

LA MONODROMIA DE PICARD-LEFSCHETZ EN EL ESTUDIO DE LAS  
SINGULARIDADES COMPLEJAS.

V. NAVARRO AZNAR

INTRODUCCION

Los puntos singulares si bien han estado siempre presentes en el desarrollo de la geometría, su estudio ha estado, hasta muy recientemente, fundamentalmente reducido a un único problema: cómo hacer para dejar de estudiarlos. En efecto, lo que se buscaba con más ahínco no era conocer y entender los puntos singulares, sino hacer todo lo posible por evitarlos. El motivo bien evidente de ello estaba en el punto de vista birracional de la geometría y en el escaso interés que por el tema tenían otras ramas de las matemáticas. Desde hace unos veinte años el panorama ha cambiado notablemente y la aparición del punto de vista birregular en geometría, el estudio de interacciones elementales en física-matemática, el descubrimiento de estructuras exóticas en geometría diferencial y de variedades no diferenciables en topología han sido algunas de las motivaciones que impulsaron el estudio de las singularidades, de manera que en la actualidad, habiendo tomado entidad propia, son objeto de enorme interés.

En esta exposición intentaré mostrar una bella forma, a mi entender, de clasificar los puntos singulares aislados de hipersuperficie compleja que, basada en la noción de tipo topológico, permite clasificarlos mediante su número de Milnor y su forma de Seifert, de manera que

-singularidades con distinto número de Milnor son de distinto tipo topológico;

- sólo hay un número finito de singularidades de distinto tipo topológico con igual número de Milnor; y finalmente
- singularidades con igual número de Milnor son del mismo tipo topológico si sus formas de Seifert son iguales.

Este resultado constituirá el eje central de la narración que desearía fuera tan agradable para el lector como agradable es para mí este tema.

El texto que sigue es una versión sensiblemente revisada del que hubiera servido de base para la conferencia que pronuncié el 6.4.78 en la Universidad de Barcelona dentro del Seminario Barcelona de Matemáticas.

## 1. TIPO TOPOLOGICO

Si consideramos dos gérmenes de subconjunto analítico,  $(X, x)$  y  $(X', x')$ , la noción más inmediata de equivalencia es la analítica, que se expresa en la

Definición: Dos gérmenes de subconjunto analítico,  $(X, x)$  y  $(X', x')$ , son analíticamente equivalentes si sus anillos locales,  $\theta_{X, x}$  y  $\theta_{X', x'}$ , son  $\mathbb{C}$ -isomorfos.

No obstante, se observa que esta definición origina un criterio excesivamente fino de equivalencia, de forma que singularidades "aparentemente" iguales son analíticamente distintas, por ejemplo el germen  $(X_a, 0)$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , de ecuación local  $x^4 + ax^2y^2 + y^4 = 0$  en  $\mathbb{C}^2$ , que para todo  $a \in \mathbb{C}$  corresponde a la intersección de cuatro rectas en el origen, analíticamente depende del parámetro  $a$ , de forma que si  $a \neq a'$  sería  $X_a \neq X_{a'}$ , sin embargo parece natural intentar en una primera clasificación considerarlas como una única singularidad. De hecho la imagen que se pretende seguir es la correspondiente a las superficies de Riemann: primero clasificarlas topológicamente según el género, después ya

se resolverá el problema de la equivalencia conforme (problema de los módulos) para cada género.

Entendida así la cuestión la clasificación grosera que se busca puede obtenerse, en el caso de hipersuperficies, basándose en la siguiente

Definición: Sean  $(X,0)$  y  $(X',0)$  dos gérmenes de hipersuperficie de igual dimensión. Diremos que tienen mismo tipo topológico si existen representantes locales  $(X,0) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$ ,  $(X',0) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$  y un germen de homeomorfismo  $(\mathbb{C}^{n+1},X,0) \cong (\mathbb{C}^{n+1},X',0)$ .

Aunque esta definición no requiere que las singularidades sean aisladas, en lo sucesivo nos ocuparemos exclusivamente de este caso por ser los resultados entonces mucho más fáciles y completos. Así pues, empezaré citando este criterio

Lema: Sea  $(X,0)$  un germen de hipersuperficie en  $\mathbb{C}^{n+1}$ , sea  $f=0$  una ecuación local de  $(X,0)$  y sea  $\mathcal{L}(f)=[D_1f, D_2f, \dots, D_n f]$ . Entonces  $(X,0)$  presenta a lo sumo una singularidad aislada en el origen sii

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\theta_{n+1}}{\mathcal{L}(f)} \text{ es finita.}$$

Como puede observarse fácilmente esta dimensión no depende de la ecuación local de  $(X,0)$  escogida y permite la

Definición: Se llama número de Milnor de  $(X,0)$ ,  $\mu(X)$ , a la dimensión sobre  $\mathbb{C}$  de

$$\frac{\theta_{n+1}}{\mathcal{L}(f)}$$

Con esta nomenclatura se tiene, de forma trivial: un germen  $(X,0)$  es regular sii su número de Milnor es cero, criterio éste que será de utilidad más adelante; y un germen  $(X,0)$  presenta a lo sumo una singularidad aislada en el origen sii su número de Milnor es finito.

Ejemplo: Procuraré en lo que sigue ir mostrando todos los conceptos que vaya introduciendo sobre un caso concreto,

será éste el de la serie de singularidades cuspidales,  $A_m$ , que admiten como ecuación local  $x_0^{m+1} + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$ , para éstas vemos fácilmente, aplicando la definición, que su número de Milnor es  $m$ .

Acabamos de asociar a un germen con singularidad aislada un número natural, ahora vamos a asociarle un nudo en codimensión dos que permite una buena representación topológica de la singularidad, es ésta

Teorema de estructura cónica 1 (ver [33]): Sea  $(X,0)$  un germen de hipersuperficie en  $\mathbb{C}^{n+1}$  con singularidad aislada, y sea  $V$  un representante de  $(X,0)$  en un entorno abierto  $U$  del origen. Entonces existe un  $\varepsilon > 0$  tal que:

- i)  $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{C}^{n+1}; \|x\| \leq \varepsilon\} \subset U$
- ii)  $S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{C}^{n+1}; \|x\| = \varepsilon\}$  corta a  $V$  en una subvariedad  $(2n-1)$ -dimensional,  $(n-2)$ -conexa,  $K_\varepsilon$ .
- iii) el par  $(B_\varepsilon, V \cap B_\varepsilon)$  es homeomorfo al cono  $\overset{\text{sobre}}{V}(S_\varepsilon, K_\varepsilon)$ .
- iv) si  $\varepsilon > \varepsilon' > 0$  los pares  $(S_\varepsilon, K_\varepsilon)$  y  $(S_{\varepsilon'}, K_{\varepsilon'})$  son difeotópicos, a la clase de difeotopía de estos nudos se llama el nudo del germen  $(X,0)$ .

Así se tiene que dos gérmenes son del mismo tipo topológico si sus nudos son equivalentes.

Ejemplo: Continuando con la serie  $A_m$  vamos a considerar ahora sólo  $n=1$ , esto es singularidades de curvas planas, pues precisamente fue con el estudio topológico de estas singularidades por Brauer [5], Burau [10], [11], y Kahler [23], como se inició el método que acabamos de citar de los nudos. Por consiguiente las singularidades a considerar son las de ecuación local  $x^m + y^2 = 0$  en  $\mathbb{C}^2$ , pero ahora no es difícil comprobar que proyectando estéreoграфicamente la  $S^3$  sobre  $\mathbb{R}^3$ , el enlazado  $(S^3, K)$  es precisamente, si  $m$  es impar, el bien conocido nudo tórico  $(2, m)$ , y si  $m$  es par, dos circunferencias sin nudos enlazadas con número de enlace  $m/2$  (ver fig. 1)

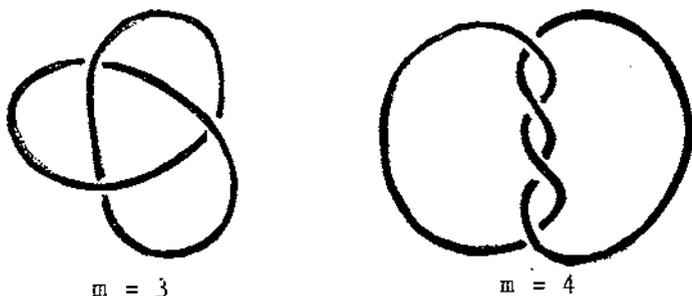


Figura 1

## 2. LA FIBRACION DE MILNOR

En este apartado vamos a introducir una estructura sobre el nudo  $(S_c, K)$  anterior, la fibración de Milnor, que desempeña un papel esencial en la clasificación de gérmenes basada en el tipo topológico.

Históricamente, la estructura a la que me refiero se derivó del método de las secciones hiperplanas que S. Lefschetz [30] introdujo en su estudio de la topología de las variedades proyectivas. Empezaré explicando cómo se entiende ahora este método, sin entrar en detalles.

Sea  $Y$  una variedad compleja lisa de dimensión  $n+1$  y  $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa, propia y con un número finito  $a_1, \dots, a_r$  de puntos críticos, no degenerados ( $\mu=1$ ), y con valores críticos distintos  $b_1, \dots, b_r$  respectivamente. Tomando un  $\delta > 0$  suficientemente pequeño los discos

$D_j = \{z \in \mathbb{C}; |z - b_j| \leq \delta\}$ ,  $1 \leq j \leq r$ , serán disjuntos dos a dos, sea entonces  $w_j(t) = b_j + \delta e^{2\pi i t}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , y sea  $u_j$  un camino  $C^\infty$  en  $\mathbb{C} - \{b_1, \dots, b_r\}$  uniendo un punto base  $z_0 \in \mathbb{C} - \{b_1, \dots, b_r\}$  con  $b_j + \delta$ . Llamaremos entonces a

$$v_j = u_j^{-1} w_j u_j$$

un camino elemental en torno a  $b_j$ , y a su clase de homotopía en  $\pi_1(\mathbb{C} - \{b_1, \dots, b_r\}, z_0)$  la notaremos  $\beta_j$ .

Con estas hipótesis y notaciones el resultado de Lefschetz es éste

Teorema 2 (ver [30], [15], [27]):

- i)  $f_0: Y \rightarrow f_0^{-1}(\{b_1, \dots, b_r\}) \rightarrow \mathbb{C} - \{b_1, \dots, b_r\}$  es un fibrado  $C^\infty$  localmente trivial, y por tanto todas sus fibras son difeomorfas.
- ii) si  $F = f^{-1}(z_0)$ , la aplicación

$$H_i(F, Z) \rightarrow H_i(Y, Z)$$

es biyectiva si  $i < n$ , y exhaustiva si  $i = n$ .

- iii) existe para cada clase  $\beta_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ , un ciclo  $s_j \in H_n(F, Z)$ , de manera que

$$\text{Núcl}(H_n(F, Z) \rightarrow H_n(Y, Z)) = [s_1, \dots, s_r]$$

a este núcleo se le llama el grupo de ciclos evanescentes.

En el apartado 3 completaremos estos resultados viendo como los ciclos evanescentes  $s_j$  permiten el cálculo de la monodromía de Picard-Lefschetz.

Volvamos ahora a considerar un germen  $(X, 0)$  de hipersuperficie en  $\mathbb{C}^{n+1}$  con singularidad aislada, si  $f=0$  es una ecuación local de  $(X, 0)$  definida en un entorno abierto  $U$  de  $0$  en  $\mathbb{C}^{n+1}$ , la aplicación  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  presenta un único punto crítico en  $0$ , escogiendo  $U$  adecuadamente. Así tenemos una situación parecida a la anterior pero en la que, generalmente, ni  $f$  es propia ni el punto crítico es no degenerado. La construcción que en este caso realiza Milnor es la siguiente: considerando el nudo  $(S_\epsilon, K)$  define

$$\begin{aligned} \varphi: S_\epsilon - K &\rightarrow S^1 \\ x &\rightarrow f(x)/|f(x)| \end{aligned}$$

y entonces obtiene el siguiente resultado:

Teorema 3 (Milnor [33]):

- i) si  $\epsilon > 0$  es suficientemente pequeño,  $\varphi$  es un fibrado  $C^\infty$  localmente trivial.

- ii)  $F = \varphi^{-1}(?)$  es el interior de una variedad diferenciable con borde,  $2n$ -dimensional, y cuyo borde es precisamente  $K$ .
- iii)  $\tilde{H}_1(F, \mathbb{Z}) \approx 0$ , si  $i \neq n$ .
- iv) si  $\mu$  es el número de Milnor de  $(X, 0)$  entonces  $\tilde{H}_n(F, \mathbb{Z})$  es libre de rango  $\mu$ .
- v) si  $f'$  es otra ecuación local de  $(X, 0)$  y si  $\varepsilon' > 0$  es suficientemente pequeño para que  $\varphi'$  cumpla i), entonces los fibrados  $\varphi$  y  $\varphi'$  son diferenciablemente equivalentes.

Al fibrado que define el teorema se le llama fibración de Milnor del germen  $(X, 0)$ , y a su fibra típica  $F$ , la fibra de Milnor del germen  $(X, 0)$ .

Ejemplo: Para la serie  $A_n$ :  $x^{m+1} + y^2 = 0$  hemos visto anteriormente que  $\mu = m$ , y que  $K$  era el enlazado  $(2, m)$ , así es fácil dar un buen modelo de la fibra de Milnor  $F$ , ver fig. 2:

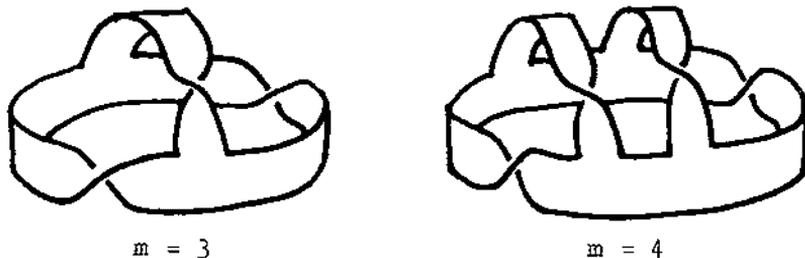


Figura 2

Existe otra construcción, también de Milnor, que define una fibración equivalente a la anterior, y a la cual me referiré en el apartado 4, es ésta:

sea  $B_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; \|z\| < \varepsilon\}$ ,  $T_\eta = \{z \in \mathbb{C}, \|z\| < \eta\}$ ,  
 $T_\eta^* = T_\eta - \{0\}$ , y notemos  $X_{\varepsilon, \eta}^* = B_\varepsilon \cap f^{-1}(T_\eta^*)$ , entonces si  $\varepsilon, \eta$  son convenientemente escogidos,

$$f: X_{\varepsilon, \eta}^* \rightarrow T_\eta^*$$

es un fibrado  $C^\infty$  localmente trivial, e isomorfo al del teorema 3, ver fig. 3:

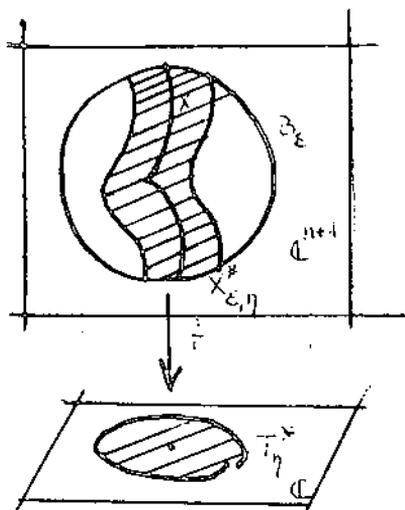


Figura 3

La importancia de la fibración de Milnor con respecto a la clasificación que pretendo exponer, está en que a partir de ella se obtiene este

Teorema 4 (ver [1], [28]): Sean  $(X,0)$  y  $(X',0)$  gérmenes de hipersuperficie en  $C^{n+1}$  del mismo tipo topológico, entonces

- i)  $(X,0)$  es regular sii  $(X',0)$  es regular, i.e.  
 $\mu(X)=0$  sii  $\mu(X')=0$ ;
- ii)  $(X,0)$  posee un punto singular aislado en el origen sii  $(X',0)$  lo posee; y en este caso
- iii)  $\mu(X) = \mu(X')$ .

Con este resultado vemos que el número de Milnor es un buen indicador del tipo topológico de la singularidad; que también es un cómodo indicador resulta del siguiente teorema, conjeturado por R. Thom, y que justifica, en parte, la introducción misma del concepto tipo topológico.

Teorema 5 (Fukuda [16]): Sólo hay un número finito de tipos topológicos distintos de gérmenes de hipersuperficie con singularidad aislada, que posean el mismo número de Milnor.

Antes de dejar este apartado quiero comentar qué otra exigencia debería cumplir la clasificación basada en el tipo topológico para ser una muy buena clasificación. Aunque, en el apartado 5 haré otras precisiones, me limito ahora a la multiplicidad, en efecto, hasta el momento no había hablado de la multiplicidad del germen  $(X,0)$ ,  $m(X)$ , aún cuando está claro que es un importante invariante analítico, recuérdese que  $m(X)=1$  sii  $(X,0)$  es regular. La razón de este olvido está en que la multiplicidad no es un buen indicador, ni siquiera analítico, basta pensar en la serie  $A_m: x^{m+1} + y^2 = 0$ , toda ella de multiplicidad 2. Ahora bien, lo que sí sería muy de desear es que la clasificación topológica que estamos propugnando fuera compatible con la multiplicidad, esto es, desearíamos tener una respuesta positiva a la

Pregunta (Zariski, [46]): Si  $(X,0)$  y  $(X',0)$  son gérmenes de hipersuperficie del mismo tipo topológico ¿es  $m(X) = m(X')$ ?

En el apartado 5 se dará una tabla sobre la cual puede verse que dicha pregunta es cierta si  $\mu \leq 10$ . Pero una forma de ataque general a este problema, parece que debe estar basada en la fibración de Milnor de  $(X,0)$ , en especial sería muy interesante una respuesta positiva a la

Pregunta: Si  $(X,0)$  y  $(X',0)$  son gérmenes de hipersuperficie del mismo tipo topológico ¿son sus fibraciones de Milnor homeomórficamente equivalentes?

Efectivamente esto es así en todos los casos que conozco, ver en especial [24] y [29], y resultaría por los resultados de [24] de esta última

Pregunta: Sea  $(X,0)$  un germen de hipersuperficie con singularidad aislada ¿existe un germen de hipersuperficie  $(X',0)$  del mismo tipo topológico que  $(X,0)$ , y que admita una ecuación local  $f=0$ , con  $f$  un polinomio real?

Como ya he mencionado, estas dos últimas preguntas admiten respuesta afirmativa si  $n=1$  (caso de curvas planas), en todas las formas normales de [3], y en todas las familias a  $\mu$  constante que sean quasi-homogéneas.

### 3. MONODROMIA

Al disponer ahora de la fibración de Milnor asociada al germen  $(X,0)$ , podemos obtener una información todavía mayor si consideramos la monodromía de dicha fibración. Recordemos que dada una fibración  $\varphi: E \rightarrow B$ , se pueden levantar los caminos trazados sobre la base  $B$  en caminos sobre el espacio total  $E$ , de forma que a caminos homótopos en  $B$  corresponden caminos homótopos en  $E$ , en particular si consideramos caminos cerrados en  $B$  con punto base  $b$ , obtendremos homeomorfismos de la fibra  $F_b$ , y como a una clase de homotopía en  $\pi_1(B,b)$  corresponde una clase de homeomorfismos homótopos en  $F_b$ , resulta en definitiva un morfismo

$$\pi_1(B,b) \rightarrow \text{Aut}(H_*(F_b, \mathbb{Z}))$$

a esta aplicación se le llama la monodromía de la fibración, y a su imagen se le llama el grupo de monodromía de la fibración.

En el caso de la fibración de Lefschetz, esta monodromía, por tener su origen en Picard [37] recibe el nombre de Monodromía de Picard-Lefschetz, y está explícitamente determinada en el siguiente

Teorema 6 (Fórmulas de Picard-Lefschetz, ver [37], [30], [15], [27]): Con las hipótesis y notaciones del teorema 2, la monodromía de la fibración  $f$  hace corresponder a cada clase  $\beta_j \in \pi_1(\mathbb{C} - \{b_1, \dots, b_n\})$  el automorfismo  $h_{j,*}$  de  $H_*(F, \mathbb{Z})$  definido por

$$h_{j,q} = \text{id} \quad \text{si } q \neq n$$

$$h_{j,n}(y) = y - (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \langle y, s_j \rangle s_j, \quad \text{para todo}$$

$$y \in H_n(F, \mathbb{Z}).$$

En el caso de la fibración de Milnor que nos ocupa como el espacio base de la fibración es la  $S^1$  y como la homología de la fibra es trivial salvo en dimensión  $n$ , esta monodromía queda determinada si damos el automorfismo  $h_*$  de  $H_n(F_b, \mathbb{Z})$  que corresponde al generador "positivo" de  $\pi_1(S^1, b)$ , a este automorfismo  $h_*$  se le llama el operador de monodromía, o bien la monodromía algebraica, de la fibración de Milnor.

En este punto merece resaltarse un resultado análogo local al que desempeña un importante papel en la demostración de Deligne de las conjeturas de Weil.

Teorema de monodromía 7 (ver [9]): El operador de monodromía es quasi-unipotente, i.e. existe un  $i > 0$  tal que  $(h_*^i - I)^{n+1} = 0$ .

En particular, si llamamos polinomio de monodromía,  $\Delta(t)$ , al polinomio característico de  $h_*$  se tiene: las raíces del polinomio de monodromía son raíces de la unidad.

Ejemplo: Si quiero seguir ilustrando lo que estoy diciendo con el ejemplo  $x_0^m + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$ , deberé considerar la fibra de Milnor  $F = \{x_0^m + \dots + x_n^2 = 1\}$ , en cuyo caso  $h_*$  estará inducida por la monodromía geométrica

$h(x_0, \dots, x_n) = (e^{\frac{2\pi i}{m}} x_0, \dots, e^{2\pi i} x_n)$ , pero para evitar excesivas comprobaciones, utilizaré este teorema de Sebastiani-Thom [38]:

Si  $f(x, y) = f_0(x) + f_1(y)$  con  $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $y \in \mathbb{C}^m$ , y si  $f_0(x)$ , resp.  $f_1(y)$ , presenta una singularidad aislada en  $0 \in \mathbb{C}^n$ , resp.  $0 \in \mathbb{C}^m$ , entonces  $f(x, y)$  presenta una singularidad aislada en  $(0, 0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ ,  $\tilde{H}_{n+m-1}(F) = \tilde{H}_{n-1}(F_0) \otimes \tilde{H}_{m-1}(F_1)$  y  $h_* = h_{*0} \otimes h_{*1}$ .

Con esto ya es muy fácil pues si  $f(x_0, \dots, x_n) = x_0^m + x_1^2 + \dots + x_n^2$  tendremos  $f_0(x_0) = x_0^m, \dots, f_n(x_n) = x_n^2$ , así que bastará con encontrar la monodromía de  $f_0$ , pero en este caso la fibra está constituida por las raíces  $m$ -ésimas de la unidad, y la monodromía algebraica en  $H_0(F)$  es sencillamente decalar uno, así

$$h_{*0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & m & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ m & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

no obstante, al estar interesados en  $\tilde{H}_0(F)$  debemos tener en cuenta que, si  $(e_1, \dots, e_m)$  es una base de  $H_0(F)$ , una base de  $\tilde{H}_0(F)$  es, por ejemplo,  $(e_1 - e_m, \dots, e_{m-1} - e_m)$  y en esta base

$$h_{*0} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & m-1 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ m-1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

en definitiva pues

$$h_* = h_{*0} \otimes h_{*1} \otimes \dots \otimes h_{*n} = (-1)^n h_{*0}$$

Esta matriz nos permite calcular el polinomio de monodromía, resultando evidentemente

$$\Delta(t) = \frac{t^m - 1}{t - 1}$$

Vamos a ver, por último, cómo se define la forma de Seifert a partir de la monodromía algebraica. Para ello deberé recordar la definición clásica de número de enlace: si  $x, y$  son  $n$ -ciclos en  $S^{2n+1}$ ,  $n \geq 0$ , y  $X$  es una  $(n+1)$ -cadena tal que  $\partial X = x$  entonces el número de enlace de  $x$  con  $y$ ,  $l(x, y)$ , es el número de intersección de  $X$  e  $y$ , así  $l(x, y) = \langle X, y \rangle$ . Con esto la forma de Seifert se define mediante:

$$s: \tilde{H}_n(F) \times \tilde{H}_n(F) \rightarrow Z$$

$$(x,y) \rightarrow l(h_\pi x,y)$$

donde  $h_\pi$  es el isomorfismo  $\tilde{H}_n(F_0) \rightarrow \tilde{H}_n(F_\pi)$  inducido por el camino  $w: [0,\pi] \rightarrow S^1$ ,  $w(t) = e^{it}$ .

La forma de Seifert resulta ser no degenerada y su importancia radica en el

**Teorema 8** (Levine [3], ver también [12]): Sean  $(X,0)$  y  $(X',0)$  dos gérmenes de hipersuperficie en  $\mathbb{C}^{n+1}$  con singularidad aislada. Si sus formas de Seifert son equivalentes, entonces  $(X,0)$  y  $(X',0)$  son del mismo tipo topológico.

Es importante hacer notar que la forma de Seifert facilita información explícita sobre la topología del germen; en efecto: en primer lugar muestra el número de Milnor, como es evidente, en segundo lugar, da la estructura multiplicativa de  $\tilde{H}_n(F)$  pues si  $i$  denota la forma de intersección en  $\tilde{H}_n(F)$  se tiene (ver [12], [27])

$$i = s + (-1)^n s^t$$

y en tercer lugar, permite obtener la monodromía algebraica de la fibración de Milnor, pues tomando una base en  $\tilde{H}_n(F)$  resulta (ver [12], [27]) la igualdad matricial

$$H = (-1)^{n+1} S^{-1} S^t$$

**Ejemplo:** Para las singularidades de la serie  $A_n$  se encuentra que su forma de Seifert admite como matriz, (ver [12])

$$S = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

#### 4. DEFORMACIONES

Quiero exponer ahora una construcción que, aún siendo también local, permite una visión mucho más estereográfica de la singularidad, pues mientras se representa en uno de sus planos la fibración de Milnor, en otros planos se representan escenas (fibraciones) no degeneradas de Picard-Lefschetz. La idea es "sumergir" la singularidad dada en un espacio de dimensión mayor, de tal forma que dicho espacio contenga "todas" las singularidades "próximas" a la original. Precisar las anteriores palabras es introducir la noción de deformación semiuniversal.

Definición: Si  $(X_0, x_0)$  es un germen de espacio analítico, una deformación plana, o simplemente deformación, de  $(X_0, x_0)$  es un cuadrado cartesiano

$$\begin{array}{ccc} (X_0, x_0) & \longleftrightarrow & (X, x) \\ \downarrow & \square & \downarrow G \\ \{s\} & \longleftrightarrow & (S, s) \end{array}$$

en el que  $G$  es un morfismo plano. Al espacio  $(X, x)$  se le llama espacio total, y al  $(S, s)$  espacio base, o espacio de parámetros, de la deformación.

Se definen de forma evidente los morfismos entre deformaciones de un germen, y las deformaciones por cambio de base. Entonces, se dice de una deformación que es versal si todas las otras deformaciones de aquel germen se obtienen por cambio de base a partir de dicha deformación versal, y se dice de una deformación versal que es semi-universal si la dimensión de su espacio base es mínima.

El problema clave a resolver es el de existencia de deformaciones versales de un germen dado, y el de caracterización de las semiuniversales. Este problema que en el caso general es muy difícil y sólo admite solución bajo determinadas hipótesis (ver [19], [44]), tiene en el caso que estamos tratando de hipersuperficies con singularidad aislada una respuesta simple:

Teorema 9 (ver [44]): Si  $(X_0, x_0)$  es un germen de hipersuperficie con singularidad aislada y de número de Milnor  $\mu$ , entonces existe una deformación semiuniversal de  $(X_0, x_0)$ , siendo la dimensión  $\mathbb{C}$  del espacio base de ésta  $\leq \mu$ .

Pero más interesante todavía es que esta deformación puede construirse explícitamente como sigue. Sea  $f=0$  una ecuación local de  $(X_0, x_0)$  y sea  $(e_1, \dots, e_r)$  una base

sobre  $\mathbb{C}$  de  $\frac{\theta_{X_0, x_0}}{[f, \mathcal{N}(f)]}$ , entonces el espacio total  $(X, x)$  de la

deformación semiuniversal que buscamos es simplemente el germen en  $x=(X_0, 0) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^r$  del espacio analítico en  $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^r$  con ecuación local

$$f(x) + e_1 t_1 + e_2 t_2 + \dots + e_r t_r = 0,$$

el espacio base  $(S, s)$  es  $(\mathbb{C}^r, 0)$ , y  $G$  no es más que la restricción a  $(X, x)$  de la proyección natural.

Si  $(C, x)$  es el espacio crítico de  $G$ , y  $(D, 0)$  su espacio discriminante, es decir la imagen analítica directa de  $(C, x)$  por  $G$ , se tiene que, tomando representantes,  $D$  da los valores de los parámetros para los cuales la fibra es singular, y resulta el

Teorema 10 (Teissier [40], Gabrielov [18]):  $(C, x)$  es liso y  $(D, 0)$  es un germen irreducible de hipersuperficie en  $\mathbb{C}^r$ ; de multiplicidad  $m(D)=\mu$ .

Más concretamente, si en la base  $(e_1, \dots, e_r)$  escogida anteriormente suponemos  $e_r=1$ , entonces  $(t_1, \dots, t_{r-1})$  forman un sistema de parámetros para  $D$ , de manera que, tomando representantes, la restricción a  $D$  de la proyección  $\varphi: \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^{r-1}$  es un recubrimiento analítico ramificado de orden  $\mu$ , cuyo lugar de ramificación  $\Delta$  tiene dos componentes irreducibles: la cáustica,  $\Delta_1$ , sobre la cual están las fibras singulares con singularidad degenerada, y el estrato de Maxwell,  $\Delta_2$ , sobre el cual están las fibras con más de una singularidad.

Ejemplo: Me limitaré a ilustrar gráficamente la deformación semiuniversal para  $f = x^3$ , en cuyo caso se tiene

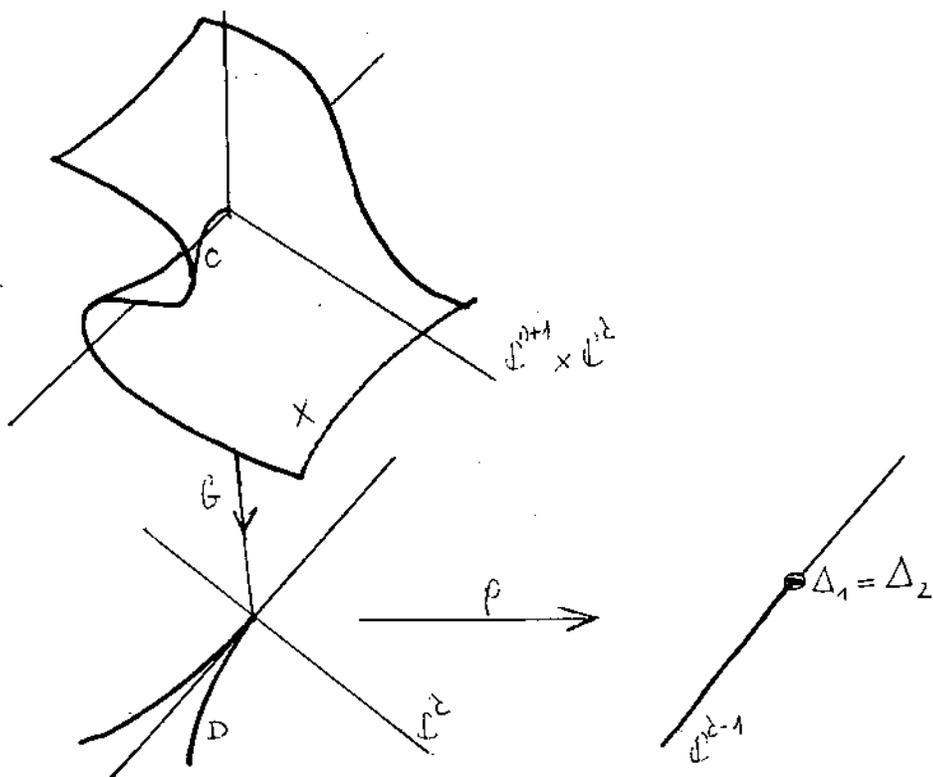


Figura 4

y el espacio discriminante para  $f = x^4$  es

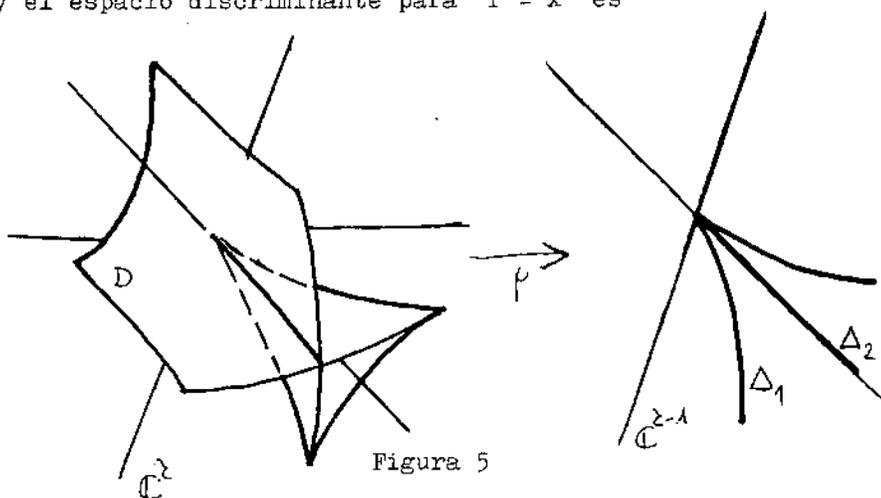


Figura 5

Si ahora tomamos un punto  $a=(a_1, \dots, a_{r-1}) \in \mathbb{C}^{r-1}$  fuera de  $\Delta$ , la recta  $Y_a = \{t_1=a_1, \dots, t_{r-1}=a_{r-1}\} \subset \mathbb{C}^r$ , corta a  $D$  en  $\mu$  puntos distintos cuya fibra presenta un único punto singular no degenerado, así, restringiendo  $G$  a la imagen inversa de  $Y_a$ , tendremos una aplicación

$$f_a = G|_1 : G^{-1}(Y_a) \rightarrow Y_a$$

con sólo un número finito  $\mu$  de puntos críticos no degenerados, luego  $f_a$  es una fibración de Picard-Lefschetz! A una aplicación como ésta se le llama una morsificación de  $f$ .

Aplicando el teorema de Ehresmann a la restricción de  $G$  a  $X-G^{-1}(D)$  con representantes adecuados se ve que

$$G_1 : X-G^{-1}(D) \rightarrow S-D$$

es un fibrado  $C^\infty$  localmente trivial, cuya restricción a la recta  $Y_0$  coincide con la fibración de Milnor, de forma que la fibra típica del fibrado  $G_1$  es también la fibra de Milnor, y cuya restricción a una recta genérica  $Y_a$  es una fibración de Picard-Lefschetz: ésta es la imagen estereográfica que quería mostrar y que aglutina una enorme cantidad de información sobre la singularidad. Ver hasta qué punto esta información, en principio analítica, lo es también topológica es un interesante problema que está por resolver.

Voy a mostrar cómo se puede utilizar la deformación semi-universal para el cálculo de la monodromía algebraica de  $(X_0, x_0)$ . Para ello tomamos en  $Y_0^* = Y_0 - \{0\}$  un punto base  $z_0$ , de forma que la monodromía esté inducida por el camino  $w: [0,1] \rightarrow S^1$ ,  $w(t) = e^{2\pi i t}$ , entonces se puede escoger un  $a \in \mathbb{C}^{r-1} - \Delta$  de forma que todos los valores críticos  $b_1, \dots, b_\mu$  de  $f_a$  estén en  $Y_a$  dentro del disco de radio  $|z_0|$ , si ahora escogemos un camino  $\gamma$  en  $\mathbb{C}^r - D$  que una  $z_0$  con el origen de  $Y_a$ , y caminos elementales  $v_1, \dots, v_\mu$  en  $Y_a$  que no rodeen más valor crítico que  $b_1, \dots, b_\mu$ , resp., y que no se corten dos a dos, resultará que  $w$  es homotopo en

$\mathbb{C}^1 - D$  a  $Y^{-1}v_\mu \dots v_1 Y$ , de forma que la monodromía  $h_* = h_w$  será equivalente a la monodromía  $h_\mu \dots h_1$  de forma que la monodromía local de Milnor sobre  $Y_0$  (un solo punto crítico degenerado) se obtiene conociendo la monodromía global de Picard-Lefschetz sobre  $Y_a$  ( $\mu$  puntos críticos no degenerados).

Ejemplo: Siguiendo con los puntos cuspidales, tomemos  $x^3 + y^2 = 0$  y veamos cómo se obtiene su monodromía algebraica utilizando la monodromía global de P-I. Si en  $\mathbb{C}^2$  ( $\mu=2$ ) tomo sólo la parte real de  $t_1$ , podré representar en  $\mathbb{R}^3$  la situación

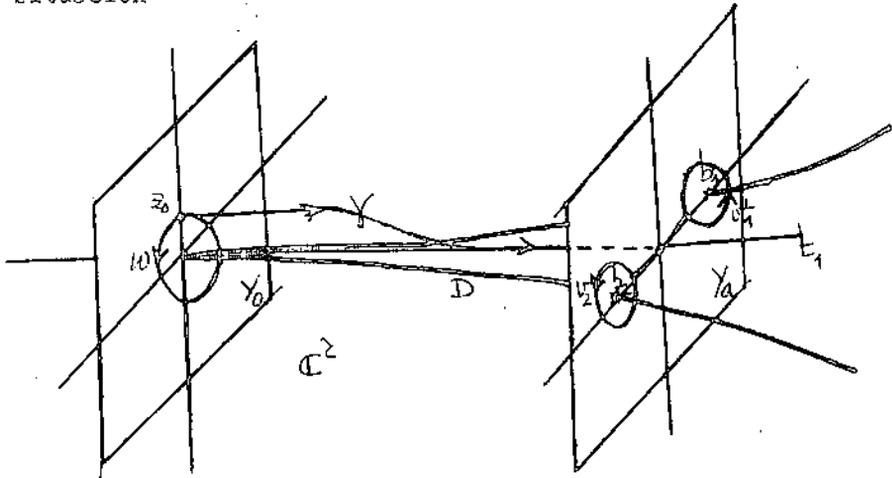


Figura 6

tomemos como base de  $H_1(\mathbb{F}, \mathbb{Z})$  los ciclos evanescentes  $s_1, s_2$  correspondientes a  $\beta_1, \beta_2$ , (esto es siempre posible por un teorema de [9]), en este caso es claro que

$$\langle s_1, s_1 \rangle = \langle s_2, s_2 \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle s_1, s_2 \rangle = \langle s_2, s_1 \rangle = 1$$

de forma que aplicando las fórmulas de P-I resulta

$$h_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad h_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y en definitiva nos da:

$$h = h_2 h_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 5. EQUIVALENCIA ANALITICA

Hasta ahora he mostrado un método de clasificación esencialmente topológico cuyo origen se encuentra en R. Thom y su teoría de catástrofes. En efecto, aunque la teoría de catástrofes está inicialmente formulada para gérmenes de funciones reales y utiliza la equivalencia diferenciable, los hechos básicos son que allí las singularidades se clasifican por su codimensión (equivalente a  $\mu-1$  en el caso complejo) y que la clasificación que se obtiene para codimensión  $\leq 4$  es finita: las siete catástrofes elementales ya famosas. Sin embargo, existía un bien conocido ejemplo de H. Whitney, precisamente las cuatro rectas que he citado en el apartado 1, que mostraba la no finitud del número de clases no equivalentes de gérmenes de codimensión 8 (ver también [39]). Fue así como R. Thom propuso sustituir la equivalencia diferenciable por la basada en el tipo topológico, a fin de mantener la clasificación por codimensiones y conjeturando, acertadamente como hemos visto en 2, que el número de clases de gérmenes de tipo topológico distinto pero de una misma codimensión sería entonces finito.

No obstante, este método ha sido contestado por V.I. Arnold, quien ha propuesto otro sistema de clasificación como alternativa. La propuesta de Arnold consiste en no abandonar la equivalencia diferenciable, o equivalencia analítica, en el caso complejo, pero sí abandonar la clasificación basada en la codimensión! Concretamente lo que propone Arnold es un nuevo invariante analítico: la modalidad del germen, y una clasificación según esta modalidad, llegando a decir:

"... algebraically the most natural classifica-

tion theorem are not those of singularities of small codimension  $c$  or of small multiplicity  $\mu$ , but the classification of singularities with small modules number,  $m^n$  [3]

Esclarecer la relación existente entre esta clasificación y la topológica (ver tabla adjunta), y, en particular, explicar qué conexión existe entre las series de Arnold y los estratos de Fukuda. la modalidad y la dimensión del estrato (ver [8]),... sería, a mi entender, un decisivo avance en la clasificación de singularidades.

Sin pretender que lo que sigue sea una introducción en el tema (ver, por ej., en [2] la bibliografía del propio Arnold) sí quiero comentar un resultado suficientemente aromático.

Antes explicaré cómo define Arnold la modalidad: si  $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  es un germen de función holomorfa con punto crítico aislado el origen, y suponemos que  $f$  está dada por un polinomio de grado  $k$  (ver [32]), entonces  $f$  define una clase  $\tilde{f}$  en el espacio vectorial de dimensión finita  $\underline{m}^2/\underline{m}^{k+1}$ , siendo  $\underline{m}$  el ideal maximal de las funciones nulas en el origen. Ahora bien, sobre este espacio  $\underline{m}^2/\underline{m}^{k+1}$  actúa el grupo  $G$  de los automorfismos analíticos  $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ , y se llama modalidad de  $f$  al mínimo número

TABLA

CLASIFICACION TOPOLOGICA DE LAS SINGULARIDADES DE NUMERO DE MILNOR  $\leq 10$  (ver [3], [17], [29], [45]).

$m$	$\mu$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0		$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_9$	$A_{10}$
					$D_4$	$D_5$	$D_6$	$D_7$	$D_8$	$D_9$	$D_{10}$
							$E_6$	$E_7$	$E_8$		
1										$T_{3,3,4}$	$T_{3,4,4}$
											$T_{2,4,5}$
											$T_{2,3,6}$
								$P_8$	$X_9$	$J_{10}$	$Q_{10}$

siendo, salvo adición de una forma cuadrática no degenerada en las restantes variables,

$$\begin{aligned}
 A_m &: x^{m+1}, \quad m \geq 1 \\
 D_m &: x^{m-1} + xy^2, \quad m \geq 4 \\
 E_6 &: x^4 + y^3 \\
 E_7 &: x^3y + y^3 \\
 E_8 &: x^5 + y^3 \\
 T_{ppr} &: x^p + y^q + z^r + axyz, \quad a \neq 0 \\
 P_8 &: x^3 + y^3 + z^3 + axyz, \quad a^3 + 27 \neq 0 \\
 X_9 &: x^4 + y^4 + ax^2y^2, \quad a^2 \neq 4 \\
 J_{10} &: x^3 + y^6 + ax^2y^2, \quad 4a^3 + 27 \neq 0 \\
 Q_{10} &: x^3 + y^4 + yz^2 + axy^3
 \end{aligned}$$

$m$  para el que existe un entorno de  $\tilde{f}$  recubierto por un número finito de familias  $m$ -paramétricas de órbitas del grupo  $G$ . A los gérmenes de modalidad cero se les llama simples.

Con este prólogo el resultado de Arnold dice:

Teorema 11 (ver [3]):  $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  es un germen de función simple si, y sólo si,  $f$  es analíticamente equivalente a uno de los siguientes:

$$A_m: x_1^{m+1} + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2, \quad m \geq 1$$

$$D_m: x_1^{m-1} + x_1 x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2, \quad m \geq 4$$

$$E_6: x_1^4 + x_2^3 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$

$$E_7: x_1^3 x_2 + x_2^3 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$

$$E_8: x_1^5 + x_2^3 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$

Aunque a partir de aquí se obtienen interesantes caracterizaciones de los gérmenes simples utilizando la monodromía (citemos como ejemplo:  $f$  es simple sii el grupo de monodromía de la deformación semiuniversal de  $f$  es finito) lo más destacable es que estas singularidades simples han ido resurgiendo en distintos estudios desde hace más de cien años. No afectar la condición de adjunción [13], racionalidad [4], elipticidad [43],... han sido criterios de clasificación que han aparecido a lo largo de estos cien años y que han conducido siempre a las mismas singularidades simples.

Explicaré concisamente la forma más antigua de obtención de estas singularidades, es debida a Schwartz y F. Klein, y aparece ligada al estudio de las funciones automorfas poliedrales. Brevemente recordaré que dichas funciones se obtienen como inversas de las funciones multiformes que se obtienen por prolongación analítica a partir de las transformaciones conformes schwartzianas, que aplican el semiplano superior del plano complejo sobre un triángulo curvilíneo. Según sea la suma de los ángulos de dicho triángulo mayor, igual o menor que  $\pi$  se obtiene como imagen de la función multiforme la esfera (caso elíptico), el plano

complejo (caso parabólico) o el semiplano hiperbólico de Poincaré (caso hiperbólico), respectivamente.

En el caso elíptico, único que quiero seguir, se obtiene una pavimentación de la esfera de Riemann formada por los triángulos curvilíneos engendrados por reflexiones sucesivas a partir del triángulo curvilíneo original. Resulta ahora que esta pavimentación se mantiene invariante por un grupo finito  $\Gamma'$  de transformaciones de Möbius,  $\Gamma' \subset \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ , así las funciones inversas que estamos buscando son funciones automorfas respecto a  $\Gamma'$ . Pero como las únicas funciones meromorfas sobre la esfera son las funciones racionales, tenemos que, tomando coordenadas proyectivas, lo que buscamos son cocientes de polinomios homogéneos en dos variables del mismo grado e invariantes por  $\Gamma'$ , antiimagen de  $\Gamma'$  en  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ . Así para resolver el problema inicial bastará con que encontremos el álgebra,  $A^{\Gamma'}$ , de polinomios homogéneos en dos variables invariantes por  $\Gamma'$ , y aquí está la sorpresa:

Teorema 12 (Schwartz-Klein, ver [14], [25]): Si  $\Gamma'$  es un grupo finito de  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ ,  $A^{\Gamma'}$  está engendrada por tres polinomios homogéneos  $x, y, z$  que satisfacen entre ellos la relación (syzygy):

$$f(x, y) + z^2 = 0$$

donde

$$f(x, y) = x^m + y^2, \quad \text{si } \Gamma' \text{ es el grupo cíclico de orden } m.$$

$$f(x, y) = x^{m-1} + xy^2, \quad \text{si } \Gamma' \text{ es el grupo diedral binario de orden } 4m-4.$$

$$f(x, y) = x^4 + y^3, \quad \text{si } \Gamma' \text{ es el grupo tetraedral binario.}$$

$$f(x, y) = x^3y + y^3, \quad \text{si } \Gamma' \text{ es el grupo octaedral binario.}$$

$$f(x, y) = x^5 + y^3, \quad \text{si } \Gamma' \text{ es el grupo icosaedral binario.}$$

¡exactamente las singularidades simples en  $\mathbb{C}^2$ !

Ya sólo me queda agradecer a J. Ferrer, F. Panyella y F. Puerta la ayuda que me prestaron en la elaboración de este trabajo, mi reconocimiento a los tres.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] A'Campo, N.: Le nombre de Lefschetz d'une monodromie, Indag. Math., 35 (1973), 113-118.
- [2] Arnold, V.I.: Critical points of smooth functions, Proc. Int. Congress Math. (1974), vol. 1, 19-39.
- [3] Arnold, V.I.: Local normal forms of functions, Invent. Math. 35 (1976), 87-109.
- [4] Artin, M.: On isolated rational singularities of surfaces, Amer. J. Math., 88 (1966), 129-136.
- [5] Brauner, K.: Zur geometrie der funktionen zweier komplexen veranderlichen III, IV, Abh. Math. Sem. Hamburg, 6 (1928), 8-54.
- [6] Brieskorn, E.: Examples of singular normal complex spaces which are topological manifolds, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 55 (1966), 1395-1397.
- [7] Brieskorn, E.: Beispiele zur differentialtopologie von singularitäten, Invent. Math. 2 (1966), 1-14.
- [8] Brieskorn, E.: Rationale singularitäten komplexer flachen, Invent. Math. 4 (1967-68), 336-358.
- [9] Brieskorn, E.: Die monodromie der isolierten singularitäten von hyperflachen, Manuscripta Math. 2 (1970), 103-161.
- [10] Burau, W.: Kennzeichnung der schlauchknoten, Abh. Math. Sem. Hamburg, 9 (1932), 125-133.

- [11] Bureau, W.: Kennzeichnung der schlauchverbettungen,  
Abh. Math. Sem. Hamburg, 10, (1934), 285-397.
- [12] Durfee, A.: Fibered knots and algebraic singularities,  
Topology 13, (1974), 47-60.
- [13] Du Val, P.: On isolated singularities which do not  
affect the conditions of adjunction, I,  
II, III, Proc. Cambridge Philos. Soc. 30,  
(1934), 453-465, 483-491.
- [14] Du Val, P.: Homographies, quaternions and rotations,  
Oxford, 1964.
- [15] Fary, I.: Cohomologie des variétés algébriques,  
Annals of Math. 65 (1957), 21-73.
- [16] Fukuda, T.: Types topologiques des polynômes, Publ.  
Math. I.H.E.S. 46 (1976), 87-106.
- [17] Gabrielov, A.M.: Dynkin diagrams for unimodal singu-  
larities, Funct. Anal. 8 (1974),  
192-196.
- [18] Gabrielov, A.M.: Bifurcations, Dynkin diagrams and  
modality of isolated singularities,  
Funct. Anal. Appl. 8 (1974), 94-98.
- [19] Grauert, H.: Über die deformation isolierter singu-  
laritäten analytischer mengen, Invent.  
Math. 15 (1972), 171-198.
- [20] Hirzebruch, F.: The topology of normal singularities  
of an algebraic surface (d'après  
Mumford), Séminaire N. Bourbaki 15,  
(1962/63), n. 250.
- [21] Hirzebruch, F.: Singularities and exotic spheres,  
Séminaire N. Bourbaki, 19 (1966/67),  
n. 314.
- [22] Hirzebruch, F. y Mayer, K.H.: Differentiarbe  $O(n)$ -  
Mannigfaltigkeiten, exotische sphären,  
und singularitäten, Lecture Notes 57,  
Springer-Verlag, 1968.

- [23] Kähler, K.: Über die Verzweigung einer algebraischen Funktion zweier Veränderlichen zu der Umgebung einer singulären Stelle, Math. Zeit., 30 (1929), 188-204.
- [24] King, H.C.: Topological type of isolated critical points, Annals of Math. 107 (1978), 385-397.
- [25] Klein, F.: Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree, Dover, 1956.
- [26] Kuiper, N.H.: Algebraic equations for nonsmoothable 8-manifolds, Publ. Math. I.H.E.S. 33, (1967), 139-155.
- [27] Lamotke, K.: Die Homologie isolierter Singularitäten, Math. Z. 143 (1975), 27-44.
- [28] Lê, D.T.: Calcul des cycles évanesçants des hypersurfaces complexes, Ann. Inst. Fourier, 4 (1973), 261-270.
- [29] Lê, D.T. y Ramanujan, C.P.: The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type, Amer. J. Math. 98 (1976), 67-78.
- [30] Lefschetz, S.: L'analysis situs et la géométrie algébrique, Gauthiers-Villars, 1924.
- [31] Levine, J.: An algebraic classification of some knots of codimension two, Comment. Math. Helvet. 45 (1970), 185-198.
- [32] Mather, J.: Stability of  $C^\infty$ -mappings III, finitely determined map-germs, Publ. Math. I.H.E.S. 35 (1968), 127-156.
- [33] Milnor, J.: Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Math. Studies 61, Princeton Univ. Press, 1968.

- [34] Mumford, D.: The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Publ. Math. I.H.E.S. 9 (1961), 229-246.
- [35] Pham, F.: Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrals, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 333-367.
- [36] Pham, F.: Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau, Gauthier-Villars, 1967.
- [37] Picard, E. y Simart, G.: Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendants, vol I, Gauthier-Villars, 1897.
- [38] Sebastiani, M. y Thom, R.: Un résultat sur la monodromie, Invent. Math. 13 (1971), 90-96.
- [39] Siersma, D.: The singularities of  $C^\infty$ -functions of right-codimension smaller or equal than eight, Indag. Math. 35 (1973), 31-37.
- [40] Teissier, B.: Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney, Astérisque 7/8 (1973), 285-361.
- [41] Thom, R.: La stabilité topologique des applications polynomiales, L'Enseignement Math. 8 (1962), 24-33.
- [42] Thom, R.: Stabilité structurelle et morphogénèse, Benjamin, 1972.
- [43] Tjurina, G.N.: The topological properties of isolated singularities of complex spaces of codimension one, Math. USSR - Izvestija, 2 (1968), 557-571.
- [44] Tjurina, G.N.: Locally semiuniversal flat deformations of isolated singularities of complex spaces, Math. USSR - Izvestija, 3 (1970), 967-999.

- [45] Varchenko, A.N.: Zeta-function of monodromy and  
Newton's diagram, Invent. Math. 37  
(1976), 253-262.
- [46] Zariski, O.: Some open questions in the theory of  
singularities, Bull. A.M.S. 77 (1971),  
481-491.

Departamento de Matemáticas, E.T.S.I.I.B.  
Universidad Politécnica de Barcelona.