SUR UNE CONJECTURE DE GANEA (*)

(G. Mislin)

Dans cette exposé nous voulons considérer un cas particulier d'un résultat obtenu en collaboration avec P. Hilton et J. Roitberg [2].

Soit X un CW-complexe pointé et connexe. On dit que X est un H'-espace, s'il admet une application $c: X \to X \vee X$ tel que $p_i\, c \simeq 1_X$, où $p_i (i = 1,2)$ dénotent les projections évidentes. Dans [1] Ganea avait conjecturé que tout H'-espace X admet (à une homotopie près) une décomposition en $Z \vee B$ ou Z est 1-connexe et B un bouquet de cercles: $B = S^1 \vee S^1 \vee \ldots \vee S^1$. On peut facilement vérifier cette conjecture quand X est suspension.

Rappelons qu'un ensemble M muni d'une opération binaire notée " + " est une structure de <u>loop</u>, si les équations

$$a + x = b, \quad y + a = b$$

ont des solutions uniques $x,y \in M$ pour tout $a,b \in M$, et si de plus, il existe $0 \in M$ tel que $a + 0 = 0 + a = a$ pour tout $a \in M$.

Nous appelons un H'-espace X (muni d'une comultiplication fixe c) un <u>co-loop</u>, si pour tout Y

$$c^* : [X,Y] \times [X,Y] \to [X,Y]$$

induit une structure de loop dans l'ensemble [X,Y] des classes d'homotopies pointées de X dans Y. Par exemple, on peut montrer [2] que pour un H'-espace X qui est 1-connexe, toute comultipli

(*) Cet article résume le contenu d'une conférence que l'auteur a prononcé a l'U.A.B. le 18.5.77

cation c définit une structure de co-loop dans X. D'où il est évident que tout H'-espace de la forme $Z \vee B$, où Z est 1-connexe et B un bouquet de cercles, admet une structure de co-loop. Notre résultat principal est le suivant.

<u>Théorème</u>: Si X admet une struture de co-loop, alors $X \simeq Z \vee B$ avec Z 1-connexe et B un bouquet de cercles.

En particulier, ce théorème implique que la "conjecture de Ganea" est équivalente à la conjecture suivante:

"Tout H'- espace admet une structure de co-loop"

<u>Démonstration du théorème</u>. D'après un théorème classique, $\pi_1 X$ est un groupe libre F. L'espace d'Eilenberg-MacLane K(F,1) est donc un bouquet de cercles B. Considérons l'application classifiante $f: X \to B$ pour le revêtement universel de X. Comme $\pi_1 X$ est libre, on a une section $u: B \to X$. Il est facile de voir que B peut être muni d'une structure (unique) d'H'-espace tel que f et u soient des H'-applications (c.à.d. que pour tout Y, $u^*: [X,Y] \to [B,X]$ et $f^*: [B,Y] \to [X,Y]$ vont être des homomorphismes). Soit $g: X \to C(u)$ l'inclusion de X dans le cône de l'application u. On peut définir, alors, sur C(u) une structure d'H'-espace tel que g soit une H'-application. Posons $C(u) = Z$. Evidemment , Z est 1-connexe. Dans ce qui suit nous allons souvent identifier des applications avec leurs classes d'homotopies pointées qu'elles représentent. Notons qu'on a par construction

$$uf = 1_B$$

Comme $[X,X]$ est un loop, il existe $t \in [X,X]$ tel que

$$t + fu = 1_X$$

D'autre part $f^*: [X,X] \to [B,X]$ est un homomorphisme, d'où $(t + fu)f = tf + fuf = tf + f = f^*(1_X) = f$. On conclut que $tf = 0$

car $[B,X]$ est un loop. Puisque la suite

$$[Z,X] \xrightarrow{g^*} [X,X] \xrightarrow{f^*} [B,X]$$

est exacte, il existe $v \in [Z,X]$ tel que $t = vg$. Par conséquent on obtient un diagramme

$$B \underset{u}{\overset{f}{\rightleftarrows}} X \underset{v}{\overset{g}{\rightleftarrows}} Z \qquad \text{avec}$$

(i) $vg + fu = 1_X$

(ii) $uf = 1_B$

(iii) $gv = 1_Z$

pour établir la troisième égalité nous observons d'abord que $g^*: [Z,Z] \to [X,Z]$ est injective. Cela resulte du fait que pour un homomorphisme, dont le domaine est un loop ($[Z,X]$ est un loop puisque Z est 1-connexe), la condiction $(g^*)^{-1}(0) = 0$ implique que g^* est injective. Considérons alors l'équation

$$g = g(vg + fu) = gvg + gfu = gvg.$$

g^* étant injective $1_Z = gv$.

Nous voulons montrer maintenant que

$$\langle v,f\rangle: Z \vee B \to X$$

est une équivalence d'homotopie, avec inverse $i_Z g + i_B u \in [X, Z \vee B]$.

On a d'une part

$$\langle v,f\rangle(i_Z g + i_B u) = \langle v,f\rangle\, i_Z g + \langle v,f\rangle\, i_B u =$$

$$= vg + fu = 1_X$$

et d'autre part

$$(i_Z g + i_B u)\langle v,f\rangle = \langle (i_Z g + i_B u)v, (i_Z g + i_B u)f\rangle .$$

Comme $1_{Z \vee B} = \langle i_Z, i_B\rangle$, il reste a montrer que

(i) $(i_Z g + i_B u)v = i_Z : Z \to Z \vee B$

(ii) $(i_Z g + i_B u)f = i_B : Z \to Z \vee B.$

Considérons les équations

$$\begin{aligned} i_Z g + i_B u &= (i_Z g + i_B u)(vg + fu) \\ &= (i_Z g + i_B u)vg + (i_Z g + i_B u)fu \\ &= (i_Z g + i_B u)vg + (i_Z gf + i_B uf)u \\ &= (i_Z g + i_B u)vg + i_B u. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé jusqu'ici ces trois conditions: f est une H'-application, $gf = 0$ et $uf = 1_B$. Comme $[X, Z \vee B]$ est un loop, on conclut que $i_Z g = (i_Z g + i_B u)vg$. Mais $g^*: [Z, Z \vee B] \to [X, Z \vee B]$ étant injective $i_Z = (i_Z g + i_B u)v$, c'est à dir que (i) est démonstré. L'équation (ii) est immédiate: comme f est une H'-application, nous concluons que

$$(i_Z g + i_B u)f = i_Z gf + i_B uf = 0 + i_B = i_B.$$

ce qui achève la démonstration du Théorème.

BIBLIOGRAPHIE:

[1] T. Ganea: Cogroups and suspensions, Invt. Math. 9(1970) 185-197.

[2] P. Hilton, G. Mislin and Roitberg,J: On Co-H-spaces, Comment. Math. Helv.(to appear).