

ESTUDIO CUALITATIVO DEL PROBLEMA DE SITNIKOV

Jaume Llibre* y Carles Simó**

Abstract. - The Sitnikov problem offers a rich variety of motions when the full phase space is studied. Besides classical results due to Alekseev and Moser a careful description of final evolutions is presented. To achieve this result we take into account the successive intersections of the invariant manifolds of the infinity with the plane of the primaries.

§1. Las ecuaciones del movimiento. - Sean m_1 y m_2 dos masas puntuales e iguales moviéndose según la ley de la gravitación de Newton en órbitas elípticas con su centro de masas (c.d.m.) en reposo. Consideramos una tercera masa puntual e infinitesimal, m_3 , moviéndose sobre la recta R perpendicular al plano Π determinado por las trayectorias de los dos primeros cuerpos pasando por su c.d.m. (fig. 1). El movimiento de las dos primeras masas no está afectado por la tercera y, debido a la simetría, el tercer cuerpo permanece sobre R . El problema de Sitnikov [9] consiste en describir las órbitas del cuerpo de masa infinitesimal y es un caso particular del problema restringido de tres cuerpos.

Como es usual llamaremos primarios a los cuerpos cuya masa no es infinitesimal.

Normalizamos las unidades de tiempo, masa y longitud de manera que el período de los primarios sea 2π , la masa total sea 1, esto es, $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$ y la constante de la gravitación valga 1. Sea q la coordenada que nos da la posición de m_3 sobre la recta R , habiendo toma-

* Facultat de Ciències, Universitat Autònoma de Barcelona.

** Facultat de Matemàtiques i Laboratori de Càlcul, Universitat de Barcelona.

do el origen, $q = 0$, en el c.d.m.. Las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p, \\ \dot{p} &= -q/(q^2 + r^2(t))^{3/2}, \end{aligned} \quad (1),$$

donde $r(t) = r(t+2\pi) > 0$ es la distancia de uno de los primarios al c.d.m.

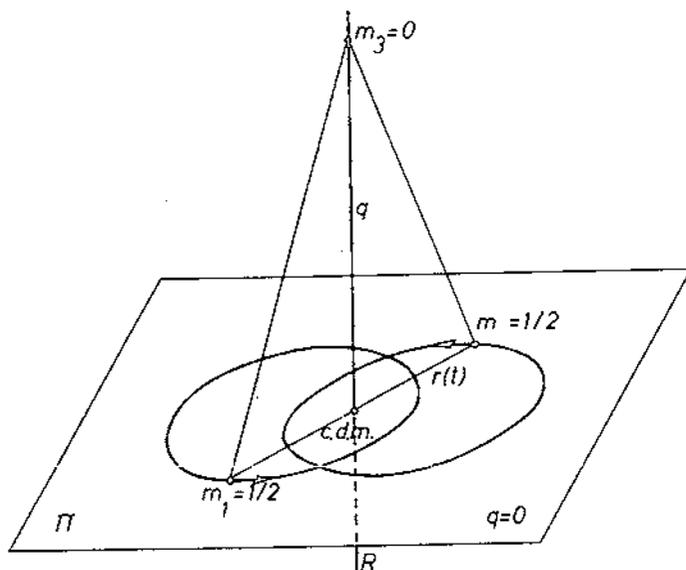


Fig. 1. El problema de Sitnikov para excentricidades $e > 0$.

Si e es la excentricidad de las órbitas elípticas descritas por m_1 y m_2 , tenemos que

$$r(t) = \frac{1}{2} (1 - e \cos t) + O(e^2),$$

en el entorno de $e = 0$.

Si la excentricidad e es igual a cero (fig. 2), el sistema diferencial (1) es conservativo, esto es, posee la integral de la energía

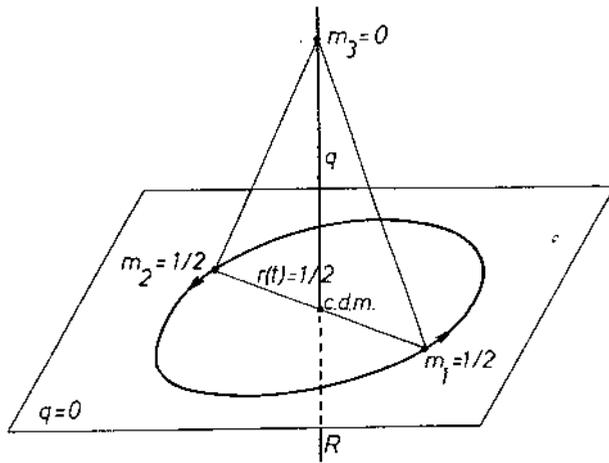


Fig. 2. El movimiento de Sitnikov para la excentricidad $e = 0$.

$$\frac{1}{2} p^2 - (q^2 + \frac{1}{4})^{-1/2} = c \quad (2),$$

donde $c \geq 2$. El estudio del espacio de fases (q, p) se muestra en la fig. 3. El origen O es un centro (punto de equilibrio estable, $c = -2$). Hay tres clases de soluciones, las del tipo A (oscilaciones u órbitas elípticas, $-2 < c < 0$), las separatrices B u órbitas parabólicas (que llegan al infinito con velocidad cero, $c = 0$), y las soluciones C formadas por las órbitas hiperbólicas (que llegan al infinito con velocidad positiva, $c > 0$).

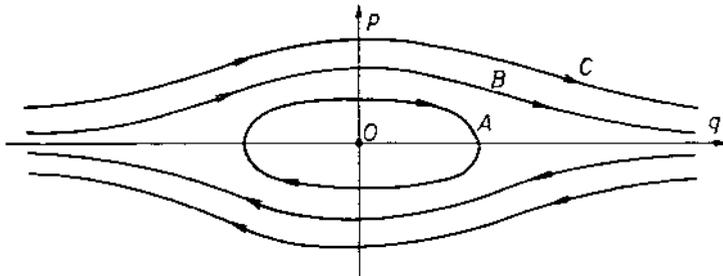


Fig. 3. Órbitas en el caso $e = 0$.

Si la excentricidad e es positiva, el sistema (1) contiene el tiempo explícitamente. Por lo tanto, hemos de estudiar las órbitas de un campo vectorial en el espacio tridimensional q, p, t . Realmente, incluso cuando la excentricidad es cero, para describir completamente el movimiento de Sitnikov, hemos de considerar las órbitas en el espacio q, p, t . Así podemos tener en cuenta no sólo la posición de m_3 respecto del plano $q=0$, sino también respecto de m_1 y m_2 . Para estudiar las órbitas en el espacio q, p, t utilizaremos la aplicación de Poincaré. Parte de la exposición que sigue ha sido tomada de [8].

§ 2. La aplicación de Poincaré T_p .- Es clásica la reducción del estudio de un sistema dinámico en un espacio de dimensión 3, al estudio de una transformación puntual T del plano utilizando una superficie de sección Σ . La aplicación T se construye de la manera siguiente: cada punto $x \in \Sigma$ se aplica en el siguiente punto de intersección, Tx , de la curva γ , solución del sistema dinámico que pasa por x , con la superficie Σ (fig. 4), suponiendo que dicha intersección exista.

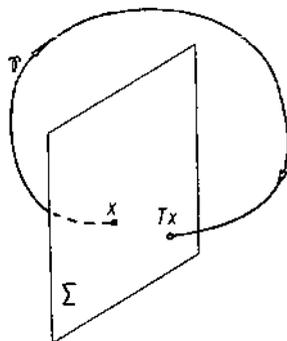


Fig. 4. La aplicación de Poincaré.

Las propiedades esenciales del sistema diferencial quedan representadas por la transformación T de una manera más clara y condensada. Una órbita periódica se convierte en un punto invariante por T o por una potencia de T . Una órbita quasi-periódica recorriendo un toro en el espacio de fases, se traduce por una sucesión de puntos recorriendo una curva de la superficie de sección con número de rotación irracional. La estabilidad de una órbita puede estudiarse mediante el análisis del com

portamiento de los iterados por T del punto de la superficie de sección que determina la órbita, etc.

Teniendo en cuenta la periodicidad respecto de t en las ecuaciones (1), podemos identificar las superficies $t = 0$ y $t = 2\pi$, y considerar el sistema diferencial (1) en el espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1$ con las coordenadas $(q, p, t \pmod{2\pi})$. En este espacio identificamos la órbita \bar{S} correspondiente al punto de equilibrio $q = 0, p = 0$ a un punto O . Puesto que el sistema diferencial es invariante por la simetría $q \rightarrow -q$, no necesitamos distinguir entre los valores positivos y negativos de q . Identificamos $(-q, p, t)$ con (q, p, t) , y por tanto los puntos $(q = 0, -p, t)$ con los puntos $(q = 0, p, t)$. Sea E el espacio resultante, y sea T_e la aplicación de Poincaré de la superficie de sección

$$\Sigma = \{(q, p, t) \in E \mid q = 0\},$$

para la excentricidad e . Esto es, dado un punto (p_0, t_0) de Σ y por lo tanto la órbita $q(t)$ del tercer cuerpo tal que $q(t_0) = 0$ y $p(t_0) = p_0$, sea t_1 el siguiente cero de $q(t)$ con $t_1 > t_0$, si existe. La aplicación T_e se define mediante $T_e(p_0, t_0) = (p_1, t_1)$ siendo $p_1 = p(t_1)$. Nótese que Σ es un plano donde p_0, t_0 son coordenadas polares.

§ 3. El caso integrable, $e = 0$. - Para describir la aplicación $T = T_e$ para $e = 0$ observemos de (2) que $p_1 = p_0$ para $p_0 < 2$, y que el tiempo de regreso a Σ , $t_1 - t_0 = \tau(p_0)$ es una función de p_0 independiente de t_0 . Además cuando $p_0 \rightarrow 2$ el tiempo $\tau(p_0) \rightarrow \infty$.

La aplicación T tiene la forma

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0, \\ t_1 &= t_0 + \tau(p_0) \pmod{2\pi}, \end{aligned} \tag{3}$$

de manera que la circunferencia Γ_{p_0} ($p_0 = \text{constante} < 2$) es invariante por T . La coordenada $t_0 \pmod{2\pi}$ es la coordenada angular sobre Γ_{p_0} y la aplicación T restringida a la circunferencia Γ_{p_0} es un giro de ángulo $\tau(p_0)$. Es claro que el dominio de definición de T, D_1 , es el disco abierto de radio 2.

Lema 1. - Para $e = 0$, la función $\tau(p_0)$ es estrictamente creciente en $0 < p_0 < 2$ (Fig. 5).

Demostración: Usando (2) el período puede expresarse como

$$\tau = 4 \int_0^{q_{\max}} dq / \sqrt{\frac{2}{\sqrt{q^2 + 1/4}} - \frac{2}{\sqrt{q_{\max}^2 + 1/4}}}$$

que con el cambio $\alpha = \text{arctg}(2q)$ se convierte en

$$\tau = \int_0^{\alpha_{\max}} \frac{\sec^2 \alpha \, d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_{\max}}}$$

Debemos ver que τ es una función creciente de α_{\max} , es decir,

$$\tau(\alpha_{\max,1}) < \tau(\alpha_{\max,2}) \text{ si } \alpha_{\max,1} < \alpha_{\max,2}.$$

Sean f_1, f_2, g funciones positivas estrictamente crecientes en $[0, a_1], [0, a_2]$ y $[0, a_3]$, respectivamente, con $0 < a_1 < a_2 < a_3$.

Si $f_1 > f_2$ en $[0, a_1]$ y $\int_0^{a_1} f_1 < \int_0^{a_2} f_2$ afirmamos que

$$\int_0^{a_1} f_1 \cdot g < \int_0^{a_2} f_2 \cdot g.$$

En efecto, dado $x < a_1$, sea $y \in (x, a_2)$ tal que $\int_0^x f_1 = \int_0^y f_2$. Definimos $h_i(z) = \int_0^z f_i$, $z \in [0, a_i]$, $i = 1, 2$, y por tanto $h_1(x) = h_2(y)$.

Luego $\int_0^{b_1} g(x) dh_1(x) < \int_0^{b_2} g(y) dh_2(y)$ si $h_1(b_1) = h_2(b_2)$, de donde se obtiene nuestro aserto.

Tomando $a_i = \alpha_{\max,i}$, $f_i = (\cos \alpha - \cos \alpha_{\max,i})^{-1/2}$, $i = 1, 2$, y $g = \sec^2$, se tiene el lema 1 teniendo en cuenta que dicho lema es cierto para el péndulo.

Si $q_{\max} \rightarrow 0$ se tiene que $\tau \rightarrow \pi/\sqrt{2}$.

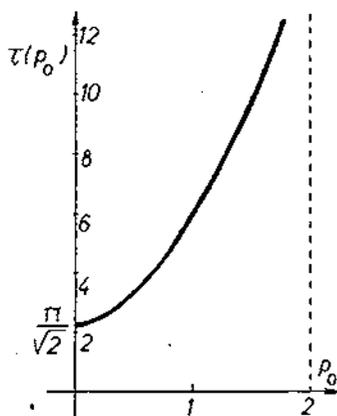


Fig. 5

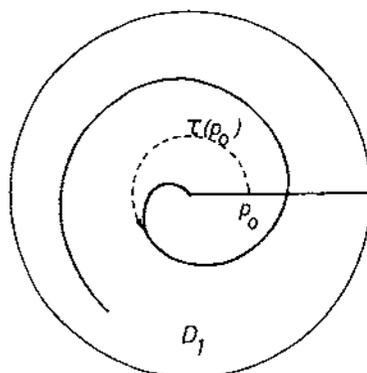


Fig. 6

Del lema 1 y teniendo en cuenta que $\tau(p_0) \rightarrow +\infty$ cuando $p_0 \rightarrow 2$, resulta que la imagen de cualquier radio de D_1 es una curva que espirala infinitas veces alrededor del origen aproximándose a la frontera $p_0 = 2$ (fig. 6). Por consiguiente, la aplicación T es una aplicación "twist" (véase [8]).

Es claro a partir del lema 1 que hay curvas Γ_{p_0} que giran un ángulo $\tau(p_0)$ tal que $\tau(p_0)/2\pi$ es racional. El ángulo $\tau(p_0)/2\pi$ es el número de rotación de la curva invariante Γ_{p_0} por la aplicación T . Consideremos las iteraciones de la aplicación T . Para un punto inicial $x = (p_0, t_0)$ perteneciente a una curva Γ_{p_0} con un número de rotación racional igual a P/Q (P y Q primos entre sí), se tiene que x es un punto periódico de T de período Q . El número P mide las vueltas enteras que se dan alrededor del punto fijo central 0 cuando se recorren los puntos $x, Tx, T^2x, \dots, T^Qx = x$. (Fig. 7).

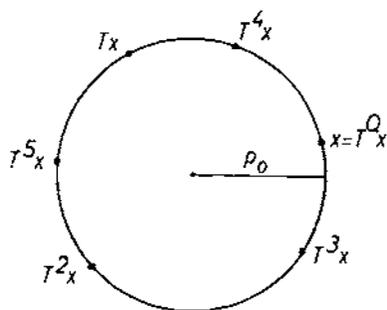


Fig. 7

Si el número de rotación de Γ_{p_0} es irracional, para cualquier punto $x \in \Gamma_{p_0}$ los puntos $T^n x$ forman un conjunto denso en Γ_{p_0} (véase [2], apéndice I). En resumen, las curvas invariantes Γ_{p_0} están formadas por puntos periódicos o quasi-periódicos según que el número de rotación de Γ_{p_0} sea racional o irracional. Como se observa en [2], p. 79, en todos los problemas integrables de la mecánica clásica, se encuentra que - las órbitas acotadas son periódicas o quasi-periódicas, esto es, la órbita genérica es densa sobre un toro invariante sumergido en el espacio de fases.

Observemos que el origen O es estable, esto es, si $x = (p_0, t_0)$ es tal que p_0 es suficientemente pequeño, entonces $T^n x$ permanece pequeño para todo n .

Vamos a reconstruir el flujo en el espacio de fases $F = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1$ a partir de la aplicación de Poincaré T . En virtud de la fig. 3 podemos pensar en el espacio de fases F foliado de la siguiente manera: el punto de equilibrio O da lugar a una circunferencia γ en F . Las órbitas acotadas del tipo A se mueven sobre toros, encajonados los unos dentro de los otros envolviendo a la circunferencia γ (fig. 8). Las órbitas parabólicas dan lugar a dos cilindros que constituyen la frontera topológica de los toros encajonados. Podemos pensar en estos dos cilindros como - el resultado de quitar dos circunferencias C_1 y C_2 de un toro, tal como se indica en la fig. 8. (Las circunferencias C_1 y C_2 se corresponden con los dos infinitos de q). A su vez cada cilindro de órbitas parabólicas está envuelto por toda una familia de cilindros, cada uno de ellos recorrido por órbitas hiperbólicas. Es claro que las órbitas parabólicas o hiperbólicas recorren sus respectivos cilindros en la forma indicada en la fig. 9. La espiral correspondiente a una órbita parabólica o hiperbólica da infinitas vueltas al acercarse a la frontera del cilindro.

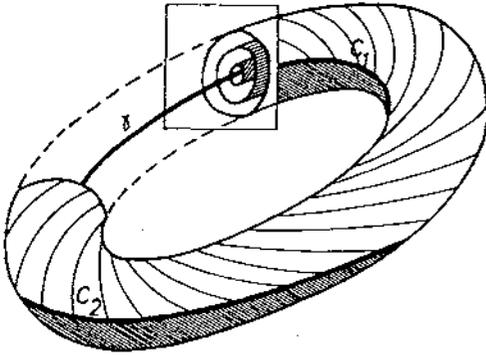


Fig. 8

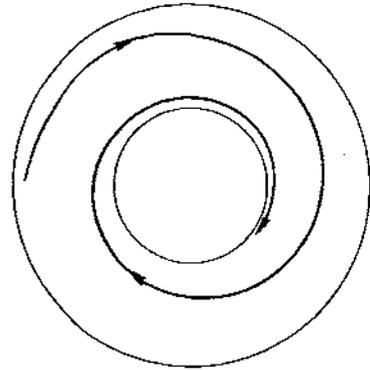


Fig. 9 Ejemplo de una órbita parabólica o hiperbólica en el espacio de fases F .

Veamos cómo las órbitas acotadas o elípticas recorren sus respectivos toros. Del estudio realizado para la aplicación de Poincaré, se deduce que si el número de rotación de la órbita es irracional, ésta es densa en el toro que la contiene, esto es, se trata de una órbita quasi-periódica. Si el número de rotación es racional igual a P/Q (P y Q primos entre sí), la órbita es periódica. Teniendo en cuenta las identificaciones que hemos hecho en el espacio de fases F para obtener el espacio E , donde hemos estudiado la imagen por T de la superficie de sección Σ , resulta que si Q es par (impar) la órbita antes de cerrar da $Q/2$ (Q) vueltas en latitud y P ($2P$) vueltas en longitud (fig. 10).

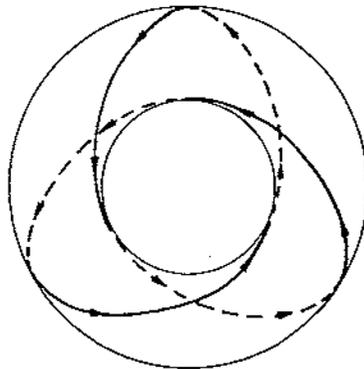


Fig. 10 Ejemplo de una órbita acotada periódica con número de rotación igual a $1/3$ en el espacio de fases F .

§ 4. El caso no integrable, $e > 0$. - En el estudio del movimiento de Sitnikov hecho por Moser [8], p.87, se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1 (Moser). - a) Existe una curva real, analítica, simple y cerrada en Σ en cuyo interior D_1 , la aplicación T_e está definida. Además, si (p_0, t_0) está fuera de D_1 la solución correspondiente para m_3 es de escape. La órbita es parabólica si $(p_0, t_0) \in \partial D_1$ e hiperbólica si $(p_0, t_0) \notin \bar{D}_1$.

b) Sea S la simetría definida sobre Σ mediante $(p_0, t_0) \rightarrow (p_0, -t_0)$. Si $D_{-1} = T_e(D_1)$ se tiene que $D_{-1} = S(D_1)$. Además T_e preserva el elemento de área $p_0 \wedge dt_0$ y $T_e^{-1} = S^{-1} \circ T_e \circ S$.

c) Si la excentricidad $e > 0$ es suficientemente pequeña entonces $D_1 \neq D_{-1}$, y las curvas fronteras $\partial D_1, \partial D_{-1}$ se cortan no tangencialmente en 2 puntos dados por $t_0 = 0$ y $t_0 = \pi$ (fig. 11).

d) Sea $\gamma = \{(p_0, t_0) \mid p_0 = p_0(s), t_0 = t_0(s) \text{ con } 0 \leq s \leq 1\}$ un arco de clase C^1 tal que γ tiene el extremo correspondiente a $s=0$ sobre ∂D_1 y en este extremo las curvas γ y ∂D_1 no son tangentes. Entonces la curva imagen $f(\gamma) = \{(p_1, t_1) \mid p_1 = p_1(s), t_1 = t_1(s) \text{ con } 0 \leq s \leq 1\}$ se acerca a ∂D_{-1} espiralando, es decir, $t_1(s) \rightarrow +\infty$ cuando $s \rightarrow 0$ (fig. 12).

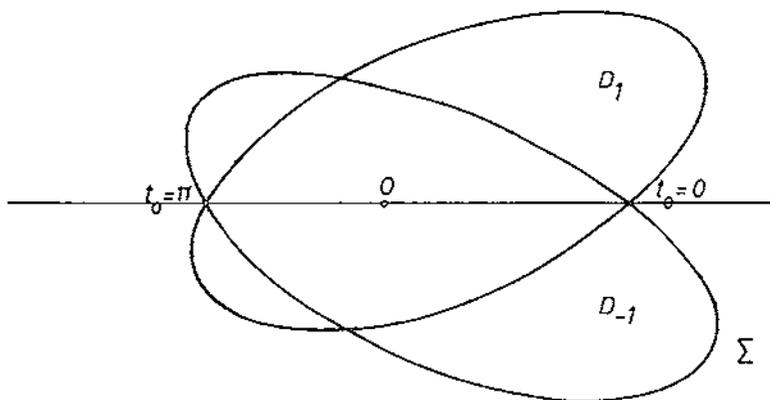


Fig. 11

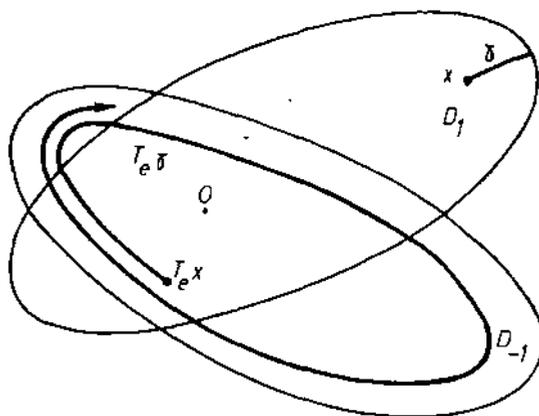


Fig. 12

Si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeña, la aplicación T_ϵ es próxima a la aplicación T del caso integrable. Se tiene que T_ϵ conserva el área y el origen O pero no conserva ni la energía ni las curvas Γ_{p_0} .

El estudio del comportamiento de las iteraciones T_ϵ^n , para $-\infty < n < +\infty$ y $\epsilon \ll 1$, es el punto esencial de la teoría de la estabilidad. El resultado principal de esta teoría es el teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser, que para el movimiento de Sitnikov permite probar:

Teorema 2. - La aplicación T_ϵ , para ϵ suficientemente pequeña, tiene curvas analíticas invariantes Γ_ϵ (próximas a las curvas Γ invariantes por T), de manera que para cualquier $x \in \Gamma_\epsilon$, los puntos $T^n x$ forman un conjunto denso sobre la curva Γ_ϵ .

Además para ϵ suficientemente pequeña, el conjunto de los puntos de D_1 no contenidos en ninguna de las curvas Γ_ϵ tiene medida de Lebesgue arbitrariamente pequeña, y el conjunto de los puntos de D_1 no contenido en la adherencia de los puntos periódicos de T_ϵ también tiene medida de Lebesgue arbitrariamente pequeña.

Demostración: Sea $C = \{(p_0, t_0) \mid a \leq p_0 \leq b\}$, con $0 < a < b < 2$, una corona de Σ y $M_0: C \rightarrow C$ la aplicación definida por

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 \\ t_1 &= t_0 + \tau(p_0) \quad (\text{mód. } 2\pi), \end{aligned}$$

esto es, M_0 es la restricción de T a C . Es claro que M_0 conserva el

área, deja invariantes a las circunferencias, $p_0 = c$ con $a < c < b$, y por el lema 1, que

$$\frac{d\tau}{dp_0}(p_0) > \nu = \frac{d\tau}{dp_0}(a) > 0,$$

para $a < p_0 < b$.

Sea $M_e: C \rightarrow \Sigma$ la restricción de T_e a C , con e suficientemente pequeña de manera que $C \subset D_1$. Entonces M_e conserva el área y viene dada por

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + e f(p_0, t_0, e), \\ t_1 &= t_0 + \tau(p_0) + e g(p_0, t_0, e) \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

siendo f y g funciones reales analíticas y 2π -periódicas en t_0 .

Para una función $h \in C^1(C)$ definimos su norma

$$\|h\|_1 = \sup_{m+n \leq 1} \left| \frac{\partial^{m+n} h}{\partial p_0^m \partial t_0^n} \right|.$$

Tomamos $l = 5$ y por el teorema de Moser-Rüssman ([8], p. 52), existe un $\delta > 0$ dependiendo de $\epsilon, l, \tau(p_0)$ y e tal que si M_e satisface

$$e(\|f\|_1 + \|g\|_e) < \nu\delta,$$

entonces M_e tiene una curva invariante de la forma

$$\begin{aligned} p_0 &= c + u(\xi), \\ t_0 &= \xi + v(\xi), \end{aligned}$$

en C , donde u, v son diferenciables con continuidad, de período 2π y satisfacen

$$\|u\|_1 + \|v\|_1 < \epsilon,$$

y c es una constante con $a < c < b$. Además la restricción de M_e a esta curva viene dada por

$$\xi \rightarrow \xi + \omega,$$

donde ω es incommensurable con 2π y satisface las desigualdades

$$\left| \frac{\omega}{2\pi} - \frac{p}{q} \right| > r|q|^{-s},$$

para todos los enteros p, q y constantes r, s positivas. De hecho ca-

da elección de ω en $\tau((a,b))$ que satisfaga las desigualdades anteriores da lugar a una de tales curvas invariantes si ϵ es suficientemente pequeña.

El teorema de Moser prueba la existencia de un número infinito de curvas invariantes. Se puede demostrar que el conjunto de tales curvas omite sólo un conjunto de medida de Lebesgue arbitrariamente pequeño en C , si δ (y por consiguiente ϵ) es suficientemente pequeño. Además, utilizando el teorema de Poincaré-Birkhoff se obtiene que la adherencia de los puntos periódicos es un conjunto que contiene a las curvas invariantes de C , siempre para valores de ϵ suficientemente pequeños. Para más detalles véase [8], p. 54. //

El teorema 2 permite decir, en cierto modo, que para valores de ϵ suficientemente pequeños las curvas Γ invariantes por T con número de rotación irracional no desaparecen pero se deforman un poco. Además, las órbitas correspondientes a condiciones iniciales que no pertenecen a las curvas Γ_ϵ , pero que están encerradas entre dos de estas curvas, son estables. En efecto, al igual que las curvas Γ invariantes por T , las curvas Γ_ϵ invariantes por T_ϵ dan lugar a toros invariantes por el flujo del sistema (1) en el espacio de fases F (fig. 8). Por consiguiente, una órbita solución de (1) que tenga algún punto situado entre dos toros invariantes, no podrá jamás abandonar la región comprendida entre ambos.

§ 5. Los puntos fijos, los movimientos periódicos y las zonas de inestabilidad. - Para comprender mejor la estructura de las zonas situadas entre las curvas Γ_ϵ , consideramos los puntos fijos de la aplicación T_ϵ y de sus iteraciones. Estos puntos se corresponden con los movimientos periódicos del cuerpo de masa infinitesimal.

Estudiemos los puntos fijos por T_ϵ^Q . Sea Γ_{p_0} la curva invariante por T formada por los puntos fijos de T^Q , esto es, $\tau(p_0) = 2\pi P/Q$ (P y Q primos entre sí). Es natural esperar que después de una perturbación $(T - T_\epsilon)$ T_ϵ^Q deje de tener una curva de puntos invariantes. No obstante, debido a que $\frac{d\tau}{dp_0} > 0$, resultados de Birkhoff (véase [2], p. 74) permiten afirmar que, para valores de ϵ suficientemente pequeños, la aplicación T_ϵ^Q tiene $2kQ$ puntos fijos en el entorno de la curva Γ_{p_0} , siendo la mitad de ellos elípticos y la otra mitad hiperbólicos, o bien la mitad hiperbólicos y la otra mitad hiperbólicos con reflexión.

Para $e = 0$ todos los puntos fijos son parabólicos con parte lineal no diagonal. Esto nos dice que para valores de e suficientemente pequeños los valores propios de los puntos fijos de T_e^Q son próximos a 1, y por lo tanto T_e^Q no puede tener puntos fijos que sean del tipo hiperbólico con reflexión. En resumen, se tiene:

Teorema 3.- Sea Γ una curva invariante por T formada por puntos fijos de T_e^Q ; si e es suficientemente pequeña, la aplicación T_e^Q tiene $2kQ$ puntos fijos en el entorno de la curva Γ , siendo la mitad de ellos elípticos y la otra mitad hiperbólicos, y k un entero positivo.

Estudiemos ahora el entorno de los puntos elípticos e hiperbólicos dados por el teorema anterior. Sea a un punto fijo elíptico de T_e^Q , esto es, $DT_e^Q(a)$ tiene por valores propios λ y $\bar{\lambda}$ con $|\lambda| = 1$ y $\lambda \neq \pm 1$. A menos de una traslación y una aplicación lineal podemos suponer que el punto fijo está en el origen y que la aplicación T_e^Q tiene la forma

$$z \rightarrow z_1 = \lambda z + g(z, \bar{z}) \quad (4),$$

donde $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$ están en el plano complejo y g se anula con su primera derivada en $z = 0$. Si λ no es una raíz cúbica ni cuarta de la unidad, podemos hacer un cambio real y analítico que nos pase de las coordenadas (x, y) a las coordenadas (ξ, η) de manera que la forma normal de Birkhoff de la aplicación (4) sea

$$\zeta \rightarrow \zeta_1 = \lambda \zeta e^{i\alpha|\zeta|^2} + h(\zeta, \bar{\zeta}) \quad (5),$$

donde $\zeta = \xi+i\eta$ y h se anula, con sus tres primeras derivadas, en $\zeta = \bar{\zeta} = 0$. Si $\alpha \neq 0$ la aplicación (5) es un "twist" perturbado en un entorno suficientemente pequeño del origen. Por consiguiente, existen curvas cerradas invariantes alrededor del origen, y el punto elíptico es estable (véase [8], p. 54).

En resumen, cada punto fijo elíptico estable de T_e^Q está rodeado de curvas cerradas invariantes por T_e^Q y estas curvas forman unas "islas" (véase la fig. 13, reproducida de [2], p. 77). Cada isla repite en miniatura toda la estructura, con sus curvas invariantes, sus islas entre estas curvas, etc.

Entre las islas y las curvas T_e^Q quedan aún unas zonas de carácter inestable ligadas a los puntos fijos hiperbólicos de T_e^Q . Zehnder

[10] ha demostrado que, genéricamente, las variedades invariantes estable e inestable de estos puntos hiperbólicos se cortan transversalmente, dando lugar a puntos homoclinicos transversales como muestra la fig. 13.



Fig. 13

Sea D el conjunto de todos los difeomorfismos reales analíticos que conservan el área y que tienen el origen como punto fijo elíptico. Se dota a D de una topología definida por la topología de las aplicaciones lineales simplécticas y por medio de los coeficientes del desarrollo de Taylor en el origen (véase [10] para los detalles). La genericidad de la existencia de puntos homoclinicos transversales en todo entorno del punto elíptico para estos difeomorfismos significa que dicha propiedad es cierta para un subconjunto de D que es intersección numerable de abiertos densos en D (esto es, para un subconjunto residual de D).

No se tiene una descripción completa de las propiedades ergódicas de los movimientos en las zonas de inestabilidad donde se encuen-

tran los puntos hiperbólicos. No obstante, Smale y Moser, [8] p. 101, han demostrado que en todo entorno de un punto homoclínico transversal se encuentra el shift de Bernoulli como subsistema. Por lo tanto, si la aplicación T_e^Q posee puntos homoclínicos transversales el flujo del movimiento de Sitnikov tiene en su entorno un comportamiento "mixing" (véase [2], p. 18).

Numéricamente se sabe que los iterados por T_e de un punto comprendido entre dos curvas cerradas invariantes Γ_e y situado fuera de la región cubierta por las islas tienden a llenar como un "mar de puntos" la zona comprendida entre las islas. Véase por ejemplo la fig. 14, correspondiente a la aplicación de Poincaré estudiada por Hénon y Heiles [5]. En ella todos los puntos situados fuera de las curvas pertenecen a una sola órbita.

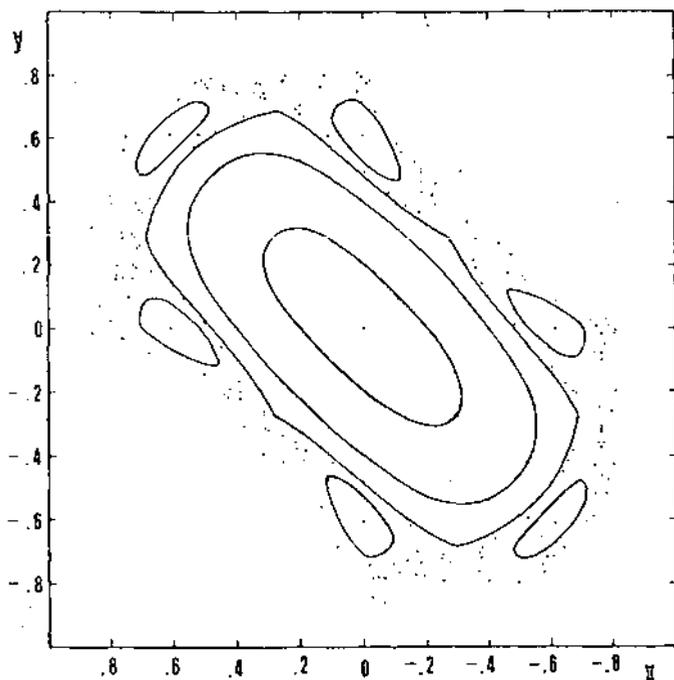


Fig. 14

§ 6. Evoluciones finales. - Se llama evolución final de una órbita del problema de Sitnikov, al comportamiento del cuerpo de masa infinitesimal cuando el tiempo tiene a $+\infty$ ó a $-\infty$. El estudio de las evoluciones finales se remonta a Chazy [4] quien en 1922 dió una cla-

sificación de las posibles evoluciones finales para el problema de tres cuerpos.

En el movimiento de Sitnikov sólo son posibles cuatro tipos de evolución final: parabólica (P), hiperbólica (H), estable según Lagrange (L, corresponde a órbita acotada) y oscilatoria (OS, corresponde a una órbita no acotada en la cual el cuerpo de masa infinitesimal no llega a escaparse al infinito).

Denotaremos por $H^- \cap L^+$ a una órbita en que la evolución final es hiperbólica cuando $t \rightarrow -\infty$ y lagrangiana cuando $t \rightarrow +\infty$. Es claro que el movimiento de Sitnikov cuando $e = 0$ sólo tiene evoluciones finales del tipo $L^- \cap L^+$, $P^- \cap P^+$ y $H^- \cap H^+$. Mediante su ejemplo, introducido en 1959, Sitnikov fue el primero en probar la existencia de evoluciones finales del tipo oscilatorio en el problema de tres cuerpos. No obstante, la existencia de órbitas para los 16 casos posibles de evolución final en el problema de Sitnikov no fue demostrada hasta 1968 por Alekseev [1]. En 1970-73 Moser dió una nueva demostración usando técnicas más sencillas.

Mc Gehee [7], haciendo el cambio de variables

$$q = \frac{2}{u^2}, \quad 0 < u < \infty,$$

$$p = -v,$$

$$dt = \frac{4}{u^3} ds,$$

que lleva el infinito al origen, demuestra que en el infinito hay una órbita parabólica que se comporta como punto hiperbólico (degenerado) y cuya variedad invariante estable (resp. inestable) está formada por las órbitas parabólicas para $t \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$) y es homeomorfa a un cilindro. Moser, en el teorema 1, prueba que la primera intersección de la variedad invariante estable (inestable) con la superficie de sección Σ es ∂D_1 (∂D_{-1}) (fig. 15). Como que ∂D_1 y ∂D_{-1} se cortan no tangencialmente si e es suficientemente pequeña, los puntos de corte son puntos homoclinicos transversales. Como se sabe en el entorno de un punto homoclinico transversal se encuentra el shift de Bernoulli como subsistema. Este hecho permitió, primero a Alekseev y después a Moser, probar el siguiente teorema.

Teorema 4. - A cada órbita del problema de Sitnikov le asociamos una sucesión de enteros $(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ de manera que a_n mide el número de vueltas enteras que han dado m_1 y m_2 entre el paso número n y el paso siguiente de m_2 por el plano $q=0$. Eventualmente la sucesión (a_n) puede ser finita por la izquierda con $a_n = +\infty$ y $h < 0$, o finita por la derecha con $a_l = +\infty$ y $l \geq 1$:

Dada una excentricidad $e > 0$ suficientemente pequeña, existe un entero $a = a(e)$ tal que, cualquier sucesión de enteros (a_n) , con $a_n \geq a$, corresponde a una órbita del tercer cuerpo.

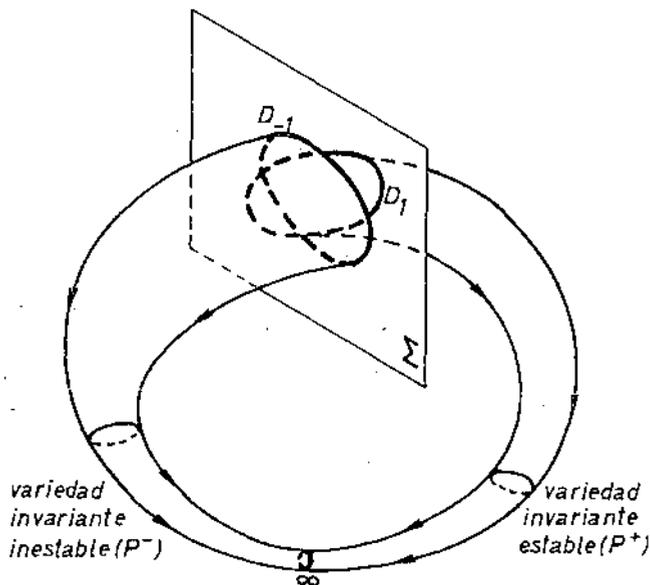


Fig. 15. Aspecto cualitativo en el espacio E y en las coordenadas de Mc Gehee de la primera intersección de las variedades invariantes de la órbita hiperbólica en el infinito con la superficie de sección Σ , para valores de e suficientemente pequeños.

Diremos que un punto $x \in \Sigma$ da lugar a una órbita parabólica por T_e^n (T_e^{-n}) y lo pondremos $x \in P_n$ ($x \in P_{-n}$), si la órbita que determina, después de atravesar $n-1$ veces el plano $q=0$ se va al infinito parabólicamente cuando el tiempo $t \rightarrow +\infty$ ($-\infty$). Análogamente se definen las órbitas hiperbólicas por T_e^n (T_e^{-n}) y se designan por H_n (H_{-n}). Es claro que un punto de Σ corresponde a una órbita parabólica por T_e^n (T_e^{-n}) si pertenece a la n -ésima intersección de la variedad estable (inestable) del infinito con la superficie Σ , y que $P_1 = \partial D_1$, $P_{-1} = \partial D_{-1}$.

Queremos determinar sobre Σ los puntos que corresponden a órbitas con evolución final del tipo $(L^- \cup OS^-) \cap (L^+ \cup OS^+)$. Si D_n es el dominio de definición de T_e^n , con $n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$, bastará hallar

$$\bigcap_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} D_n.$$

Como $D_{-n} = SD_n$ (teorema 1), basta obtener D_n para $n \geq 1$.

De [8] p.165 se obtiene que ∂D_1 viene dada por $p_0 = 2 + \frac{3}{8}e^{-(-A \sin t_0 + B \cos t_0) + 0(e^2)}$, donde $B + Ai = \int_0^\infty e^{it} z \dot{z} (z^2 + 1/4)^{-5/2} dt$ y z es solución de la ecuación $\ddot{z} = -z(z^2 + 1/4)^{-3/2}$ con $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 2$. Un cómputo numérico da $A = 0.67639\dots$, $B = 2.46685\dots$. La fig. 16 muestra un comportamiento realista de ∂D_1 , ∂D_{-1} usando esos valores.

Sea α una curva invariante por T_e y γ un segmento que tiene un extremo, x , sobre α y el otro, y , sobre ∂D_1 (fig. 16). Usando el teorema 1, para obtener el dominio de definición, D_2 , de T_e^2 sobre γ , hemos de suprimir de γ infinitos intervalos cerrados I_i tales que $T_e I_i \not\subset D_1$ (fig. 17). Es claro que los intervalos I_i se acumulan en el entorno de y . Por continuidad, el dominio D_2 es D_1 menos una cinta que espirala dando infinitas vueltas alrededor de la curva α tal como se muestra en la fig. 18. Dicha cinta espiral es la antiimagen por T_e de $D_{-1} - D_1$. Los puntos frontera de esta cinta corresponden a órbitas parabólicas por T_e^2 y los puntos interiores a órbitas hiperbólicas por T_e^2 .

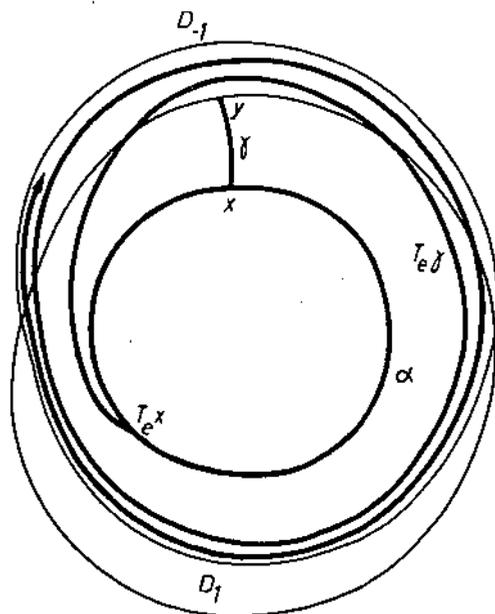


Fig. 16

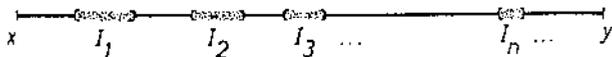


Fig. 17

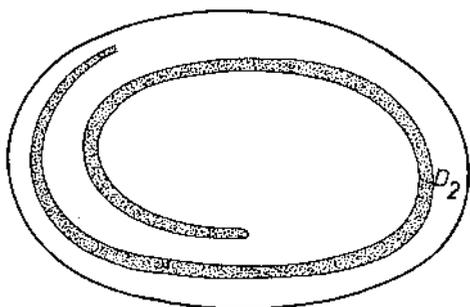


Fig. 18

De nuevo, para tener el dominio de definición D_3 de T^3 sobre \mathcal{V} , hemos de suprimir de \mathcal{V} no sólo $\bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$, sino además

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} \left[\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} J_{i,j} \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} K_{i,k} \right) \right]$$

donde cada $J_{i,j}, K_{i,k}$ es un intervalo cerrado. Los intervalos $J_{i,j}, K_{i,k}$ al variar j y k se acumulan hacia el intervalo I_i , los primeros creciendo y los segundos decreciendo (para más detalles véanse las figuras 19 y 20).

Por continuidad, el dominio D_3 es D_2 menos 2 familias de \aleph cintas que espiralan dando infinitas vueltas alrededor de la curva α . Esto es, la cinta espiral que hemos suprimido a D_1 para obtener D_2 ocasiona que ahora tengamos que quitar dos familias de \aleph cintas espirales a D_2 para obtener D_3 . Esto se repetirá para obtener D_4 a partir de D_3 , D_5 a partir de D_4 , etc. Por lo tanto, se tiene $D_n, D_{-n} = SD_n$ y en definitiva

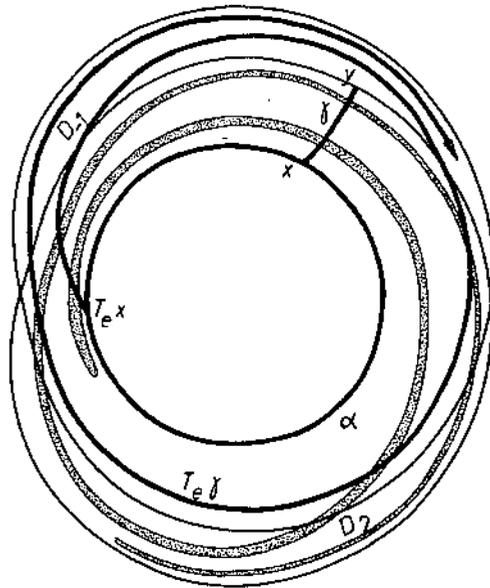


Fig. 19

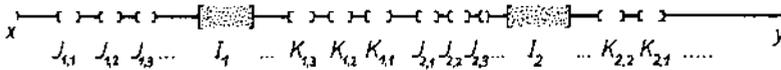


Fig. 20

$$\bigcap_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0 \\ n < +\infty}} D_n$$

Es claro que $\bigcap_{n>0} D_n$ es un conjunto cantoriano de dimensión (topológica) igual a 2.

De lo anterior se sigue sin dificultad el siguiente teorema.

Teorema 5.— Para valores de la excentricidad e suficientemente pequeños se tiene la siguiente tabla:

<i>El conjunto de las órbitas con evolución final del tipo</i>	<i>es homeomorfo a</i>
$P_{\pm 1}$	S^1
$P_{\pm 2}$	<i>un intervalo abierto</i>
$P_{\pm n}, n \geq 3$	<i>reunión numerable de intervalos abiertos disjuntos</i>
$H_{\pm n}, n \geq 1$	<i>conjunto de medida de Lebesgue > 0</i>
$P_{-1} \cap P_1$	<i>2 puntos</i>
$P_{-n} \cap P_m, \begin{cases} n \neq 1 \\ \delta \\ m \neq 1 \end{cases}$	<i>un conjunto numerable</i>
$P_{-n} \cap H_m \delta H_{-n} \cap P_m$	<i>reunión numerable de intervalos abiertos disjuntos</i>
$H_{-n} \cap H_m$	<i>conjunto de medida de Lebesgue > 0.</i>

Es de esperar (por resultados numéricos que se tienen del estudio de ciertas transformaciones puntuales del plano [3]), que en el paso de la región con curvas invariantes por T a la región con espirales (esto es, en la frontera entre ambas regiones) jueguen un papel importante los puntos heteroclínicos (intersección de variedades invariantes estable e inestable de puntos periódicos de familias distintas). Véase [6] para un estudio más detallado.

Referencias

- [1] Alekseev, V.M.: Quasirandom dynamical systems I, II, III, Math. USSR Sbornik 5, 73 - 128 (1968); 6, 505-560 (1968); 7, 1-43 (1969).
- [2] Arnold, V.I., Avez, A.: Ergodic problems of classical mechanics. Benjamin (1968).
- [3] Bartlett, J.H.: Stability of area preserving mappings, en Transformations ponctuelles et leurs applications, Colloque international du C.N.R.S., n°229, p. 155-175(1973).
- [4] Chazy, J.: Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps, Journ.math. pures et appl. 8, 353-380 (1929).

- [5] Hénon, M., Heiles, C.: The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments, *Astron. J.* 69 73-79 (1964).
- [6] Llibre, J., Simó, C.: A global study of the Sitnikov problem, (1979), por aparecer.
- [7] McGehee, R.: A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to Celestial Mechanics, *J. of diff. equations*, 14, 70-88 (1973).
- [8] Moser, J.: Stable and random motion in dynamical systems, Princeton Univ. Press (1973).
- [9] Sitnikov, K.: Existence of oscillating motions for the three-body problem, *Dokl. Akad. Nauk, USSR*, 133, 303-306 (1960).
- [10] Zehnder, E.: Homoclinic points near elliptic fixed points, *Comm. Pure and Appl. Math.*, XXVI, 131-182 (1973).