SEMISISTEMAS EN ESPACIOS DE HILBERT

por

F. CASTILLO

y

E. LLORENS

La teoría de sistemas dinámicos discretos ha resultado útil para el estudio axiomático, asi como para demostrar la convergencia en algunos casos, de los algoritmos de optimización de funciones e incluso de funcionales si se pide a estos condiciones fuertes de regularidad.

En el presente trabajo se define un semisistema dinámico discreto sin unicidad sobre un espacio de Hilbert en el que se suponen ambas topologías, la fuerte deducida de la norma y la débil. Con ello se aborda el estudio de algoritmos de optimización de funcionales cuando sus extremos se alcanzan en puntos que son límite débil de la sucesión definida por el algoritmo.

1.: PRELIMINARES

Sea H un espacio real de Hilbert, separable, cuyo producto interno denotaremos por $(./.)$. La norma y distancia inducidas se simbolizarán respectivamente con $\| \|$ y $d(.,.)$.

La topología débil de H, $\sigma(HH)$, será designada por σ, y los conceptos a ella relativos, se distinguirán con los prefijos 'σ' - o "debil" indistintamente.

En lo que sigue $F(H)$ es el conjunto de las partes no vacías σ-compactas de H.

En $F(H)$ se define, dados $A,B \in F(H)$:

$$\beta(A,B) = \sup_{x \in A} \{d(x,B)\}$$

1.1.- Teorema

$\beta(A,B) = 0 \iff A \subset B$

$\beta(A,B) < \varepsilon \iff A \subset S(B,\varepsilon)$

En general $\beta(A,B) \neq \beta(B,A)$

$\beta(A,B) \leq \beta(A,C) + \beta(C,B)$

para cualesquiera $A,B,C \in F(H)$.

La demostración es trivial.

1.2.- Teorema

Sea $A \in F(H)$. $S_\beta(A,r) = \{B \in F(H) : \beta(BA) < r\}$

Si se define $\mathcal{B} = \{S_\beta(A,r) ; A \in F(H) \ r > 0\}$

dicha familia constituye una base de una topología sobre $F(H)$, que satisface el primer axioma de numerabilidad, para la cual dicho espacio topológico es no T_1.

La comprobación es inmediata.

1.3.- Teorema

Sea $\{A_n\} \subset F(H)$ tal que $A_n \xrightarrow{\beta} A \in F(H)$.

Sea $y_n \in A_n$ para $n = 1,2,\ldots$

Existe entonces una subsucesión $\{y_{n_p}\}$ de $\{y_n\}$ que σ- converge a un punto $y \in A$.

La demostración es enteramente análoga a la del teorema 0.4 de (3).

0.4.- Proposición

Sean $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ sucesiones en H tales que

$x_n \xrightarrow{\sigma} x$ $\quad y_n \xrightarrow{\sigma} y$

verificando para cada $n = 1,2, \ldots.$ $\|x_n - y_n\| \leq \varepsilon$

Entonces se tiene que $\|y - x\| \leq \varepsilon$.

Prueba:

Como consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwartz se verifica para cada entero positivo i:

$$|(y_i/a) - (x_i/a)| = |(y_i - x_i/a)| \leq \|y_i - x_i\| \|a\| \leq \varepsilon \|a\| \quad \forall a \in H.$$

Por tanto,

$$\lim |((y_i/a) - (x_i/a))| \leq \varepsilon \|a\| \implies |(y/a) - (x/a)| \leq \varepsilon \|a\|$$

lo cual se cumple para cada vector $a \in H$. Tomando

$$a = \frac{y - x}{\|y - x\|}$$

quedará:

$$|(y - x/a)| = \left|\left(y - x \;/\; \frac{y - x}{\|y - x\|}\right)\right| = \|y - x\| \leq \varepsilon \|a\| = \varepsilon \quad .$$

1.5 Proposición

Sean $B \in F(H)$, $S[B,\varepsilon] = \{x \in H : d(x,B) \leq \varepsilon\}$

Entonces $S[B,\varepsilon] \in F(H)$.

Prueba

Sea $\{x_n\} \subset S[B,\varepsilon]$.

Como $S[B,\varepsilon]$ es acotado, al ser H reflexivo, es débilmente relativamente secuencialmente compacto, por lo que la sucesión dada admite una subsucesión $\{x_{n_p}\}$ débilmente convergente a un punto $x \in H$.

Como para cada p, $x_{n_p} \in S[B, \varepsilon]$ se tiene que $d(x_{n_p}, B) = \alpha_{n_p} \leq \varepsilon$.

Al ser B débilmente compacto y el conjunto $\{x_{n_p}\}$ cerrado convexo (para cada p), puede afirmarse, como consecuencia del enunciado 26.2.8. de (2) que existe $y_{n_p} \in B$, tal que $d(B, x_{n_p}) = \| y_{n_p} - x_{n_p} \| = \alpha_{n_p} \leq \varepsilon$.

La sucesión $\{ y_{n_p} \}$ está contenida en B, débilmente compacto, por lo que admite una subsucesión, (puede suponerse ella misma) que converge débilmente a un punto $y \in B$. Como $x_{n_p} \xrightarrow{\sigma} x$ se verifican las hipótesis de la proposición anterior, por lo que

$$\| y - x \| \leq \varepsilon$$

y de aquí que $x \in S[B, \varepsilon]$ probándose así que $S[B, \varepsilon]$ es débilmente secuencialmente compacto.

Al ser H, obviamente un espacio de Frechet, se sigue la conclusión del teorema como consecuencia de (2) 24.3.9.

2.- σ-SEMISISTEMAS DINAMICOS DISCRETOS

2.1.- DEFINICION

Se denomina σ-semisistema dinámico discreto sin unicidad sobre H, a la terna (H, I^+, π), donde

$\pi : H \times I^+ \longrightarrow F(H)$ verifica:

2.1.1.- $\pi(x,0) = \{x\}$

2.1.2.- $\pi(\pi(x,k),h) = \pi(x,k+h) \quad \forall k,h \in I^+ \quad \forall x \in H$

2.1.3.- $\pi_k : H \longrightarrow F(H)$, $\pi_k(x) = \pi(x,k)$, es σ-β - contínua para cada k entero no negativo.

En lo que sigue se supone dado un α-semisistema dinámico discreto (H, I^+, π) sobre H.

2.2.- Definición

La aplicación $\chi : J \longrightarrow H$ es una solución del σ-semidistema dinámico discreto, a través de $x \in H$ si verifica:

2.2.1.- $I^+ \subset J$

2.2.2.- $\chi(0) = x$

2.2.3.- $\chi(j) \in \pi(\chi(k), j-k) \quad \forall j,k \in I^+ \quad j > k.$

2.3.- Teorema

Sea $y \in \pi(x,k)$, $k \in I^+$. Entonces existe en I^+ una solución χ por x tal que $\chi(k) = y$.

Es su prueba idéntica a la del Teorema 1.1.1 de (3).

2.4.- Definición

Los conjuntos $T^+(x) = \bigcup_{\chi(0)=x} \chi(I^+)$ $\quad T^-(x) = \bigcup_{\chi(0)=x} \chi(I^- \cap J)$

son llamados semiconos de trayectorias, positivo y negativo respectivamente, a través de $x \in H$.

El cono de trayectorias a través de x, será

$T(x) = T^+(x) \cup T^-(x)$.

2.5.- Definición

Si $\{x\} = T(x)$, x es llamado punto crítico.

2.6.- Definición

Un conjunto $M \subset H$ se dice:

2.6.1.- Positivamente invariante, si $T^{+}(M) = M$.

2.6.2.- Negativamente invariante, si $T^{+}(H-M) = H-M$.

2.6.3.- Débilmente positivamente invariante si para todo punto $y \in M$, existe una solución χ a través de y, tal que $\chi(I^{+}) \subset M$.

2.6.4.- Débilmente negativamente invariante si para todo punto $y \in M$, existe una solución χ, tal qye $\chi(J \cap I^{-}) \subset M$.

2.7.- Teorema

Condición necesaria y suficiente para que el conjunto $M \subset H$ sea débilmente positivamente invariante es que para todo $x \in M$,

$\pi(x,1) \cap M \neq \phi$

Prueba

Sea $x_0 \in M$, arbitrario. $\pi(x_0,1) \cap M \neq \phi$, porlo que existe $x_1 \in \pi(x_0,1)$, con x_1 en M, de donde $\pi(x_1,1) \cap M \neq \phi$, por lo que existe x_2 en M, $x_2 \in \pi(x_0,2)$. Reiterando el razonamiento construimos una sucesión $\{x_i\}$ con $x_i \in \pi(x_{i-1},1)$, contenida en M.

$\chi : I^{+} \longrightarrow H$, $\chi(i) = x_i$

es, obviamente, la solución buscada. El resto de la prueba es trivial

2.8.- Definición

Se llama conjunto norma-límite positivo de la trayectoria recorrido de la solución χ, al

$L^{+}(\chi) = \{ y \in H :$ existe una sucesión $\{k_n\} \subset I^{+}, k_n \to +\infty$ $\chi(k_n) \to y \}$

2.9.- Definición

Se llama conjunto σ-límite positivo de la trayectoria recorrido de la solución χ, al

$L^{+}_{\sigma}(\chi) = \{ y \in H :$ existe una sucesión $\{k_n\} \subset I^{+}, k_n \to +\infty$ $\chi(k_n) \xrightarrow{\sigma} y \}$

2.10.- Observación

Se tendrá que $L^{+}(\chi) \subset L^{+}_{\sigma}(\chi)$.

En adelante se empleará indistintamente el símbolo 'χ', para hacer referencia a una solución o a su correspondiente recorrido o trayectoria.

2.11.- Definición

Se considera la aplicación $\lambda^{+}:H \longrightarrow 2^{H}$ definida como sigue:

$$\lambda^{+}(x)=\begin{cases}\phi & \text{si existe una solución } \chi \text{ por } x, \text{ tal que } L^{+}(\chi)=\phi\\ \bigcup_{\chi(0)=x} L^{+}(\chi) & \text{en caso contrario}\end{cases}$$

Para cada elemento $x \in H$, $\lambda^{+}(x)$ se denomina conjunto dorma-límite positivo de x.

2.12.- Definición

Se considera la aplicación $\lambda_{\sigma}^{+}:H \longrightarrow 2^{H}$ definida como sigue:

$$\lambda_{\sigma}^{+}(x)=\begin{cases}\phi & \text{si existe una solución } \chi \text{ pòr } x, \text{tal que } L_{\sigma}^{+}(\chi)=\phi\\ \bigcup_{\chi(0)=x} L_{\sigma}^{+}(\chi) & \text{en caso contrario}\end{cases}$$

Para cada elemento x de H, $\lambda_{\sigma}^{+}(x)$ se denomina conjunto σ-límite positivo de x,

2.13.- Observación

Se tiene que $\lambda^{+}(x) \subset \lambda_{\sigma}^{+}(x)$ para cada $x \in H$.

2.13.- Teorema

$L^{+}(\chi)$ es norma-cerrado y débilmente positivamente invariante.

Prueba

Se encuentra en (4) Th.3.3.

2.14 Teorema

Si χ es solución por $x \in H$ tal que $T^{+}(x) \in F(H)$, entonces $L_{\sigma}^{+}(\chi) \in F(H)$.

Prueba

$L_{\sigma}^{+}(\chi) \neq \phi$ porque $\{\chi(i)\}$ es una sucesión en $T^{+}(x)$, que admitirá alguna subsucesión convergente. Sea $\{y_n\}$ una sucesión en $L_{\sigma}^{+}(\chi)$, $y_n \xrightarrow{\sigma} y$.

Existen sucesiones de enteros no negativos, $\{k_p^n\}$ tales que $\chi(k_p^n) \underset{p}{\rightarrow} y_n$ $n=1,2,\dots$. Como $T^{+}(x)$ es acotado, su topología relativa a la débil de H puede definirse por una métrica $d^{*}(\cdot,\cdot)$. Podemos entonces suponer que las sucesiones $\{\chi(k_p^n)\}$ verifican: $d^{*}(\chi(k_p^n),y_n)) \leq \frac{1}{p}$ y $k_n^n < k_{n-1}^{n-1}$. Es facil ver ahora que $\chi(k_n^n) \rightarrow y$, por lo que $L_{\sigma}^{+}(\chi)$ es débilmente secuencialmente cerrado. La conclusión se sigue ahora de (2),24.1.7.

2.15.- Definición

Sea $V \subset H$.

Sea $\Phi : V \longrightarrow R$

Φ es una función de Liapunov para el σ-semisistema dinámico discreto dado, si y sólo si

2.15.1.- Φ es débilmente secuencialmente continua.

2.15.2.- $\Phi(x) \geq \Phi(\chi(1))$ pata toda solución χ tal que $\chi(1) \in V$, $\chi(0)=x \in V$.

2.16.- Teorema

Sea Φ una función de Liapunov para el σ-semisistema dinámico discreto dado, definida en un conjunto $V \subset H$, débilmente secuencialmente cerrado.

Entonces, si χ es cualquier solución de trayectoria contenida en V, y tal que $L_\sigma^+(\chi) \neq \phi$,se verifica que Φ está definida y es constante sobre $L_\sigma^+(\chi)$.

Prueba

Sean y,z elementos de $L_\sigma^+(\chi)$, tales que $\Phi(y)<\Phi(z)$.

Pueden encontrarse dos sucesiones $\{k_n\}$ $\{h_n\}$,con $k_n \to +\infty$ $h_n \to +\infty$ tales que $\chi(k_n) \xrightarrow{\sigma} z$ $\chi(h_n) \xrightarrow{\sigma} y$.

Ambas sucesiones pueden ser tomadas de modo que $h_n < k_n$ $n=1,2,\ldots$,por lo que para cada n se tiene

$$\Phi(\chi(k_n)) \leq \Phi(\chi(h_n))$$

de donde $\lim \Phi(\chi(k_n)) \leq \lim \Phi(\chi(hn))$. De 2.15.1 se obtiene que $\Phi(z) \leq \Phi(y)$, lo cual es contradictorio.

Al estar la trayectoria de χ contenida en V y éste ser débimente secuencialmente cerrado, se tendrá que si $x \in L_\sigma^+(\chi)$ es un punto de acumulación débil de V, y por lo tanto, $x \in V$, lo que completa la demostración.

2.17.- Teorema

$L^+_\sigma(\chi)$ es débilmente positivamente invariante, para cada solución χ .

Prueba

Sea $y \in L^+_\sigma(\chi)$.

Por definición existe una sucesión $\{k_n\} \subset I^+$, $k_n \to +\infty$, tal que $\chi(k_n) \xrightarrow{\sigma} y$.

Entonces, $\chi(k_n + 1) \in \pi(\chi(k_n), 1)$.

Como $\pi_1(x) = \pi(x,1)$ es $\sigma-\beta$-contínua, y $\chi(k_n) \xrightarrow{\sigma} y$, se tendrá que $\pi(\chi(k_n),1) \xrightarrow{\beta} \pi(y,1)$, y como consecuencia del teorema 1.3 existe una subsucesión $\{k^*_n + 1\}$ de $\{k_n + 1\}$ tal que

$\chi(k^*_n + 1) \xrightarrow{\sigma} z \in \pi(y,1)$.

Como $k^*_n + 1 \longrightarrow +\infty$, $z \in L^+_\sigma(\chi)$.

Luego, para todo $y \in L^+_\sigma(\chi)$, se cumple que $\pi(y,1) \cap L^+_\sigma(\chi) \neq \emptyset$ lo que en virtud de 2.7 completa la demostración.

2.18.- Definición

Sea $M \in F(H)$.

2.18.1.- Se dice que M es norma-estable si dado cualquier norma-entorno U de M, existe un norma entorno V de M, positivamente invariante, contenido en U.

2.18.2.- Se dice que es σ-estable si dado cualquier σ-entorno U de M, existe un σ-entorno V de M, positivamente invatiante, contenido en U.

2.19.- Definición

Sea $M \in F(H)$.

2.19.1.- Se dice que M es norma-atractor débil cuando existe un norma-entorno U de M, tal que para todo $x \in M$, se verifica:

i) $\lambda_\sigma(x) \neq \phi$ ii) $\lambda_\sigma(x) \subset M$

2.19.2.- Se dice que M es σ-atractor débil cuando existe un σ-entorno U de M, tal que para todo $x \in U$ se verifica:

i) $\lambda_\sigma(x) \neq \phi$ ii) $\lambda_\sigma(x) \subset M$

2.20.- Definición

Sea $M \in F(H)$.

2.20.1.- Se dice que M es norma asintóticamente estable si es norma-estable y norma-atractor débil.

2.20.2.- Se dice que M es σ-asintóticamente estable si es σ-estable y σ-atractor débil.

2.20.3.- Se dice que M es globalmente asintóticamente estable (en norma), si es norma-asintóticamente estable y $\forall x \in H$ se verifica

i) $\lambda_\sigma(x) \neq \phi$ ii) $\lambda_\sigma(x) \subset M$

2.20.4.- Se dice que M es σ-globalmente asintóticamente estable si es σ-estable, y $\forall x \in H$ se verifica:

i) $\lambda_\sigma(x) \neq \phi$ ii) $\lambda_\sigma(x) \subset M$.

2.21 Teorema

Sean $M \in F(H)$, y $V \subset H$.

Si $\Phi : V \longrightarrow R$ es una función de Liapunov para el σ-semisistema dinámico dado, verificando:

1) V es positivamente invariante.

2) $\Phi(x)=0 \quad \forall x \in M$. $\quad \Phi(x) > 0 \quad \forall x \in V-M$.

3) Si $x \in V-M$, para toda solucion χ por x, $\Phi(\chi(1)) < \Phi(x)$.

4) Para todo norma-entorno U, de M, $U \subset V$, existe $\beta \in R$, $\beta > 0$, tal que $\Phi(x) \geq \beta \quad x \in V-U$,

entonces M es norma-asintóticamente estable.

Prueba

a) M es norma-estable

Sea U un norma-entorno de M. Tomamos $\alpha > 0$, tal que $S[M,\alpha] \subset U$. $S[M,\alpha] \in F(H)$ por 1.5.

Sea $m = \inf_{x \in V-S[M,\alpha]} \{\Phi(x)\}$. Por (4), $m > 0$.

Tomando $K = \{ x \in S[M,\alpha] : \Phi(x) \leq m/2 \}$ se ve que es débilmente compacto, entorno de M, y positivamente invariante, pues si $x \in K$ y χ es una solución por x, al ser V positivamente invariante está definido $\Phi(\chi(1))$, y por (3) se tiene que $\Phi(\chi(1)) < \Phi(x) \leq m/2$ de donde $\chi(1) \in K$.

b) M es norma-atractor débil

Sea $x \in K$. Si χ es cualquier solución con $\chi(0)=x$, entonces $\{\chi(i)\}$ es una sucesión de elementos de K y al ser éste débilmente compacto admite una subsucesión débilmente convergente a un punto $y \in K$, por lo que para dicha solución $L^+_\sigma(\chi) \neq \phi$, y por tanto

$\forall x \in K$, $\lambda^+_\sigma(x) \neq \phi$.

Si $y \in \lambda^+_\sigma(x)-M$, existe una solución χ por x, tal que $y \in L^+_\sigma(\chi)-M$. Como $L^+_\sigma(\chi)$ es débilmente positivamente invariante, existe una solución ζ, por y, tal que $\zeta(1) \in L^+_\sigma(\chi)$. Entonces por (3), se cumpleoque $\Phi(\zeta(1)) < \Phi(y)$, lo cual es absurdo pues Φ es constante sobre $L^+_\sigma(\chi)$.

Por tanto $\lambda^+_\sigma(x) \subset M$, $\forall x \in K$, lo que completa la prueba.

2.22.: TEOREMA

Si $M \in F(H)$, y $V \subset H$, sea $\Phi : V \longrightarrow R$ una función de Liapunov para el σ-semisistema dinámico discreto dado, verificando:

2.22.1.: V es norma entorno de M.

2.22.2.: V es positivamente invariante.

2.22.3.: $V \in F(H)$

2.22.4.: Para cada solución χ por $x \in V-M$,

$\Phi(\chi(1)) < \Phi(x)$.

Entonces M es norma atractor débil.

Demostración:

Si $x \in V$ y χ es una solución por x, entonces $\{\chi(i)\}_{i \in I^+}$ es una sucesión en V, y podemos suponer, por 2.22.3 que

$\chi(i) \xrightarrow{\sigma} y \in V$.

Por lo tanto $L_\sigma^+(\chi) \neq \phi$, y como χ es arbitraria $\lambda^+(x) \neq \phi$.

Los restantes detalles son idénticos a los de la demostración del teorema anterior, y por tanto se omiten.

2.23.: COROLARIO

Con iguales hipótesis y notaciones que en el teorema anterior, supongamos que Φ tiene un único mínimo en $x^{\alpha} \in V$.

Entonces, si $\{x^{\alpha}\} = M$ verifica 2.22.4., es norma atractor débil.

3.- σ-SEMISISTEMA DINAMICO DISCRETO GENERADO POR UNA APLICACION DE H EN $F(H)$ $\sigma-\beta$ CONTINUA

Sea $f(.,1):H \longrightarrow F(H)$ una aplicación $\sigma-\beta$ -contínua.

Definimos $f: H\times I^{+}: \longrightarrow F(H)$ $\begin{cases} f(x,0)=\{x\} \\ f(x,k)=\bigcup_{y\in f(x,k-1)} f(y,1) \end{cases}$

3.1.- Teorema

f está bien definida .

Prueba

Basta probar que si K es un conjunto débilmente compacto contenido en H, $M=\bigcup_{y\in K} f(y,1)$, también lo es.

Sea $\{x_n\}\subset M$. Por construcción puede obtenerse otra sucesión correspondiente, $\{y_n\}\subset K$, tal que $x_n \in f(y_n,1)$.

Al ser K débilmente secuencialmente compacto, existe en K una subsucesión de y_n, $\{y_n^*\}$ débilmente convergente a un punto $y\in K$.

Por ser f σ-β-contínua, $f(y_n^*,1) \xrightarrow{\beta} f(y,1)$, y como $x_n^* \in f(y_n^*,1)$, por el teorema 1.3 existe una subsucesión $\{x_{n_1}^*\}$ que norma-converge, y por tanto es débilmente convergente, a un punto $x\in f(y,1)$; como $y\in K$, $x\in\bigcup_{y\in K} f(y,1)$, con lo cual se prueba que M es débilmente secuencialmente compacto, y de aquí (Cfr. (2) 24.3.9.), que es débilmente compacto.

3.2.- Teorema

$f(x,k+h)= f(f(x,k),h), \quad \forall x\in H, \quad \forall h,k \in I^{+}$

Prueba

Es idéntica a la del teorema II.2.2. de (3).

3.3.- Teorema

$f_k:H \longrightarrow F(H)$, $f_k(x)= f(x,k)$ es $\sigma-\beta$ -secuencialmente contínua para cada $k \in I^{+}$.

Prueba

Se hará por inducción sobre k.

El teorema es cierto, por definición, para k=1. Supongámoslo cierto para k-1.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión débilmente convergente a $x \in H$. Supongamos que en tal caso $f(x_n,k) \overset{\beta}{\not\longrightarrow} f(x,k)$.

Ello quiere decir que existe $\rho > 0$, y una sucesión $\{x_{n_i}\}$ de forma que $\beta(f(x_{n_i},k), f(x,k)) \geq \rho$. Tomando $z_{n_i} \in f(x_{n_i},k)$ de modo que $d(z_{n_i}, f(x,k)) \geq \rho$, puede obtenerse una sucesión $\{y_{n_i}\}$ con $y_{n_i} \in f(x_{n_i},k-1)$, de suerte que $z_{n_i} \in f(y_{n_i},1)$.

Como $x_{n_i} \xrightarrow{\sigma} x$, por hipótesis de inducción deberá cumplirse que $f(x_{n_i},k-1) \xrightarrow{\beta} f(x,k-1)$, y por el teorema 1.3 existe una subsucesión $\{y^*_{n_i}\}$ de $\{y_{n_i}\}$ tal que norma-converge a un punto $y \in f(x,k-1)$, de donde

$$f(y^*_{n_i},1) \xrightarrow{\beta} f(y,1)$$

y como $z^*_{n_i} \in f(y^*_{n_i},1)$ aplicando nuevamente el teorema 1.3 se tiene que existe $z \in f(y,1)$ que es el norma-límite de una subsucesión $\{z^{**}_{n_i}\}$ de $\{z^*_{n_i}\}$.

Como $y \in f(x,k-1)$, $f(y,1) \subset f(f(x,k-1),1) = f(x,k)$, luego $z \in f(x,k)$, con lo que $d(z, z^{**}_{n_i}) \geq \rho$ lo que contradice al hecho de que $\{z^{**}_{n_i}\}$ norma-converge a z.

3.4.- Corolario

En las condiciones del teorema anterior, f_k es contínua para cada $k \in I^+$.

3.5.- Corolario

(H, I^+, f) constituye un σ-semisistema dinámico discreto sobre H.

3.6.- Ejemplo

Sea $B=\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_j\}$, un conjunto finito de vectores de H, $B \neq \{0\}$.

Definimos $f(\cdot, 1): H \longrightarrow F(H)$, de modo que

$f(x,1)=\{(x/v_i)v_i, \; i=1,\ldots,j\}$

Sea $x_n \in H$ una sucesión débilmente convergente a $x \in H$. Por definición se tiene entonces que dado $\varepsilon>0$, existe $n(\varepsilon)\in I^+$, tal que para todo vector $w \in H$, $|(x_n/w)-(x/w)| < \varepsilon/\max \|v_i\|$, $n \geq n(\varepsilon)$.

Entonces, para todo $n \geq n(\varepsilon)$,

$$\beta(f(x_n,1),f(x,1))= \max_{y \in f(x_n,1)} \{d(y, f(x,1))\} =$$

$$= \max_{y \in f(x_n,1)} \{ \min_i \{\|y-(x/v_i)v_i\|\}\} \leq \max_{y \in f(x_n,1)} \{\|y-(x/v_i)v_i\| \quad (i=1\ldots j)\}$$

$$= \|(x_n/v_p)v_p-(x/v_p)v_p\| = |(x_n-x/v_p)| \, \|v_p\| < \frac{\varepsilon}{\max \|v_i\|} \|v_p\| \leq \varepsilon$$

Luego, $f(\cdot,1)$ es $\sigma-\beta$-contínua y como consecuencia, (H,I^+,f) un σ-semisistema dinámico discreto sobre H.

En particular, si B es ortonormal, y $k \in I^+$, $k>0$,

$\{0\} \cup f(x,1)= f(x,k)$, si $j>1$.

Si B fuera ortogonal y se tuviera además que $\|v_i\| = \lambda_i<1$, es fácil ver que, para $j>1$, $f(x,k)= \{0\} \cup \{\lambda_i^{2(k-1)}(x/v_i)v_i, \; i=1\ldots j\}$ por lo que si χ_i es una solución por x tal que $\chi_i(k)= \lambda_i^{2(k-1)}(x/v_i)v_i$ $(k>0)$, entonces $L^+(\chi_i)= \{0\}$.

3.7.- Ejemplo

Sea $H= l^2_{\mathbb{R}}$, y $\{e_n\}$ su base ortonormal canónica.

Definimos $f(\cdot,1): H \longrightarrow F(H)$, $f(x,1)= S[0,1]$.

Esta aplicación es, trivialmente $\sigma-\beta$-contínua, por lo que (H,I^+,f) es un σ-semisistema dinámico discreto sobre H.

Si $x\in H$, puede definirse $\chi(0)=x$, $\chi(k)=e_k$ $k\in I^+$.

χ es una solución del semisistema que verifica :

$$L^+(\chi)=\phi \quad , \quad L^+_\sigma(\chi)= \{0\}.$$

BIBLIOGRAFIA

(1) Del Castillo, F.: "Semisistemas dinámicos discretos"
Public. Fac. Ciencias U.Compl. Madrid. A-171.

(2) Köthe, G.: "Topological Vector Spaces I"
Springer-Verlag, 1.969.

(3) Rodriguez, G.: "Aplicaciones de la Teoría de Semisistemas Dinámicos Discretos a ciertos Algoritmos de Minimización"
Public.Dto.Análisis Mat. U.Santiago de Compostela

(4) Szego-Treccani.: "An abstract formulation of minimization algorithms"