CUASIANALITICIDAD EN ESPACIOS GENERALES DE FUNCIONES DIFERENCIABLES

Julián Cufí

Juan L. Cerdá

1.- Cuasianaliticidad en los espacios E^{λ}.

En [3] se ha introducido, para cada espacio de sucesiones λ, una clase de funciones diferenciables, designada por $E^{\lambda}(A)$, formada por las funciones f infinitamente diferenciables en A (subconjunto de R^n) tales que

$$(\|f^n\|_A) \in \lambda^{\times} \quad \text{es decir} \quad p_u(f) = \sum_{n \geq 0} \|f^n\|_A |u_n| < +\infty \quad \forall (u_n) \in \lambda$$

Aquí nos limitaremos a considerar el caso en que A sea un intervalo arbitrario de la recta e indicaremos simplemente $\|f^n\| = \|f^n\|_A$. El problema que tratamos es el de encontrar condiciones necesarias y suficientes sobre el espacio λ (que se supone normal y conteniendo al espacio de las sucesiones casi nulas) afin de que la clase $E^{\lambda}(A)$ sea cuasianalítica, es decir, no existan funciones no triviales $f \in E^{\lambda}(A)$ tales que $f^n(x_o) = 0$, para cada $n \geq 0$, en algún punto x_o de la recta.

En primer lugar, y bajo ciertas condiciones, reducimos el problema al caso en que A sea toda la recta. Obsérvese que al aplicar a la variable independiente una homotecia de razón k, las derivadas de la función quedan afectadas en un factor k^n; es por ello que, utilizando un procedimiento "standard", que no detallamos es posible demostrar las siguientes:

Proposición 1.- Sea λ un espacio de sucesiones tal que $E^{\lambda}(I)$ sea un álgebra, donde I es un intervalo compacto de la recta, y tal que si $(u_n) \in \lambda$ es $(k^n u_n) \in \lambda$ para todo $k > 0$; entonces $E^{\lambda}(I)$ no es cuasianalítica si y sólo si existe una función $f \in E^{\lambda}(I)$, no trivial, que se pueda prolongar por ceros fuera de I a una función indefinidamente derivable en la recta.

Proposición 2.- Con las mismas hipótesis de la Proposición anterior, tomando como I un intervalo abierto acotado de la recta, $E^{\lambda}(I)$ no es cuasianalítica si y sólo si posee una función no nula con soporte compacto.

La proposición anterior es también válida si $I = R$, o si I es una semirrecta. Se obtiene así :

Corolario.- Si las clases $E^{\lambda}(I)$ y $E^{\lambda}(R)$ (I intervalo de R) son álgebras y λ es estable frente a las transformaciones $u \dashrightarrow (k^{n})u$ para cada $k>0$, entonces $E^{\lambda}(I)$ es cuasianalítica si y sólo si lo es $E^{\lambda}(R)$.

Las condiciones que aseguran que $E^{\lambda}(I)$ o $E^{\lambda}(R)$ son álgebra dependen sólo de λ. Las hipótesis del Corolario son sólo necesarias para la equivalencia de la cuasianaliticidad de $E^{\lambda}(I)$ con la de $E^{\lambda}(R)$, pero no intervienen en el estudio de $E^{\lambda}(R)$ que iniciamos a continuación.

2.- Cuasianaliticidad en la recta y problema de Watson.

El problema de Watson consiste en encontrar una función holomorfa en un abierto G del plano con ciertas condiciones de crecimiento. Vamos a considerar ahora una variante de dicho problema que, como veremos, está relacionada con la cuasianaliticidad de las clases $E^{\lambda}(R)$. Las condiciones que nos conviene considerar para una función F, holomorfa en G, son las siguientes :

(W_1^{λ}) $0 \neq F \in H(G)$, $\sum_{n \geq 0} \|z^{n}F(z)\|_{G} |u_{n}| < \infty$ para cada $u \in \lambda$

(W_2^{λ}) $0 \neq F \in H(G)$, $\sup_{z \in G} \sum_{n \geq 0} | z^{N}F(z)| \cdot |u_{n}| < \infty$ para cada $u \in \lambda$

(W_3^{λ}) $0 \neq F \in H(G)$, $\sum_{n \geq 0} \|z^{-n}F(z)\|_{G} \cdot |u_{n}| < \infty$ para cada $u \in \lambda$

(W_4^{λ}) $0 \neq F \in H(G)$, $\sup_{z \in G} \sum_{n \geq 0} | z^{-n}F(z)| \cdot |u_{n}| < \infty$ para cada $u \in \lambda$.

Si G_a es el semiplano abierto $G_a = \{ z \in C : Re(z) > a \}$,y existe una función F cumpliendo la condición (W_j^{λ}) en G_a entonces existe una función, la restricción de F, cumpliendo (W_j^{λ}) en todo G_b con $b > a$. Es más, para que exista F cumpliendo (W_1^λ) en G_a es necesario y suficiente que exista ϕ cumpliendo (W_1^λ) en G_0 (es suficiente tomar $\phi(z) = F(z+a)$ y observar que se tiene

$$\left| \frac{z}{z+a} \right|^n \leq 1$$

puesto que $Re(z) > 0$ y $a > 0$). Se tiene un resultado análogo para la condición (W_2^λ).

<u>Proposición 3</u>.- Para que exista ϕ cumpliendo (W_j^λ) $(j = 1,2)$ en un (o en todo) semiplano G_a, con $a \geq 0$, es necesario y suficiente que exista F cumpliendo (W_j^λ) $(j = 3,4$ resp.) en el disco $D = \{z \in C : |1 - z| < 1\}$.

Para verlo es suficiente observar que, según las observaciones anteriores, se puede suponer $a = 1/2$ y relacionar $F(s) = \phi(z)$ con $s = 1/z$.

En cuanto a la relación entre las distintas condiciones de Watson introducidas observemos, además del enunciado anterior, el hecho de que las condiciones (W_1^λ) y (W_3^λ) son más fuertes que las respectivas (W_2^λ) y (W_4^λ); sin embargo, como consecuencia de un resultado posterior, se pondrá de manifiesto que, de hecho, son equivalentes.

Abordamos ahora la relación entre la existencia de funciones que satisfagan las condiciones de Watson relativas al espacio de sucesiones y la cuasianaliticidad de los espacios $E^\lambda(R)$:

<u>Teorema 1</u>.- Si $E^\lambda = E^\lambda(R)$ no es cuasianalítica, entonces existe una función F holomorfa en G_0, que cumple (W_1^λ) en cada semiplano G_a, con $a > 0$.

<u>Dem</u>.- De la hipótesis se deduce que podremos tomar en E^λ una función <u>f</u> tal que $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, $f(x) \neq 0$ para algún $x > 0$; <u>f</u> estará acotada por ser $\|f\|_{R|u_0|} \leq M_u = p_u(f)$.

La transformada de Laplace, F, de <u>f</u>, definida por

$$F(z) = \int_0^\infty f(x).e^{-zx}\, dx$$

es analítica en G_0 y se tiene la igualdad (integrando por partes) :

$$z^n F(z) = \int_0^\infty f^{(n)}(x).e^{-zx}\, dx .$$

Por consiguiente, fijado $a > 0$, se llega para cada $u \in \lambda$ a :

$$\sum_{n\geq 0} \sup_{z\in G_a} |z^n F(z)|\cdot|u_n| \leq \sum_{n\geq 0} \sup_{z\in G_a} \left| \int_0^\infty f^{(n)}(x).e^{-zx} u_n \, dx \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n\geq 0} \sup_{z\in G_a} \int_0^\infty \| f^{(n)}\|_R \, |u_n| e^{-x\mathrm{Re}(z)} \, dx =$$

$$\sum_{n\geq 0} \| f^{(n)}\|_R \, |u_n| \sup_{z\in G_a} \int_0^\infty e^{-x\mathrm{Re}(z)} \, dx \leq$$

$$\leq 1/a \, . \sum_{n\geq 0} \| f^{(n)}\|_R \, |u_n| < \infty . //$$

<u>Teorema 2</u>.- Si existe una función ϕ cumpliendo la condición (W_2^{λ}) en el semiplano G_a, $a > 0$, entonces E^{λ} no es cuasianalítica.

<u>Dem</u>.- La función

$$F(z) = \frac{\phi(z)}{z^2}$$

es holomorfa y no idénticamente nula en G_a y, para $M > 0$, conveniente, se tiene :

$$|F(z)| \leq \frac{M}{y^2} \qquad \text{si } z = x + iy$$

Puesto que en la desigualdad $|F(z)| . |u_0| \leq M$ se puede tomar $u_0 = 1$ y además :

$$\frac{M}{|z|^2} \leq \frac{M}{y^2}$$

De acuerdo con las propiedades de la transformación de Laplace, F es la transformada de una función no idénticamente nula (puesto que F no lo es), <u>f</u>, tal que :

$$f(x) = 1/2\pi i \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(z).e^{zx} \, dz$$

integral que es independiente de $b > a$, y $f(x) = 0$ para $x < 0$. Vamos a probar que la función

$$x \dashrightarrow e^{-cx} f(x) \quad \text{donde} \quad b = (a + c)/2,$$

pertenece a E^{λ} , lo que termina la demostración. Está claro que la función que acabamos de definir es indefinidamente derivable y si $u \in \lambda$ un cálculo prueba, para $z = b + it$, la desigualdad :

$$\left|\left[f(x).e^{-cx}\right]^{(n)}\right| . |u_n| \leq 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |z^n \phi(z)| . |u_n| e^{-(c-b)x} \frac{dt}{|z|^2}$$

Puesto que para $x < 0$ es $f(x) = 0$, se puede suponer $x \geq 0$ lo que implica

$e^{-(c-b)x} < 1$, llegándose entonces a :

$$\sum_{n\geq 0} \left\|\left\{f(x).e^{-cx}\right\}^{(n)}\right\|_{R^+} . |u_n| \leq 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n\geq 0} |\phi(z) z^n| . |u_n| \frac{dt}{z^2} \leq$$

$$\leq 1/2\pi \, . M_u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|z|^2} = M'_u .$$

Es decir,

$$\sum_{n\geq 0} \|g^{(n)}\|_{R} . |u_n| = \sum_{n\geq 0} \|g^{(n)}\|_{R^+} |u_n| < +\infty$$

donde $g(x) = f(x).e^{-cx}$.//

3.- La función de Ostrowski y la condición de Carleman.

En el apartado anterior hemos reducido el problema de la cuasianaliticidad de los espacios E^{λ} a la existencia de funciones que resuelvan el problema de Watson asociado al espacio de sucesiones λ . Ahora es fácil encontrar condiciones de cuasianaliticidad que se refieran directamente al espacio λ . Puesto que una sucesión pertenece al α-dual de un espacio de sucesiones si y sólo si está mayorada por una sucesión de dicho α-dual, resulta que las condiciones (W_1^{λ}) y (W_3^{λ}) se pueden interpretar como las de un problema de Watson ordinario relativo a una sucesión de constantes $|v_n|$, donde $(v_n) \in \lambda^{x}$. Así, pues si para cada $v = (v_n) \in \lambda^{x}$ definimos la función de Ostrowski $T_v : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty]$ en la forma

$$T_v(r) = \sup_n \frac{r^n}{|v_n|}$$

se obtiene que existe una función F que cumple la condición (W_3^{λ}) en el disco D si y sólo si existe un vector $v \in \lambda^*$ tal que

$$\int_1^\infty \frac{\log T_v(r)}{r^2} \, dr < +\infty.$$

Así, la convergencia de esta integral es equivalente a la no cuasi-analiticidad del espacio E^λ y, a su vez, a la existencia de solución para una cualquiera de las cuatro formas del problema de Watson. En virtud de un resultado de Carleman, cualquiera de estas condiciones es equivalente a la existencia de un vector $v = (v_n) \in \lambda^*$ que haga convergente a alguna de las series :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{|v_n|^c}{|v_{n+1}|^c} \quad , \quad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(|v_n|^c)^{1/n}} \quad , \quad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\beta_n}$$

donde $(|v_n|)^c$ es la regularizada convexa de $(|v_n|)$ por medio de logaritmos , mientras que $\beta_n = \inf_{k \geq n} v_k$. En estas últimas condiciones se supone implícitamente que se cumple : $\lim_n |v_n|^{1/n} = \infty$, necesaria para poder regularizar la sucesión $(|v_n|)$. En caso contrario es un hecho conocido el que ello implica que $\int_1^\infty \log T_v(r)/r^2 . dr = \infty$.

BIBLIOGRAFIA

(1) BANG, T. "On quasi analytic Functions" Xº Congreso Mat. Escand. Copenhague, 1946.

(2) CARLEMAN, T. "Les fonctions quasi analytiques" Gauthier-Villars Paris, 1926.

(3) CERDA-CUFI "Algunas clases generales de funciones infinitamente diferenciables" Coll. Math. (aparecerá)

(4) MANDELBROJT, S. "Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications" Gauthier-Villars. Paris, 1952.