periódica orbitalmente estable que se cierra "a la primera vuelta" y tan próxima como queramos al ecuador $v=v_0$ si ε es suficientemente pequeño.

c) Conservación de meridianos.

Como es sabido, en una superficie de revolución todos los meridianos son geodésicas. Si nos los miramos como puntos fijos de cierta aplicación de Poincaré definida en una superficie de sección adecuada no es difícil demostrar que algunos de ellos, al menos dos de ellos, se conservan en pequeñas perturbaciones del flujo geodésico.

Se cumple el siguiente

Teorema 2: Si la perturbación H_1 cumple $H_1 \in \mathcal{P}^6(T(M))$, $\|H_1\|_4^K < \varepsilon$ entonces se conservan por lo menos dos meridianos de $M(g)$ como trayectorias del flujo dado por $H' = H + H_1$.

(Naturalmente, no se trata de dos meridianos estrictos de $M(g)$ sino de dos curvas cerradas homotopas a éstos y próximas a dos meridianos propiamente dichos).

Demostración: Tomemos en $T_1(M)$ la superficie Δ definida como $v=v_0$ (sección a lo largo del paralelo v_0) como superficie de sección coordinada por u y P_u . Δ es superficie de sección en un entorno de las líneas $P_u=0$. Estas corresponden a los paralelos y son por tanto líneas de puntos fijos por la aplicación de Poincaré asociada al flujo geodésico. Estas líneas son circunferencias rodeadas de circunferencias invariantes.

En las coordenadas u, P_u la aplicación de Poincaré se expresa como $P(u, P_u) = (u + 2\pi\rho(P_u), P_u)$, es decir un Twist no perturbado. Se cumple que ρ cambia de signo con P_u , y cambia efectivamente pues

$$\rho'(0) = \frac{L}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{+}{-} g_Y^{-2}(v) dv$$

donde los signos $\frac{+}{-}$ corresponden al signo de P_v .

Por tanto si la perturbación es lo bastante pequeña se cumplen las condiciones del Teorema del Twist y se conservan curvas invariantes a un lado y otro de $P_u = 0$. Tomando una curva a cada lado se obtiene una corona invariante por P en que sus curvas límite giran por P cada una en sentido opuesto. Por lo tanto puede aplicarse el llamado último Teorema Geométrico de Poincaré y existen por lo menos dos puntos fijos por P en el interior de la corona.

d) Orbitas homoclinicas.

Una característica importante de los ecuadores interiores no perturbados es la existencia de órbitas homoclinicas: sus variedades estable e inestable coinciden globalmente excepto en casos degenerados, y por tanto existen geodésicas que se "desenrollan" del ecuador interior para luego volver a enrollarse en él. Se cumple el siguiente

Teorema 3: Si la perturbación H_1 es suficientemente pequeña, cada ecuador interior que se conserva, con las salvedades que aparecerán en la demostración, tiene por lo menos una órbita homoclinica.

Demostración: Se trata de repetir un razonamiento de Poincaré para la existencia de puntos homoclinicos en aplicaciones que preservan área.

Tomamos la aplicación de Poincaré del flujo no perturbado P y la del perturbado P' en la superficie de sección Σ definida anteriormente. Puesto que P' es próxima a P , si la situación fuera la representada en la fig. 1 (sin puntos homoclinicos) las imágenes por P' de los puntos enmarcados en el recuadro pequeño estarían todas desplazadas hacia la derecha, como ocurre con P , y se daría la situación representada en la fig. 2 en la que P' aplica la zona rayada de la izquierda en la de la derecha, contradiciendo el hecho de que P' conserva área.

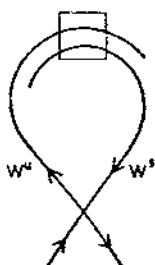


FIG. 1

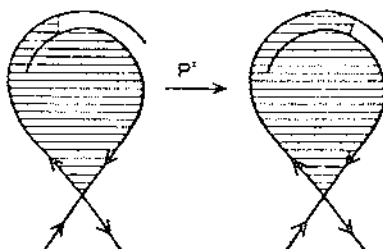


FIG. 2

Esto es cierto si el ecuador interior corresponde a un mínimo relativo de g_y que no es mínimo absoluto. Si nos referimos al mínimo absoluto entonces la situación es la de la fig. 3: las variedades asintóticas de la órbita periódica W^1 y W^2 no separan ningún conjunto invariante de $\Sigma-T^2$ cada una de ellas por separado, y no vale el razonamiento anterior.

Para que valga un razonamiento análogo hay que demostrar primero la conservación de alguna de las curvas cerradas invariantes a la izquierda de W^1 (o a la derecha de W^2). Esto puede hacerse siempre prolongando por el flujo hasta Σ las halladas en Δ cerca de los meridianos en la demostración del Teorema 2.

Para una superficie de revolución generada por una curva como la de la fig. 4 el ecuador interior $v=v_1$ no tiene geodésicas homoclínicas y no valen los razonamientos anteriores. En este caso típicamente no genérico las variedades estables (resp. inestables) de $v=v_1$ coinciden con variedades inestables (resp. estables) de v_0 y v_2 . En esta situación hay órbitas hetroclínicas entre $v=v_0$ y $v=v_1$ y entre $v=v_1$ y $v=v_2$, y puede verse por razonamientos parecidos a los anteriores que algunas de ellas subsisten al modificar el flujo ligeramente.

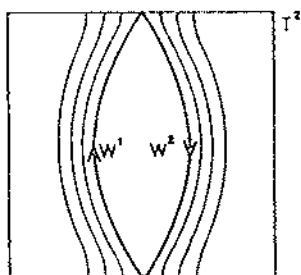


FIG. 3

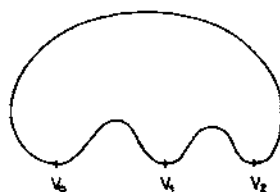


FIG. 4

Con la salvedad, pues, de los casos de superficies de revolución generadas por curvas como la de la fig. 4 en que el mínimo absoluto de ordenadas es alcanzado por más de dos puntos, se cumple la conclusión del Teorema.

REFERENCIAS

- (1) Solà-Morales, J.: "Flux Geodèsic en Superfícies de Revolució", Pub. Mat. UAB nº 9 (1978).
- (2) Arnol'd, V.I. et A. Avez: "Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique"; Gauthier-Villars, 1967.