

Carles Simó

Secció de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

On considère le problème des n corps. Une des graves difficultés dans le traitement mathématique est l'existence de collisions. Si deux ou plus des corps tendent vers un même point pour $t \rightarrow t_0$ les équations différentielles

$$\ddot{z}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j (z_j - z_i)}{r_{ij}^3}, \quad i=1+n,$$

ont une singularité. On peut essayer de régulariser le problème, c. à d. de prolonger la solution pour $t > t_0$.

Il y a deux méthodes de régularisation très employées en Mécanique Céleste: Analytique et géométrique [3]. La première a été employée par Sundman, et Siegel. Si la solution peut s'exprimer comme series

$$S((t_0-t)^{\alpha_1}, (t_0-t)^{\alpha_2}, \dots)$$

pour $t < t_0$, le prolongement pour $t > t_0$ a besoin de $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ rationnels et de dénominateur impair. À la collision double il y a une seule valeur de α ; elle est égale à $2/3$ et pour le tant, régularisable.

Géométriquement (Easton) on peut prolonger la solution à travers la singularité si, en enlevant un voisinage de cette, il existe continuité par rapport aux conditions initiales. Plus exac-

(*) Exposé fait au Sémi. de Mécan. Céleste, Inst. Henri Poincaré, Paris, 12 Mai 1978.

tement, soit, dans le cas qui nous intéresse, x_0 un point dont la trajectoire mène à collision au bout d'un temps t_0 . On prend une suite (x_n) tendant vers x_0 telle que les trajectoires par x_n n'aboutissent pas à collision (au moins localement). Soit

$t_1 > t_0$ et $x(x_n, t_1)$ le transport pendant un temps t_1 du point x_n par le flux. S'il existe $x^0(t_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(x_n, t_1)$ indépendant

de la suite choisie, alors semble naturel de définir la prolongation à travers la collision par $x(x_0, t_1) = x^0(t_1)$. On dira que la collision (singularité) est régularisable. Ça c'est possible à la collision double, coincide avec la régularisation analytique et physiquement correspond à une collision élastique: conservation de l'énergie et de la droite qui porte le mouvement. Cela suffit à déterminer le mouvement après la collision. On ne voit pas que ce soit le cas si $n=3$.

Il faut dire qu'aucune des méthodes de régularisation implique l'autre; tous les cas possibles se donnent sur des exemples [3].

Quoique les orbites de collision remplissent seulement des variétés de codimension positive, le passage près d'une collision semble fréquent. On va exposer quelques résultats sur la collision triple qu'on trouve à [2, 6, 7].

Nous considérons d'abord la régularisation analytique. On sait [5] que la position relative tend vers une des p.e.r. d'Euler ou Lagrange (cf. [8]). Dans ses recherches fondamentales en 1941, Siegel [5] trouva les 8 exposants caractéristiques associés aux équations variationnelles par rapport à la solution parabolique homothétique. Ses valeurs sont $2/3$ (associée

à variation d'énergie), $-1/3$ (à variation du moment cinétique), 0 (à rotation des coordonnées) et -1 (à changement de l'origine du temps). Ces sont communes aux cas Euler et Lagrange. Les autres sont

$$(\pm \sqrt{25+16k} - 1)/6, \quad (\pm \sqrt{1-8k} - 1)/6$$

pour le cas colinéaire, et

$$(\pm \sqrt{13 \pm 12k} - 1)/6$$

pour le cas en triangle équilatère. Le paramètre k est une fonction continue des masses qui varie entre 0 et 7 (Euler) ou entre 0 et 1 (Lagrange) [10].

Seules les valeurs positives deviennent exposants d_i .

À [6] on montre le

Théorème. - L'ensemble des masses pour lesquelles la collision triple es prolongeable analytiquement, soit en le cas Euler, soit en le cas Lagrange, est constitué par un ensemble dénombrable et dense de courbes dans le triangle de masses (cf. [8]).

McGehee [2] a introduit une formulation convenable pour l'étude de la régularisation Easton. Voici les points essentiels:

Soient $m_j > 0$, $q_j, p_j \in \mathbb{R}^V$ les masse, position et moment du j -ième corps ($V=1,2,3$ selon qu'on fasse l'étude sur la droite, plan ou espace). On définit:

$$M = \begin{pmatrix} m_1^V & & 0 \\ & m_2^V & \\ 0 & & m_3^V \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$$T = 1/2 p^T M^{-1} p, \quad U = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}, \quad B = (I_x, I_y, I_z), \quad A = EM.$$

Les équations du mouvement sont

$$\dot{q} = M^{-1} p, \quad \dot{p} = -\nabla U(q),$$

avec les intégrales

$$A_{q_i} = 0, \quad B_p = 0, \quad T(p) - U(q) = h.$$

Soit $I = r^2 = q^T M q$ le moment d'inertie. On fait le changement de variables

$$f = q/r, \quad g = pr^{1/2}, \quad \text{si } r > 0, \quad dt' = r^{-3/2} dt,$$

qui conduit aux équations

$$\begin{aligned} r' &= r(g, f) \\ f' &= -(g, f)f + M^{-1}g \\ g' &= (g, f)g/2 + \nabla U(f), \end{aligned}$$

(' = $\frac{d}{dt'}$, (,) = produit scalaire) avec les intégrales

$$Af = 0, \quad f^T M f = 1, \quad Bg = 0, \quad T(g) - U(f) = rh.$$

C'est clair que $r=0$ équivaut à collision triple. Si $r > 0$ le flux est difféomorphe au flux original. On peut faire

(soit en les variables q, p , soit en r, f, g) la régularisation des collisions doubles. Le point $r=0$ est devenu la variété de dimension $4\nu - 2$ (compte tenu des intégrales)

$$C = \left\{ (f, g) \in S^{2\nu-1} \times R^{2\nu} \mid T(g) = U(f) \right\}.$$

C'est invariante, indépendante de l'énergie et on va l'appeler variété de collision triple (v.c.t.). Toute cette formulation peut s'étendre à la collision simultanée de n corps. Alors on doit substituer C par

$$\left\{ (f, g) \in S^{(n-1)\nu-1} \times R^{(n-1)\nu} \mid T(g) = U(f) \right\}$$

(variété de collision totale).

Dans ce cadre on a [7] le

Théorème.— Sur la v.c.t. nous avons $(g, f)' > 0$ (c. à d., flux type gradient). Les points d'équilibre sont les solutions homographiques :

$$f_e = M^{-1} \nabla U(f_e) / U(f_e); \quad g_e = \pm \sqrt{2U(f_e)} M f_e.$$

(+ = éjection, - = collision).

Passons au cas des trois corps sur une droite ($\nu=1$). On peut toujours supposer $q_1 \leq q_2 \leq q_3$. McGehee [2] a écrit les équations qu'on obtient sur la v.c.t. si on régularise les collisions doubles. Alors C devient une variété diffeomorphe à une sphère moins quatre points (fig. 1). Les quatre régions "cylindriques"

attachées à la sphère correspondent à collisions des corps 1 et 2 ou 2 et 3 avant la collision ou éjection triple, respectivement. Dans les travaux de McGehee la variable verticale est nommée v et correspond à notre (f, g) et les variables horizontales sont s et w . On a les collisions binaires pour $s = \pm 1$.

Soient P_1 (collision) et P_2 (éjection) les deux points critiques du flux. Ils sont hyperboliques. Le principal des résultats de McGehee consiste en établir qu'une condition nécessaire pour la régularisation de la collision triple du problème sur la droite est que la variété invariante instable de P_1 coïncide avec la variété stable de P_2 .

Si cette condition n'est pas remplie, points d'un côté et d'autre près de la v.i. stable de la collision triple qu'y arrivent avec collision 1-2 sortent de l'éjection avec collisions 1-2 et 2-3, respectivement. Cela empêche la régularisation. (Ici la codimension 1 est importante).

La coïncidence des variétés étant un problème global, doit se faire numériquement [6,7]. Si nous considérons le cas symétrique, $m_1 = m_3$, pour chaque valeur de $n \geq 3$, il existe exactement une valeur de m_2 , disons $m_{2,n}$, telle que la condition nécessaire est satisfaite et que la situation (sur C) est décrite comme suit:

Il y a une phase d'approchement à la collision triple. Par exemple, une suite de collisions m_1, m_2 . Après, $n-1$ collisions alternatives de m_2 avec m_1 et m_3 . Finalement une éjection avec collisions de m_2 avec m_1 ou m_3 selon n soit pair ou impair. La table 1 offre quelques valeurs de $m_{2,n}$ (voyez [7]). On peut étudier (cf. aussi [4]) le cas limite $m_2 \ll 1$. Une analyse des

termes plus importants (on exclut ces de valeur relative $O(\sqrt{m_2})$), prouve que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{m_{2,n}} = \pi$.

Pour certains cas est préférable la formulation de [1] à celle de [2] (cf. [6]).

Passons au cas asymétrique $m_1 \neq m_3$. Alors il est possible (compte tenu des symétries du problème) qu'une branche de la v.i. instable de P_1 coïncide avec une de la v.i. stable de P_2 , mais que ce ne soit pas le cas pour l'autre branche. Cependant, si n est pair, la coïncidence de deux des branches implique celle des autres. La fig. 2 montre les valeurs des masses qui remplissent la condition nécessaire. Résumant:

La régularisation Easton de la collision triple du problème rectiligne implique que les masses appartiennent à un ensemble dénombrable non dense de courbes du triangle des masses, symétriques par rapport à la droite $m_1 = m_3$, ou à un ensemble dénombrable de points qui se trouvent sur $m_1 = m_3$, séparés par les courbes antérieures. Ainsi, en particulier, on répond affirmativement à la conjecture faite par McGehee à [2].

Le problème devient plus intéressant encore dans le cas plan. La v.c.t. est

$$\{(f, g) \in S^3 \times R^4 \mid T(g) = U(f)\}.$$

À cause de la symétrie par l'action de S^1 il suffit de considérer $f \in S^2$. Il faut enlever les trois points de collision double. Si on exclut ces collisions binaires C est difféomorphe à

$$S^1 \times (S^2 - 3) \times S^3.$$

Sauf un changement d'échelle les exposants caractéristiques des points d'équilibre (type éjection) du flux sont exactement les exposants de Siegel. On doit supprimer les valeurs $2/3$ et -1 (et aussi le 0 si on fait quotient par S^1). À la collision on trouve changement des signes. On a [7] :

Théorème.— On suppose le problème plan des trois corps ayant fait le quotient de la v.c.t. par S^1 . Il y a 10 points critiques pour le flux. Tous sont hyperboliques. Trois sont les cas Euler collision avec variété stable de dimension 1 et instable de dimension 4; deux sont Lagrange collision avec dimensions 2 et 3 respectivement. Les autres 5 sont symétriques des antérieures par rapport à $f=0$, correspondent à collision et ont les dimensions des variétés invariantes échangées avec les cas de collision. (De ce théorème il faut exclure le cas Lagrange avec masses égales. Une des cinq valeurs propres devient zéro [5]).

Si on se restreint à la droite, 2 des valeurs propres subsistent. Ces sont

$$(\pm \sqrt{25+16k} - 1)/6$$

à l'éjection. On peut dire, donc, que la v.i. instable du point P_1 est submergée en une v. instable de dimension 4 et donne la direction d'éloignement plus rapide du point d'équilibre.

La régularisation Easton de la collision triple type Euler considérée dans le plan doit se faire, si possible, avec masses choisies entre celles de la fig. 2. En outre il faut ajouter quelques conditions nécessaires supplémentaires: le transport de l'espace tangent à la variété instable au point

de collision, au long de la variété 1-dimensionnelle d'éloignement rapide doit donner l'espace tangent à la v. stable au point d'éjection. Ces calculs sont en train de se faire numériquement. Des questions pareilles se posent pour la collision triple type Lagrange.

On peut finir cet exposé proposant quelques questions relatives (certaines d'entre elles ont été déjà signalées par McGehee [2]).

Si la condition nécessaire de régularisation Easton sur la droite est satisfaite, est vraiment régularisable la collision triple? Faut-il exclure encore d'autres masses? Considérons (pour masses de l'ensemble de la fig. 2) un des "cylindres" inférieurs de la v.c.t. Si on coupe par $v=ctant$, on a une circonférence. Une couronne qui ait cette circonférence comme frontière intérieure représente conditions initiales prochaines à la v.c.t. La distance à cette variété est une mesure de r . On suppose n pair. Alors le flux sortira en haut de l'autre côté. On prend là une couronne pareille. Il faut voir que le passage de l'une à l'autre est un difféomorphisme (aussi par rapport au temps physique).

S'il y a masses telles que la régularisation Easton soit possible, peuvent se trouver sur l'ensemble des masses régularisables Siegel. Y a-t-il de rapport entre les deux régularisations?

Il faut faire l'étude à l'espace s'il y a de solutions régularisables dans le cas plan. En fait, on soupçonne que ces solutions n'existent pas.

Qu'on peut dire du caractère global des variétés invariantes des points critiques? On doit considérer ces variétés dans l'espace r, f, g .

Comment on peut décrire quantitativement le passage près d'une collision triple? A cet égard on trouve d'intéressants résultats à [11] et de nombreuses expériences numériques (cf. par exemple [9]).

REFERENCES

- [1] Irigoyen, M., Nahon, F.: "Les mouvements rectilignes dans le problème des trois corps lorsque la constante des forces vives est nulle", *Astron. & Astrophys.* 17 (1972), 286-295.
- [2] McGehee, R.: "Triple collision in the collinear three-body problem", *Invent. Math.* 27 (1974), 191-227.
- [3] McGehee, R.: "Triple collision in Newtonian gravitational systems", à "Dynamical Systems, Theory and Applications", 550-572, LN in Phys. 38, Ed. J. Moser, Springer 1975.
- [4] Marchal, Ch.: "Qualitative Methods and results in Celestial Mechanics", T.P. 1975-77, O.N.E.R.A.
- [5] Siegel, C.L., Moser, J.K.: "Lectures on Celestial Mechanics", Springer 1971.
- [6] Simó, C.: "Una nota sobre colisión triple", *Actas II Asamb. Astron. y Astrofís.*, Cádiz, 1977.
- [7] Simó, C.: "Masas para la regularización de la colisión triple", *Actas Jorn. Mat. Luso-Espanholas*, Aveiro 1978.
- [8] Simó, C.: "Solutions homographiques du problème plan des 4 corps". *Pub. Mat. UAB*, 8 (1978)

- [9] Szebehely, V.: "Numerical investigation of a one-parameter family of triple close approaches occurring in Stellar Systems", *Astron.J.* 79 (1974), 1449-1454.
- [10] Waldvogel, J.: "The three-body problem near triple collision", *Cel. Mech.* 14 (1976), 287-300.
- [11] Waldvogel, J.: "Triple collision as an unstable equilibrium", *Bull. Sci. Belgique*, 63 (1977), 34-50.

TABLE 1

n	3	4	5	6	7	8
$m_{2,n}$.3465485	.1945954	.1303468	.0957020	.0743298	.0599666
n	9	10	11	12	13	14
$m_{2,n}$.0497243	.0420964	.0362238	.0315828	.0278365	.0247591
n	15	16	17	18	19	20
$m_{2,n}$.0221938	.0200285	.0181808	.0165894	.0152072	.0139979
n	21	22	23	24	25	
$m_{2,n}$.0129328	.0119892	.0111488	.0103966	.0097204	

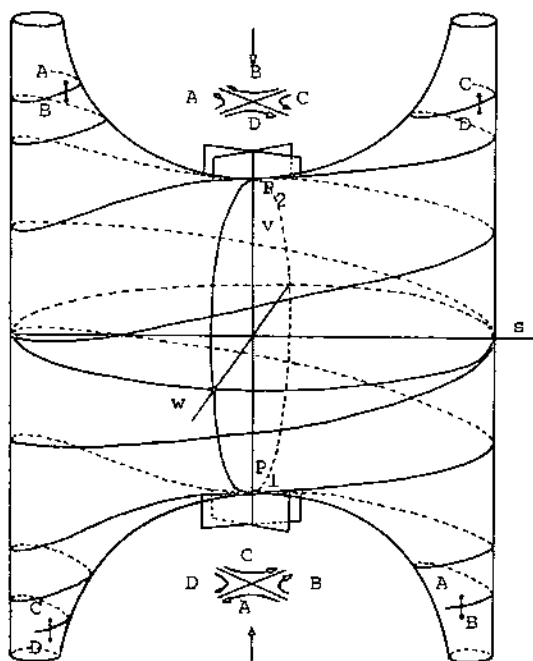


Fig. 1

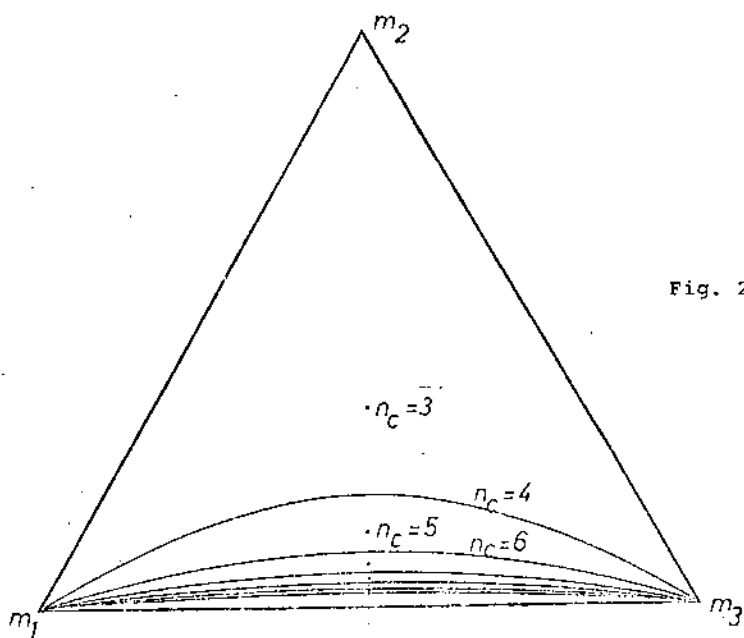


Fig. 2