

POSICIONES DE EQUILIBRIO RELATIVO DEL PROBLEMA DE 3+1 CUERPOS

Y SU EVOLUCION

C.Simó

Resumen.- Se estudian las p.e.r. del problema de 4 cuerpos en que una de las masas es infinitesimal y la evolución de las mismas en función de las relaciones entre las 3 masas finitas. También se examina el comportamiento cuando se aumenta la masa infinitesimal hasta el valor común de las otras 3. Se indica la evolución del índice y se dan valores de las masas para los que el potencial normalizado no es función de Morse.

Introducción.- Un tipo particular de soluciones del problema de n cuerpos consiste en las llamadas p.e.r. en las que el movimiento se reduce a un giro con velocidad angular constante ω alrededor del c.d.m. Su conocimiento es además un paso previo a la clasificación topológica de los conjuntos I_{cp} (formados por los puntos del espacio fásico de energía y momento angular dados) (véase [7]).

Si r_i es la distancia de la masa m_i al c.d.m. y r_{ij} la distancia entre m_i y m_j , un resultado clásico (véase [7], [1] p.242) asegura que las p.e.r. corresponden a los puntos críticos de la función potencial $V = - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n m_i m_j / r_{ij}$ restringida a la esfera $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = 1$, esto es, del potencial normalizado $V_n = V \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n m_i r_i^2} / 2$. Se supondrá que $\sum_{i=1}^n m_i = 1$.

Junto a resultados clásicos ([1] pp.228-257, [3]) se dispone recientemente de un destacado estudio topológico debido a Palmore ([4], [5]).

Las ecuaciones que caracterizan las p.e.r. son

$$\sum_{i, j \neq k=1}^n m_k (i, j, k) (r_{ik}^{-3} - r_{jk}^{-3}) = 0 \quad (1)$$

(cf. [1] p.241). siendo $(i, j, k) = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} = 2$ veces el área

del triángulo de vértices m_i, m_j, m_k (con el signo correspondiente). (Suponemos x_i, y_i las coordenadas de m_i en el plano que contiene todas las masas).

Si los n cuerpos están alineados el teorema de Moulton (véase [1] p.235, [7]) afirma que para valores cualesquiera de las masas existen $n!/2$ p.e.r.

§1. Problema de 3+1 cuerpos con masas finitas iguales.- Entendemos por problema de 3+1 cuerpos el caso particular del problema de 4 cuerpos en que una de las masas es infinitesimal (pero no nula). Obviamente su influencia sobre las p.e.r. de las tres masas finitas es despreciable, por lo que éstas adoptan una configuración de Lagrange o de Euler. En el primer caso si fijamos m_1 en $(-1, 0)$, m_2 en $(1, 0)$ y m_3 en $(0, \sqrt{3})$ y llamamos x, y a las coordenadas de m_4 , de (1) se tiene :

$$\left. \begin{aligned} -2y \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}} \right] m_2 + (\sqrt{3}(x+1) - y) \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{(x^2 + (y-\sqrt{3})^2)^{3/2}} \right] m_3 = 0 \\ 2y \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{((x+1)^2 + y^2)^{3/2}} \right] m_1 + (\sqrt{3}(x-1) + y) \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{(x^2 + (y-\sqrt{3})^2)^{3/2}} \right] m_3 = 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

Otra posibilidad para hallar la posición de m_4 consiste en calcular los puntos estacionarios de la suma del potencial

gravitatorio creado por m_1, m_2, m_3 y el potencial centrífugo :

$$-\left[\frac{m_1}{((x+1)^2 + y^2)^{1/2}} + \frac{m_2}{((x-1)^2 + y^2)^{1/2}} + \frac{m_3}{(x^2 + (y-\sqrt{3})^2)^{1/2}} + \frac{1}{16}((x+m_1-m_2)^2 + (y-m_3/\sqrt{3})^2) \right] \quad (3)$$

Consideremos primero el caso $m_1 = m_2 = m_3$. El problema, resuelto por Lindow, Schaub y Hütterhain ([1] p.245), presenta las soluciones que, salvo simetrías, se reducen a 4. En la fig.1 aparecen las posiciones de las mismas y las curvas $U = \text{cte.}$ pasando por ellas. Las coordenadas de L_0, L_1, L_4, L_7 son : $L_0 (0, \sqrt{3}/3), L_1 (0, .099433651\dots), L_4 (0, -1.293021664\dots), L_7 (0, 2.937347079\dots)$ (las ordenadas son ceros de un polinomio de grado 12). Los demás puntos se obtienen por giros de ángulo $2\pi/3$ y $4\pi/3$ alrededor de L_0 .

Si m_3 está en $(0,0)$ (posición de Euler), U se sustituye por una función análoga \bar{U} y aparecen L_{10} y L_{11} , simétricas, de coordenadas $(0, \pm 1.139428225\dots)$.

Todas las soluciones indicadas son simétricas. Cada una de ellas puede ser prolongada (*) variando m_4 desde cero al valor común de las otras tres masas. Trivialmente las soluciones obtenidas serán simétricas. Condiciones iniciales distintas pueden evolucionar hacia p.e.r. del mismo tipo. Así, partiendo de L_0 o de L_{10} se llega a triángulo equilátero pero con dos masas permutadas.

Sabemos ([2], [4]) que en el caso de masas iguales los únicos tipos de p.e.r. simétricas no colineales son :

- a) Tres masas formando triángulo equilátero y la cuarta en el centro.
- b) Cuatro masas en los vértices de un cuadrado. Junto con

(*) La prolongación de las p.e.r. al variar una masa son siempre posibles en el problema lineal, pero no así en el plano.

la anterior son las soluciones clásicas conocidas. Esta es la única solución convexa.

- c) Tres masas formando un triángulo isósceles (de base, el lado desigual, que vale 2 y altura 1.8172393947238384... salvo factores de escala) y la cuarta masa sobre la altura correspondiente a dicha base y a distancia .6503784729520660... .

Además ([4]) se conocen 4 tipos más de p.e.r. asimétricas (2 de los cuales se obtienen por simetría axial a partir de los otros 2) y en cada una de las cuales 3 masas están en los vértices de un triángulo escaleno y la cuarta en el interior.

Las 12 posiciones del tipo Moulton se obtienen así: Sean $(-x, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(x, 0)$ (con $x > 1$) las coordenadas de m_1 . Entonces x satisface la ecuación $x^7 - 2x^5 - 25x^4 + x^3 - 6x^2 - 1 = 0$, que tiene un único cero positivo: $x = 3.162120398...$

Los valores de V_n para cuadrado, triángulo isósceles, equilátero y Moulton, con $m_1 = 1/4$, son, respectivamente, $-.1691941738...(\frac{4+\sqrt{2}}{32})$, $-.1811095060...$, $-.1811110924...(\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{64})$ y $-.2138777960...$.

Obsérvese que la diferencia relativa entre el caso equilátero y el isósceles es de $.88 \cdot 10^{-5}$, por lo que existe cierta dificultad en la determinación numérica del caso isósceles. Análogos problemas se presentan en las soluciones asimétricas.

Teniendo en cuenta que por permutación de masas cada clase puede originar otras (véase §3), se conocen en total 146 p.e.r. del caso de masas iguales.

En la fig.2 se esquematiza cómo evolucionan las p.e.r. cuando aumenta la masa infinitesimal. Se obtienen todas las soluciones simétricas del caso de masas iguales. Para una posible explicación véase §3.

§2. Caso 3+1. Masas finitas distintas. - Consideremos en (2) ó (3) el caso $m_1 \leq m_2 \leq m_3$ (los demás casos se tienen por simetría) y veamos cómo se alteran las posiciones de los puntos L_i al variar m_1, m_2, m_3 .

De la ecuación (3) o a la vista de la fig.1 se tiene que para m_4 coincidiendo con m_i ($i=1,2,3$), U vale $-\infty$ y que L_0, L_4, L_5, L_6 son máximos, mientras que $L_1, L_2, L_3, L_7, L_8, L_9$ son puntos de silla. En la fig.3 se representan varias curvas $U = \text{cte.}$ para $m_1 = .2, m_2 = .3, m_3 = .5$. Se observa la desaparición de L_0 y L_1 y la deformación de las posiciones de los demás.

Partiendo de L_0, \dots, L_9 con $m_1=m_2=m_3$ se aborda la prolongación a masas cualesquiera. Para representar dicha prolongación empleamos el siguiente artificio: Llamamos triángulo de masas a un triángulo equilátero de aristas unidad tal que las coordenadas baricéntricas de un punto del mismo son las masas m_1, m_2, m_3 . Los lados corresponden al problema de 2+2 y los vértices al de 1+3.

Debido a la ordenación de las masas basta estudiar un sexto de dicho triángulo (ver fig.4). En principio (esto es, si son prolongables) a cada uno de los diez puntos L_0, \dots, L_9 que se tenían para $m_1=m_2=m_3$ le corresponderá una p.e.r. en el caso de masas cualesquiera, función del punto considerado en el triángulo de masas. Así, puede darse la imagen de ese triángulo por las lo aplicaciones de determinación de p.e.r. En la fig.4 se representan dichas imágenes. Las líneas que aparecen en el interior de cada imagen del triángulo ABC corresponden a $m_1 = \text{cte.}$

Para L_0 y L_1 es imposible la prolongación a todas las masas. Para las que están sobre la curva EF del triángulo de masas se confunden L_0 y L_1 . Para masas en AEF son prolongables las lo

p.e.r., mientras que para el resto de masas en ABC sólo lo son 8.

La línea EF tiene su imagen, tanto en la prolongación de L_0 como en la de L_1 en la línea $E_0F_0 \equiv E_1F_1$.

La determinación de EF se ha hecho por un procedimiento inverso: Dada una p.e.r., se obtienen las masas correspondientes. Si se exploran las líneas $x = \text{cte.}$ en el triángulo de p.e.r. se tiene que

$$m_2 = f_2(y, x) \quad m_3 = f_3(y, x) \quad (4)$$

que puede obtenerse de (2) con $m_1 = 1 - m_2 - m_3$.

Eliminando y : $\varphi(m_2, m_3, x) = 0$. La envolvente de esta familia de curvas es la relación deseada entre m_2 y m_3 . En la fig.5 se representan las curvas (4) para distintos valores de x y se dan valores numéricos. La obtención de la envolvente se ha llevado a cabo numéricamente. La línea $E_0F_0 \equiv E_1F_1$ es tangente a A_1F_1 y a A_3F_3 en $F_1 \equiv F_3$.

Un estudio análogo puede llevarse a cabo con L_{10}, L_{11} , que permanecen para todo valor de las masas.

§3. Estudio del índice.— Consideremos el valor del índice de Morse, esto es, el número de valores propios negativos del Hessiano de V_n . Por cálculo directo se obtiene en el caso de masas iguales que al cuadrado le corresponde índice 4, al triángulo equilátero 2 y al isósceles 3. Las 12 posiciones del tipo Moulton tienen índice 2 (no son posibles mas que índices entre 2 y 4. Véase [4]).

Por otra parte, del triángulo equilátero se deducen por simetría 8 p.e.r., del cuadrado se obtienen 6 y del isósceles se llega a 24. El nº de p.e.r. de índice par menos el nº de las de índice impar vale 2 y concuerda con el valor que se ob-

tiene vía homología según el teorema de Morse (cf. [6], [4]). Las 96 posiciones asimétricas deben repartirse en 48 de índice 2 y 48 de índice 3. (V_n es función de Morse excepto para un conjunto de masas de medida de Lebesgue nula, [5]).

En el problema de 3 cuerpos las p.e.r. de Lagrange tienen índice 2 y las de Euler 1. El índice de la función (3) para L_i vale 2 en los máximos y 1 en los puntos de silla. Se obtiene el índice de V_n en L_i gracias al siguiente

Lema.- El índice de un punto crítico de V_n es la suma de los índices en dicho punto de U y del potencial normalizado correspondiente al problema de 3 cuerpos que se obtiene excluyendo m_4 .

Demostración.- Sean $(-1,0)$, $(1,0)$, (x,y) , (z,t) las coordenadas de m_1, m_2, m_3 y m_4 respectivamente. $V_n = (A + m_4 B) \sqrt{C + m_4 D}$ donde A y C son función de m_1, m_2, m_3, x, y ; B y D son función de $m_1, m_2, m_3, x, y, z, t$.

Si m_4 es suficientemente pequeño $m_4 D/C \ll 1 \implies V_n = (A + m_4 B) \sqrt{C} (1 + m_4 D/2C) + O(m_4^2) = A\sqrt{C} + m_4 \sqrt{C} (B + \frac{A}{2C} D) + O(m_4^2)$. $A\sqrt{C}$ es el potencial normalizado correspondiente al problema de 3 cuerpos con m_1, m_2, m_3 . B es el potencial creado por m_1, m_2, m_3 en el punto (z, t) . Trivialmente $C = \sum_{i=1}^3 m_i r_i^2 / 2$.

Para que sea $U = B + \frac{A}{2C} D$ basta probar que $\omega^2 = \frac{A}{2C}$ que se obtiene integrando la relación que iguala para m_1, m_2, m_3 la fuerza de atracción con la centrífuga (cf. [1] p.242).

Si $f = f_1(x,y) + \{f_2(x,y,z,t)\}_{\xi_0} | \forall \xi \in (0, \xi_0]$ el índice de un punto crítico de f es la suma de los índices correspondientes a f_1 y a f_2 considerando f_2 como función de z, t , si éstos son no degenerados. En efecto, sea $\Delta_k = |(a_{ij})| 1 \leq i, j \leq k$

siendo a_{ij} las componentes de D^2f . El índice es el número de cocientes negativos en Δ_k/Δ_{k-1} , $k=1+4$, $\Delta_0=1$, si todos los Δ_k son no nulos.

Para $k=1,2$ se tiene el índice de f_1 . $\Delta_3 = \{ \underbrace{D^2_{z^2} f_2}_{\Delta'_3} + o(\xi^2) \}$ y

$$\Delta_4 = \xi^2 \underbrace{(D^2_{z^2} f_2 D^2_{t^2} f_2 - (D_z D_t f_2)^2)}_{\Delta'_4} + o(\xi^3).$$

La no degeneración en el caso de f_2 asegura que $\exists \varepsilon_0 \mid \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $\Delta'_k \cdot \Delta_k > 0$, $k=3,4$, lo que prueba el Lema.

Los índices obtenidos son: L_0 índice 4; L_1 índice 3; L_4 índice 4; L_7 índice 3. Para L_{10}, L_{11} se tiene índice 3. Los 12 puntos de Moulton permanecen con índice 2. En resumen, en el caso 3+1: Si L_0 y L_1 no se fusionan, hay 12 puntos de índice 2, 18 de índice 3 y 8 de índice 4, manteniéndose $12 - 18 + 8 = 2$. Si L_0 y L_1 desaparecen, se llega a 12, 16 y 6 respectivamente. Sabemos que el número de puntos de índice $2n - 4 - i$, $\chi_i(n,m)$, en el problema de n cuervos viene acotado inferiormente por $\mu_i(n)$, cuya expresión es $\mu_i(n) = \binom{n}{i} (n-1-i) (n-2)!$ (según [5]).

Estas cotas coinciden exactamente con los valores que se tienen en el problema de 3 cuervos. En el de 4 se alcanzan las cotas para m_4 infinitesimal (o suficientemente pequeña) y m_1, m_2, m_3 fuera de la región AEF y sus simétricas. En total el caso 3+1 presenta 38 p.e.r. en AEF y 34 en ABC - AEF.

A la vista de los índices de L_i , de los índices en el caso de masas iguales y del §1 se observa que si $m_1=m_2=m_3$ y m_4 evoluciona desde $m_4 \geq 0$ hasta alcanzar el valor de las otras masas, se producen cambios de los índices. Estos corresponden a valores de las masas para los que las p.e.r. son puntos críticos degene-

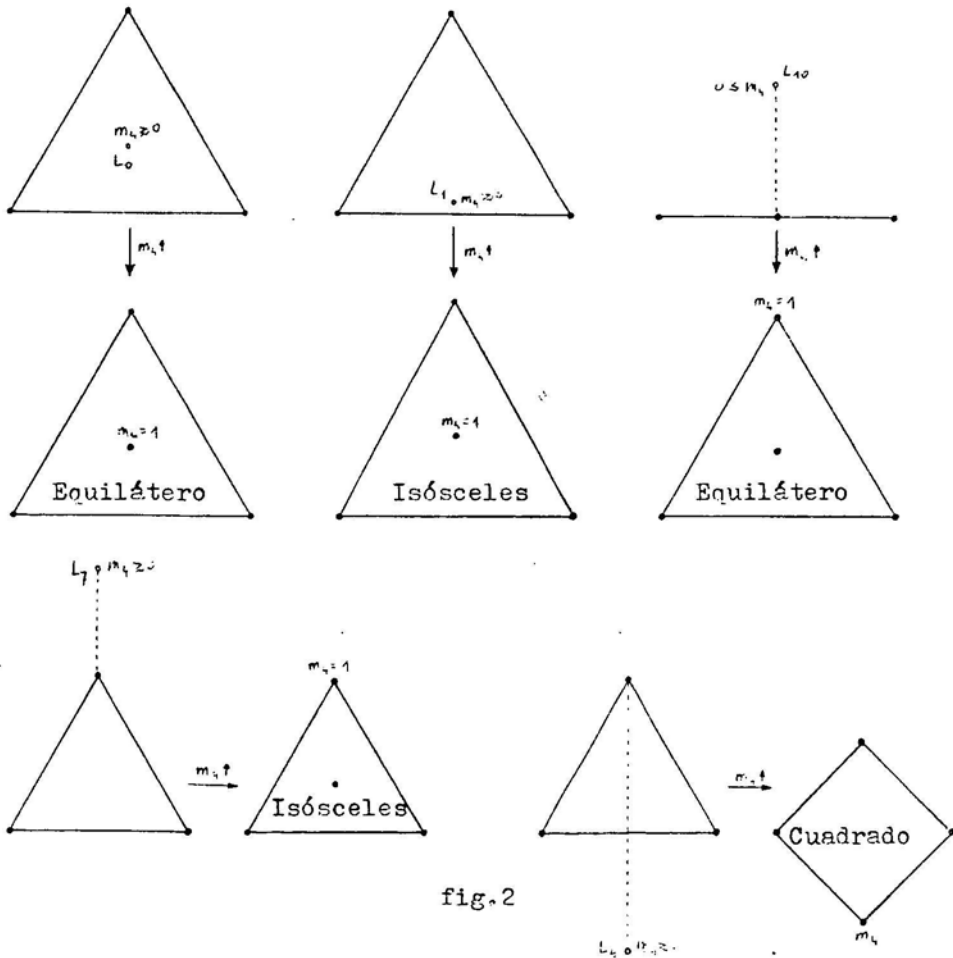
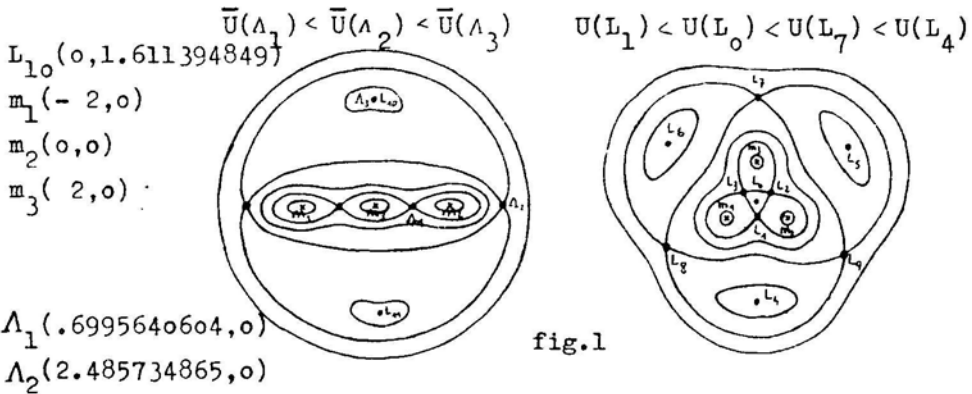
rados.

Analicemos el caso de L_0 . Evolucionara a triángulo equilátero con m_4 en el centro. Es la única p.e.r. que admite valores distintos de las masas (véase [3]). El Hessiano contiene (aparte de factores no nulos) un polinomio de grado 8 en $\mu = \frac{m_4}{m_1}$ que tiene ceros dobles en $\mu = 0$ y en $\mu = \mu_* = \frac{2 + 3\sqrt{3}}{18 - 5\sqrt{3}}$ y no tiene más ceros en $[0, 1]$. Para $\mu = \mu_* \approx .77048695\dots$ se produce una variación del índice de 4 a 2.

En el caso de L_{10} se tiene la transición de índice 3 a 2 para $\mu \approx .9920\dots$. Como en este caso hay un cambio de paridad del índice y hay 6 p.e.r. del tipo L_{10} (en realidad 3 de L_{10} y 3 de L_{11}), la transición debe ir acompañada de la desaparición de 12 puntos de índice 3. Estos parecen corresponder a los 12 casos de triángulo isósceles que no se obtienen por evolución a partir de $m_4 \geq 0$, esto es, los que son asimétricos para $m_4 \neq 1$. Se sugiere el esquema de la fig. 6.

Bibliografía

- [1] Hagihara, Y.: "Celestial Mechanics", Vol.1 MIT Press, 1970.
- [2] Llibre, J.: "Posiciones de equilibrio relativo del problema de 4 cuerpos", presentado a la RAME, Málaga, 1976.
- [3] MacMillan, W.D., Bartky, W.: "Permanent configurations in the problem of four bodies", Trans. Amer. Math. Soc. 34(1932), 838-875.
- [4] Palmore, J.I.: "Classifying Relative Equilibria. I", Bull. Amer. Math. Soc. 79(1973), 904-908.
- [5] ——— : "Clas. Relat. Equil. II", B.A.M.S. 81(1975), 489-491.
- [6] Smale, S.: "Problems on the nature of relative equilibria in celestial mechanics", Manifolds-Amsterdam 1970, Lect. Notes in Math. 197, Springer, 1971.
- [7] ——— : "Topology and Mechanics. II", Invent. Math. 11(1970), 45-64.



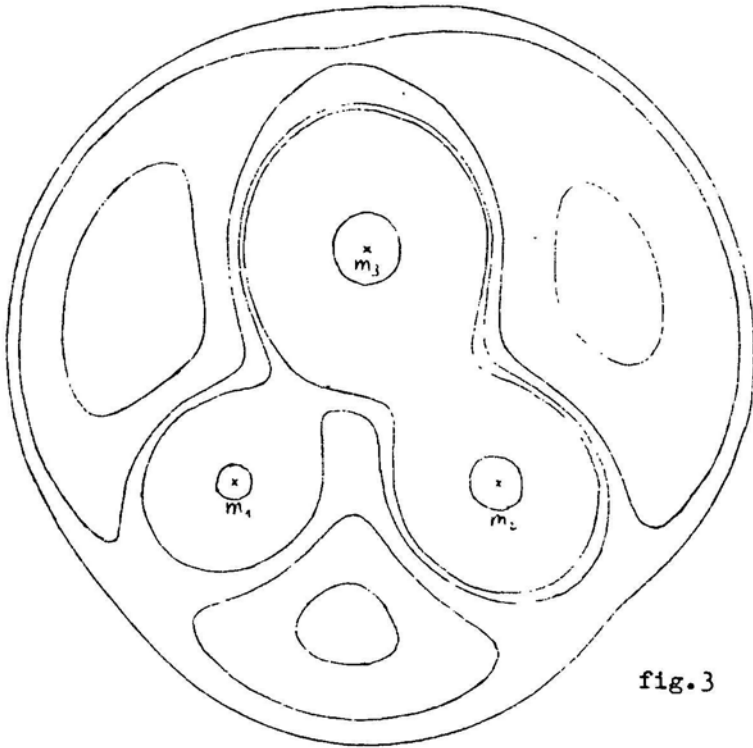
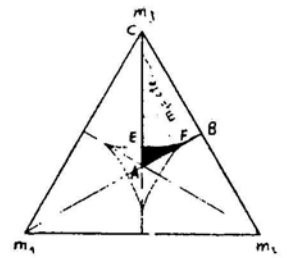
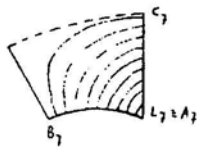


fig.3



Triángulo
de masas

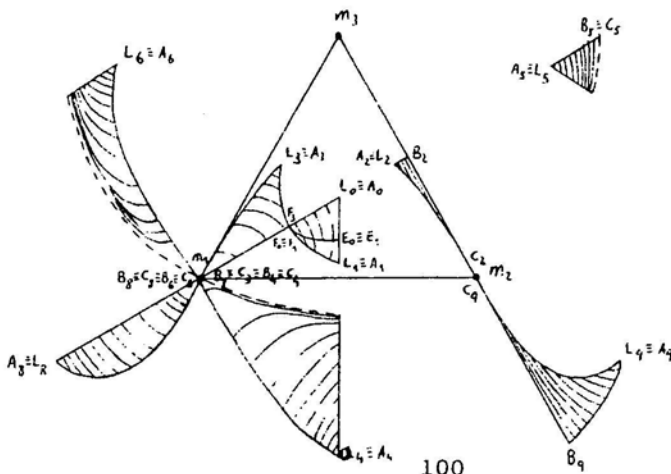


fig.4

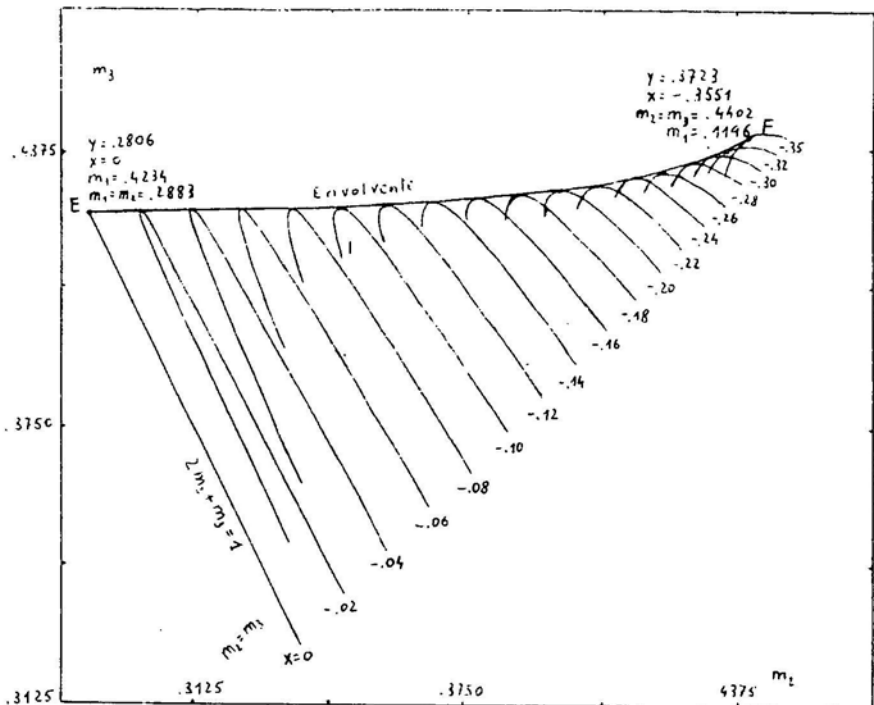


fig.5

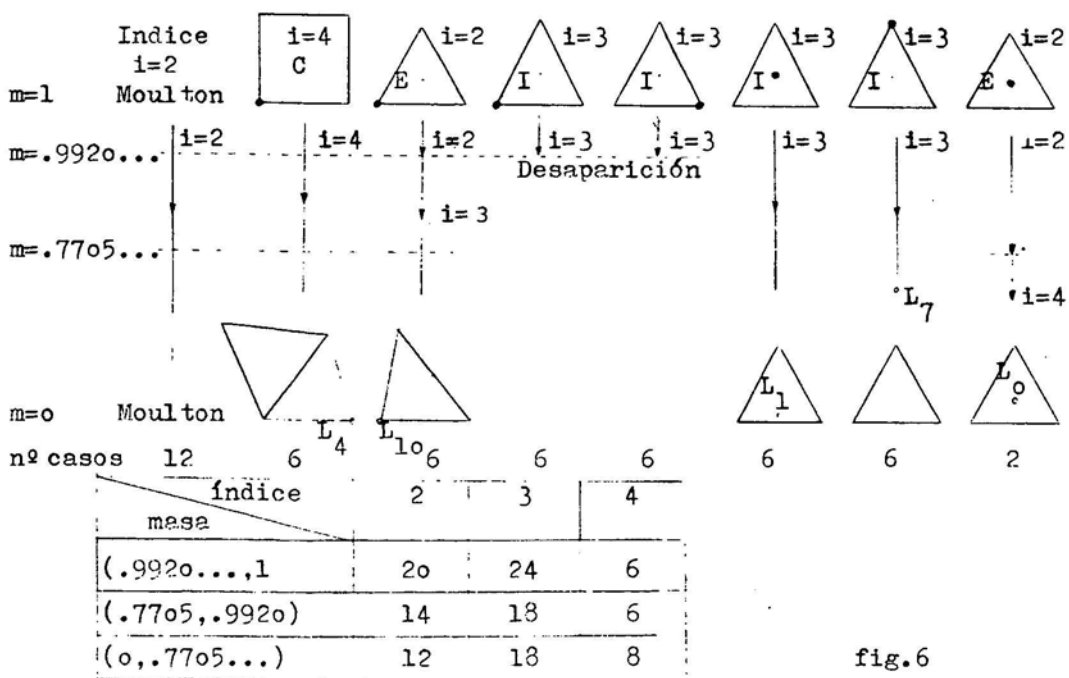


fig.6