

EL PROBLEMA DE n CUERPOS

C. Simó

§1.- Ecuaciones y definición del problema. Integrales primeras: Teoremas de Bruns, Painlevé y Poincaré.

Desde el punto de vista matemático consideraremos el problema de n cuerpos como el de n masas no nulas, puntuales, sometidas a la ley de la atracción universal de Newton. Si x_i es la posición del i -ésimo cuerpo respecto al c.d.m. y m_i su masa, se tiene

$$\ddot{x}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3} \quad i = 1 \div n \quad (1)$$

como sistema de ecuaciones diferenciales que rige el movimiento de los n cuerpos. (a)

Desde el punto de vista físico éste es un modelo idealizado. Por un lado los cuerpos celestes no son puntuales. Por otro las fuerzas en juego pueden ser de otro tipo distinto al $1/r^2$ newtoniano (sin embargo muchos de los resultados de la teoría siguen siendo válidos para otras fuerzas, por ejemplo del tipo $1/r^3$ que $[1,3]$, o exigiendo sólo comportamiento $1/r^2$ para distancias grandes). Finalmente (1) implica una hipótesis conservativa. Las pérdidas de energía por efecto de mareas, por ejemplo, no se tienen en cuenta. Volveremos a este punto más adelante (en §5).

Otro aspecto a tener en cuenta es que condiciones iniciales despreciables matemáticamente, por ejemplo un conjunto de medida nula en el espacio físico, pueden ser fundamentales físicamente. Supongamos que el inicio del cosmos fuera debido a una explosión. Se tendría entonces momento angular total nulo, lo que restringe el movimiento a una variedad de medida de Lebesgue nula.

A falta de una mejor comprensión de las leyes físicas que rigen el movimiento de los astros tomaremos (1) como modelo. Este

(a) Se supondrá en lo que sigue que la constante de Newton vale 1.

es un sistema de $6n$ ecuaciones de primer orden. Son clásicas las integrales primeras del centro de masas y de su velocidad, del momento angular $C = \sum_i m_i x_i \wedge \dot{x}_i$ y de la energía $h = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|}$. En total se dispone de 10 integrales primeras.

Además, debido a que la acción de S^1 en el espacio fásico transforma toda solución de (1) en otra solución (eliminación del nodo) y a que es posible eliminar el tiempo como variable independiente, se tiene una reducción a un sistema de $6n-12$ ecuaciones. Así el problema de 2 cuerpos queda resuelto y el de 3, reducido a 6º orden. Tal reducción puede verse en Whittaker.

Es natural preguntarse por la existencia de más integrales primeras de (1). Por el momento no se conoce ninguna otra (con carácter global; vease Losco para formas invariantes) y las experiencias numéricas efectuadas parecen indicar que no existen más integrales primeras (ver §5).

Resultados clásicos en esta dirección son los célebres

Teorema (Bruns 1887): Toda integral primera de (1) algebraica en x, \dot{x} , es función algebraica de las integrales clásicas.

Teorema (Painlevé 1896-1898): Toda integral primera de (1) algebraica en \dot{x} es función algebraica de las clásicas.

Teorema (Poincaré 1889): Sea $F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$ el hamiltoniano del problema de n cuerpos desarrollado en potencias de un pequeño parámetro μ (por ejemplo, la masa de uno de los cuerpos). Suponemos F analítico en μ , $F_0 = F_0(p)$ (independiente de q), F_i , funciones de p, q , $i > 0$

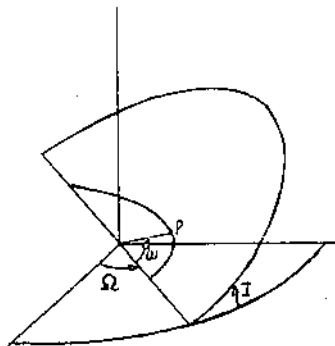
2π -periódicas en q . Suponemos, además, que para cada cuerpo p_i, q_i son variables canónicas asociadas a los elementos elípticos. Entonces el sistema $\dot{p}_i = -\partial F / \partial q_i$, $\dot{q}_i = \partial F / \partial p_i$ no tiene más integrales primeras analíticas en μ, p, q y 2π -periódicas en q que las clásicas.

Este teorema no es excesivamente sorprendente ya que se sabe (Moser)

que para cierto conjunto denso de sistemas hamiltonianos no existen integrales primeras de clase \mathcal{C}^1 distintas del hamiltoniano.

§2.- 2 cuerpos: Solución; efemérides; determinación de órbitas. Colisiones: Regularización LC y KS. Espacio de órbitas. Transferencia.

El problema más sencillo, único resuelto y el que sirve de base a las técnicas de perturbaciones y a la mayoría de problemas de la Astrodinámica es el de 2 cuerpos. Para estudiar el movimiento (Kepleriano) de uno de los cuerpos respecto al c.d.m común (u, homotéticamente, respecto al otro cuerpo) se introducen 2 ángulos: I (inclinación) y Ω (argumento del nodo) para fijar la posición del plano de la órbita respecto a un sistema de referencia dado. La órbita en dicho plano es una cónica de semieje a y excentricidad e , con un foco en el c. d.m. . Se define el ángulo ω (argumento del periastró) como el que forman la dirección del nodo y la del punto de la órbita más cercano al c.d.m. (periastró).



Los elementos $a, e, I, \Omega, \omega, \pi_0$, se llaman Keplerianos. El sexto π_0 o anomalía media en la época está de finido módulo 2π y varía linealmente con t . Los demás son constantes. La posición en la órbita se determina mediante el ángulo v , anomalía verdadera, formada por el periastró y la posición actual del astro. Este se relaciona mediante $t_g \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} E/2$ con la llamada anomalía excéntrica E , ángulo auxiliar, que a su vez se relaciona con el tiempo mediante $M = M_0 + ta^{-1/3} = E + e \sin E \pmod{2\pi}$.

Esta ecuación se conoce como ecuación de Kepler. Su resolución impulsó en parte la contribución de Cauchy a la teoría de la variable compleja. Una expresión de $E-M$ como serie en $\sin K\pi$ con coeficientes

funciones de e fue dada por Lagrange en 1769. Los coeficientes resultan ser funciones de Bessel, cuyo estudio sistemático se abordaría por primera vez 55 años más tarde.

El proceso de determinar la posición de un astro del que se conocen los elementos se llama cálculo de efemérides. Sin embargo, para el cálculo efectivo de la posición deberemos tener en cuenta la presencia de perturbaciones que alteran el problema de 2 cuerpos.

El problema inverso: conocida la posición del astro calcular sus elementos, se conoce como determinación de órbitas. Debido a la dificultad de conocer x y \dot{x} en un instante dado, dicho cálculo se convierte en un problema de valores en la frontera.

Es típica la determinación de la órbita de un asteroide o un cometa mediante observaciones angulares, esto es: para cada instante de tiempo se conoce en qué dirección está respecto al observador, pero no se saben ni su distancia ni su velocidad.

Los problemas motivados por la disponibilidad de un elevado número de observaciones no compatibles debido a los errores de observación llevaron a Gauss a desarrollar en 1801 el método de mínimos cuadrados.

Otro ejemplo típico de determinación de órbitas en el problema de 2 cuerpos es el del rendez-vous o interceptación: los datos de que se parte son t_1 , x_1 , t_2 y \bar{x}_2 .

Notable interés presenta el estudio de las órbitas de colisión (estops, en que los dos cuerpos chocan). En el espacio fásico (6 dimensional) llenan una variedad 4 dimensional, por lo que su medida es nula. Destaquemos que (1) deja de tener sentido si $x_1 = x_2$: la trayectoria ha llegado a una singularidad.

Es natural preguntarse si es posible encontrar un cambio de variables $x \begin{Bmatrix} Y \\ 0 \end{Bmatrix} t$ que permita regularizar (1), esto es, transformarla en una ecuación sin singularidades, y en caso afirmativo inter-

pretar físicamente el resultado.

Para movimiento en R^2 la respuesta fue dada en 1906 por Levi-Civita. La transformación

$$L(Z)Z = \begin{pmatrix} Z^1 & -Z^2 \\ Z^2 & Z^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^1 \\ Z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad ds = |x| dt$$

que introduce una nueva variable espacial Z (la raíz cuadrada de x considerados $x, Z \in \mathbb{C}$) y una nueva temporal, s , transforman (1) en $Z'' + \frac{h}{2} Z = 0$ (2), donde $' = \frac{d}{ds}$ y h es energía total. Se observa de paso que (2) es la ecuación de un movimiento armónico.

Se buscó en vano una matriz en R^3 que generalizara la matriz de Levi-Civita $L(Z)$, o sea, cuya primera columna fuera Z y las demás fueran ortogonales entre sí y a Z . Esta imposibilidad es debida al teorema de Poincaré de no existencia de campos vectoriales continuos en S^2 .

Sin embargo sí existen dichos campos (que además engendran el e.tangente) en S^3 . (Un célebre resultado establece que S^1, S^3, S^7 son las únicas esferas con esa propiedad).

En R^4 se sustituye $L(Z)$ por

$$\bar{L}(Z) = \begin{pmatrix} Z^1 - Z^2 - Z^3 & Z^4 \\ Z^2 & Z^1 - Z^4 - Z^3 \\ Z^3 & Z^4 & Z^1 & Z^2 \\ Z^4 - Z^3 & Z^2 & -Z^1 \end{pmatrix}. \quad \text{La aplicación } \begin{matrix} R^4 & \rightarrow & R^4 \\ Z & \rightarrow & \bar{L}(Z)Z \end{matrix}$$

fue dada por Hopf en 1931 y resucitada por Kustaanheimo y Stiefel en 1965 que la aplicaron a la regularización. Se sumerge R^3 en R^4 haciendo $x^4 = 0$. El cambio $L(Z)Z = x$, $ds = |x| dt$ convierte (1) en (2). La fibra de cada punto de R^3 por la aplicación KS es una circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt{|x|}$. Tanto en el caso LC como en el KS la regularización equivale físicamente a una colisión elástica: El movimiento Kepleriano se prolonga después de la colisión conservando energía y cambiando de signo la cantidad de movimiento.

Otra pregunta que podemos formularnos acerca del problema de dos cuerpos es la de qué estructura topológica puede darse al conjun-

to de las órbitas θ . Este puede obtenerse del espacio fásico identificando todos los puntos de una misma órbita o bien, equivalentemente, definiendo una distancia entre órbitas, ya sea a partir de las integrales primeras o geoméricamente, extendiendo adecuadamente la métrica de Hausdorff a conjuntos no acotados. Para que se tenga un espacio separado deben identificarse la órbita de llegada a una colisión con la correspondiente de salida (Souriau). Moser probó (1970) que para $h < 0$ fijado, el conjunto de órbitas es homeomorfo a $S^2 \times S^2$ (y que la subv. del espacio de las fases correspondiente es $T_0 S^3$).

Generalizando este resultado se tiene

Teorema (Simó 1974) El conjunto de las órbitas del problema de 2 cuerpos es homeomorfo a $S^2 \times S^2 \times \mathbb{R} - \{(a, -a, h) \mid a \in S^2, h \geq 0\}$. Este resultado implica la no existencia de "elementos" sin singularidades en el problema de 2 cuerpos, pues una carta es insuficiente. Otra consecuencia debida al teorema de Poincaré de no existencia de campos continuos en S^2 es que no existe ninguna aplicación continua $\theta \rightarrow \mathbb{R}^3$ que asigne a cada órbita un punto de la misma. Esto es, ningún elemento del tipo M_0 puede ser asignado de forma continua a una órbita.

Finalmente un problema que no se halla en la naturaleza pero aparece en astrodinámica es el de transferencia optimal de órbitas. Se trata de pasar de una órbita Kepleriana a otra de manera que el consumo de energía en dicho paso sea mínimo. El problema está resuelto en el caso de que ambas órbitas sean coplanarias, pero no en el caso general. Además existen casos en los que la transferencia óptima desde el punto de vista energético requiere tiempo infinito (las llamadas transferencias por el infinito, a través de 2 órbitas intermedias).

3.- Tres cuerpos: Pequeño T. de Sundman. Teorema de Sundman. Soluciones conocidas: soluciones periódicas. Posiciones de equilibrio relativo. Interés en el cálculo de variedades invariantes.

El paso de 2 a 3 cuerpos representa la aparición de multitud de diferencias. Podemos decir que en el problema general (masas cualesquiera) el conocimiento de soluciones del problema de 2 cuerpos no representa ninguna aportación.

Un primer teorema que se aplica a un $n \geq 2$ cualquiera de cuerpos es llamado t. del colapso total o pequeño t. de Sundman: Condición necesaria para que los n cuerpos colisionen es que el momento angular total sea nulo. Por tanto si $c \neq 0$ y $n=3$ sólo puede haber colisiones dobles. Sundman probó que la presencia del tercer cuerpo no es obstáculo para que el movimiento sea regularizable, y de hecho, si no se anula c , dió la solución al problema de 3 cuerpos.

Teorema (Sundman (1913)) Si $c \neq 0$, las coordenadas cartesianas y el tiempo son funciones analíticas de w que convergen si $|w| < 1$, donde

$$w = th \frac{\pi s}{\delta^4}, \quad s = \int_{t_0}^t (U+1) dt \quad \text{siendo } U \text{ la energía}$$

potencial y δ un número positivo función de las masas y de las condiciones iniciales para $t=t_0$. En particular el desarrollo es válido para toda t real.

A pesar de que este teorema resuelve el problema de 3 cuerpos excepto en un caso de medida nula ($c=0$), no es práctico dada la lenta convergencia de las series y el hecho de que no suministra información del comportamiento cualitativo.

La obtención de soluciones para intervalos de tiempo relativamente pequeños no ofrece dificultad (sea desde el punto de vista analítico o numérico. Véase sin embargo (10)). Sin embargo si queremos predecir algo para tiempo no acotado tendremos dificultades.

Estas desaparecen si la órbita es periódica. En este caso el conocimiento de la misma para un tiempo finito permite conocerla para todo tiempo.

Poincaré conjeturó que dada una órbita $x(t)$ de condiciones

iniciales X_0, \dot{X}_0 para $t=0 \quad \forall \varepsilon > 0, \forall T > 0$ existen condiciones X_0^*, \dot{X}_0^* tales que $|X_0 - X_0^*| < \varepsilon, |\dot{X}_0 - \dot{X}_0^*| < \varepsilon$ dan una órbita periódica $x^*(t)$ de manera que $\forall t \in [0, T] \quad |x(t) - x^*(t)| < \varepsilon$. Esta conjetura, a la que había que añadir $h < 0$ es la que ha impulsado la búsqueda de órbitas periódicas. Actualmente no se conoce todavía la certeza o falsedad de dicha conjetura.

En el caso de que 2 de las masas fueran pequeñas (caso planetario) Poincaré dividió las órbitas en 3 especies:

- 1) $I = 0, e \approx 0$
- 2) $I = 0, e$ grande
- 3) I grande, $e \approx 0$

La búsqueda efectiva de soluciones periódicas del problema de 3 cuerpos, se aborda a partir del problema restringido (ver §4), pero una exploración completa dista de llevarse a cabo.

Un tipo particular de soluciones periódicas es aquél en que se pasa de $X_i(0)$ a $X_i(t)$ mediante una homotecia H_t función de t , idéntica para $i = 1 \div n$, (en particular H_t puede ser un giro). Euler (1765) obtuvo los valores de $X_i(0)$ en el caso en que X_1, X_2, X_3 estuvieran alineadas, obteniendo 3 soluciones y Lagrange (1772) determinó las otras 2 soluciones restantes (simétricas) en las que los 3 cuerpos forman triángulo equilátero. (Naturalmente hay soluciones de tipo homotético no periódicas, llevando a colapso o a desintegración).

El conjunto de condiciones iniciales que da órbitas homotéticas periódicas es cerrado por homotecias. Cada clase se llama una posición de equilibrio relativo (p.e.r.). Se demuestra que en una p.e.r. los n cuerpos deben estar en un plano. El interés del conocimiento de los p.e.r. en el caso general se ha visto aumentado por el hecho de que los p.e.r. coinciden con los puntos críticos del potencial $-\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|}$ restringido a la variedad

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |x_i|^2 = 1.$$

Consideremos ahora la aplicación (E, J) que a cada punto del espacio fásico del que se excluyen las colisiones le hace corresponder energía y momento angular. Dados $h \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^3$ el conjunto $I_{h,c} = (E, J)^{-1}(h, c)$ es invariante por el flujo. El conocimiento de $I_{h,c}$ puede dar información sobre las órbitas con esos valores de energía y momento.

Smale introdujo el concepto de conjunto de bifurcación: valores de h, c donde $I_{h,c}$ cambia de estructura. Gracias a resultados de Easton y Cabral, se sabe que el conjunto de bifurcación contiene a los puntos críticos.

En el caso plano del problema de n cuerpos los puntos críticos son:

$$U \left\{ (-V(c, z), c) \in \mathbb{R}^2 \mid c \neq 0, z \in \alpha, \frac{1}{2} \sum m_i |z_i|^2 = 1 \right\}$$

$\alpha \in \text{p.e.r.}$

y el conjunto bifurcación es la unión de los puntos críticos con los ejes h, c .

En el caso espacial los puntos críticos de (E, J) se obtienen por unión del eje h con los puntos (h, c) tales que $(h, |c|)$ es punto crítico del caso plano.

El estudio del conjunto de bifurcación en el caso espacial debe llevarse a cabo directamente, pero en todo caso requiere conocer el de puntos críticos, y este el de p.e.r.

Esto ha sido llevado a cabo por C. Simó y J. Llibre. Se puede calcular $I_{h,c}$ en términos de antiimágenes de l_c donde

$$l_c(z) = -V(z)^2 / 2Y_c(z), \text{ siendo } \frac{1}{2} \sum m_i |z_i|^2 = 1, V \text{ el poten-}$$

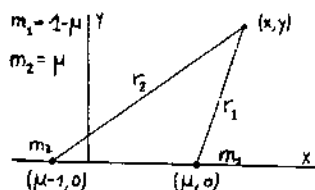
cial y $Y_c(z)$ la energía cinética de los cuerpos considerados como sólido rígido con momento angular c . Sin entrar en detalles digamos que en el caso de masas distintas se tienen 11 estructuras de $I_{h,c}$ para el caso plano y 17 en el caso espacial.

Destaquemos que mientras en el caso plano se tienen difeomorfismos, en el caso espacial se reducen a homeomorfismos. De hecho I_{hc} no son variedades topológicas en el caso espacial: La dimensión local varía.

§4.- El problema restringido: Ecuaciones. Curvas de velocidad nula. Soluciones periódicas. Aplicación de Poincaré. Estabilidad. Puntos fijos.

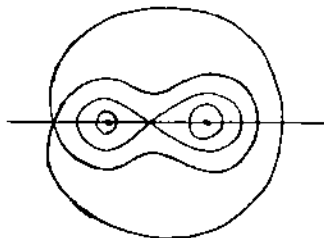
Un caso sencillo del problema de 3 cuerpos es aquel en que una de las masas es infinitesimal de manera que su influencia sobre las otras dos es despreciable. El movimiento de éstas es, pues, el de un problema de dos cuerpos. Supondremos que éste es circular y que el 3º se mueve en el plano de los 2 primeros. Hablamos de movimiento restringido plano y circular. Si usamos ejes (sinódicos) giratorios tales que el eje X contenga siempre los 2 primarios se obtiene

$$\ddot{x} - z\dot{y} = \Omega_x, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y, \quad \Omega = \frac{1}{2} \left[(1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2 \right] + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$



que son las ecuaciones que rigen el movimiento del cuerpo infinitesimal. Tienen una integral primera (Jacobi 1836): $\Omega - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) = C$. Fijadas unas condiciones iniciales conocemos C. Haciendo $\dot{x} = \dot{y} = 0$ se tienen las llamadas

curvas de velocidad nula que delimitan regiones (en coordenadas sinódicas), que no puede ocupar el 3er cuerpo. En la figura se muestra la forma de esas curvas para valores distintos de C. El movimiento sólo es posible en el interior de las mismas. Como para la luna se tiene un caso análogo a C_1 , ésta no puede escapar de la proximidad de la tierra para caer hacia el sol (en el modelo de 3 cuerpos restringido).



Los puntos x, y en los que Ω es estacionario corresponden a posiciones de equilibrio en el sistema sinódico y de equilibrio relativo en el sidéreo. Se encuentran las ya conocidas posiciones de Euler y Lagrange. El problema restringido de 3 cuerpos es suficientemente sencillo como para que se haya abordado de manera exhaustiva la búsqueda de órbitas periódicas. El primer estudio sistemático se inició en 1900 por Strömberg y sus colaboradores con el llamado problema de Copenhague caso en que $\mu = \frac{1}{2}$. Dada una órbita periódica podemos buscar condiciones iniciales próximas a las de dicha órbita que nos proporcionen otra órbita periódica. Por ejemplo, si buscamos órbitas periódicas simétricas, las c.i. pueden ser $x_0, y_0 = 0, \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0$, o equivalentemente x_0, c_0 . Si la órbita periódica puede prolongarse (curva en el espacio, x.c. por ejemplo), hablamos de familia de órbitas periódicas. (Para sistemas hamiltonianos si γ es periódica y θ es una aplicación de Poincaré sobre una variedad $2n - 2$ dimensional Σ transversal a γ contenida en la variedad de energía constante a la que pertenece γ , entonces esta órbita se halla en una familia 1-paramétrica de órbitas periódicas si 1 no es valor propio de $D\theta(m) \equiv$ matriz de monodromía, siendo $m = \gamma \cap \Sigma$). (Véase Robinson).

En el caso de Copenhague se hallaron 13 familias de órbitas periódicas, algunas de ellas con varias subclases. Posteriormente (Hénon, Bartlett) se han hallado 10 familias más de órbitas periódicas simétricas, se han encontrado familias no simétricas y se han estudiado los casos $\mu \neq 1/2$.

Una herramienta básica para la obtención de órbitas periódicas es la aplicación de Poincaré. Sobre $H = \text{cte.}$, cortemos el flujo transversalmente por una variedad Σ . Se define la aplicación de Poincaré θ (quizá sobre un subconjunto de Σ) como la aplicación que a un punto m de Σ le hace corresponder la próxima intersección $\theta(m)$ de Σ con el flujo pasando por m . Es claro que $\theta(m) = m$ es la condición de órbita periódica (simple), o, en general $\theta^k(m) = m$.

La aplicación de Poincaré es simpléctica (conserva la forma $dp \wedge dq$ de Σ) y en particular preserva medida. Los teoremas de punto fijo pueden servir para garantizar existencia de órbitas periódicas (pero téngase en cuenta que por preservar volumen no pueden aplicarse teoremas de contracción).

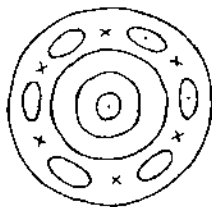
Una primera indicación de la estabilidad (orbital) de la órbita periódica la suministra el análisis del espectro de $D\theta$. Si existen valores propios reales el punto es hiperbólico en lo que hace referencia a la parte lineal (y también a la no lineal). En caso contrario es elíptico (linealmente) y la estabilidad frente a perturbaciones no lineales puede obtenerse en ciertos casos de la Teoría KAM (ver §5).

§5.- Totalidad de soluciones en el problema restringido: Integrabilidad. Teorema de Liouville-Arnol'd. Teorema KAM. Movimientos quasi-periódicos. Aplicaciones: Teorema de Leontovich, Sistema solar. Difusión de Arnol'd.

Hénon ha continuado la exploración numérica en el caso del problema de Copenhagen mediante aplicación de Poincaré respecto al plano x, \dot{x} , tratando todo tipo de órbitas (y no sólo las periódicas). Los resultados son muy instructivos.

Para valores C grandes (> 4.5) las sucesivas imágenes de x, \dot{x} por θ parecen llenar una curva cerrada de un modo denso correspondiendo a trayectorias quasi periódicas.

Sin embargo para número de rotación racional ($n\Omega$ de rotación = fracción de vuelta girada alrededor de un punto fijo en cada aplicación de θ , en promedio), aparecen islas que envuelven puntos elípticos y que quedan separadas por puntos hiperbólicos. A medi



da que nos acercamos al punto fijo de θ (correspondiente a la órbita periódica) la anchura de las islas (y de las zonas hiperbólicas) disminuye siendo no apreciable.

Para valores menores de ϵ aparecen regiones en las que las sucesivas imágenes de (x, \dot{x}) por θ parecen aleatorias y, en cierto modo llenan todo el posible espacio de variación de (x, \dot{x}) formando lo que se llama "un mar ergódico en el que permanecen islas integrables".

Si un sistema hamiltoniano posee n integrales primeras independientes F_i en involución, el teorema de Liouville-Arnol'd asegura que si $F_i = \text{cte. } i = 1, \dots, n$ define una variedad compacta, ésta es un toro n -dimensional (en el caso no compacto será $(S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$) en el que el flujo viene dado por $\dot{q}_i = \omega_i = \text{cte.}$

Al cortar dicho toro por Σ aparece esta variedad foliada por curvas invariantes. Esta es la característica de sistemas integrables. Por este motivo la presunta aparición de esas curvas ha motivado la búsqueda de una 2^{a} integral (la 1^{a} es la de Jacobi). En problemas más generales, esto es, con mayor nº de grados de libertad se habla de la búsqueda de la 3^{a} integral (siendo las 2 primeras las de energía y momento). Es claro que esta búsqueda es formal ya que la aparición de puntos elípticos e hiperbólicos de θ^k entre curvas invariantes de θ es general. En este aspecto una aproximación mediante la forma normal de Birkhoff es útil.

En el extremo opuesto de los sistemas integrables están los ergódicos. La aplicación θ es ergódica si para toda $f \in L^1(\Sigma)$, la media de f sobre Σ (supuesto Σ compacta) es igual a la media "temporal" sobre la trayectoria por θ . Esto es: $\forall x \in \Sigma$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\theta^k x) = \frac{1}{\mu(\Sigma)} \int_{\Sigma} f d\mu .$$

Se tiene de inmediato que si θ es ergódica todo subconjunto propio de Σ invariante por θ tiene medida nula.

En la práctica parece que todo sistema hamiltoniano tiene parte de "componente integrable" y parte de "componente ergódica". Sin embargo no está claro como abordar el problema.

Si un sistema hamiltoniano H está cerca de un sistema integrable $H_0 : H = H_0 + \varepsilon H_1$, podemos preguntarnos si retiene algo de las características de integrabilidad.

La respuesta la da el teorema de Kolmogoroff-Arnol'd-Moser (1954-1962-1963) probado por Arnol'd por el caso analítico, Moser para el caso \mathcal{C}^∞ y luego por Rüssmann para \mathcal{C}^1 (se sabe que para \mathcal{C}^1 es falso), que asegura (tanto para sistemas hamiltonianos como para aplicaciones globalmente canónicas) que si las perturbaciones son suficientemente pequeñas y se cumple una condición de no degeneración de H_0 (relativa a su jacobiano y hessiano), para la mayor parte de los toros invariantes estos sufren una deformación pero no desaparecen. Esta "mayor parte" está formada por aquellos toros para los que $\forall k \in \mathbb{Z}^n, \forall k_0 \in \mathbb{Z} \quad |(k, \omega) - k_0| > C_\omega / |k|^V$ donde C_ω es una constante que depende de ω , $V \geq n+2$ es un entero adecuado y $|K| = \sum |K_i|$. Observemos que en dimensión 1 hay que eliminar como posibles valores de ω los racionales y los n os de Liouville.

Sobre los toros invariantes el flujo es el de un movimiento quasi periódico : $\dot{q}_1 = \omega_1$ cuyas órbitas son densas. La primera referencia a las funciones quasi-periódicas puede encontrarse en la teoría clásica del movimiento de los astros a base de

eviciclos desarrollada ya por los astrónomos babilónicos.

Una aplicación del teorema KAM fue dada en 1962 por Leontovich: En el problema plano circular restringido de 3 cuerpos, si los puntos triangulares de equilibrio relativo son estables por la parte lineal (lo que ocurre si $\mu < \frac{1}{2} (1 - \sqrt{23/27})$) lo son también (con la posible exclusión un nº finito de valores de las masas) al considerar la parte no lineal.

Arnol'd aplicó su teorema al sistema solar con el siguiente resultado: si las masas, excentricidades e inclinaciones de los planetas son suficientemente pequeños, para la mayor parte de condiciones iniciales, en el sentido de medida de Lebesgue, el sistema solar es estable.

Destaquemos sin embargo que M. Hénon ha obtenido cotas de lo que significa en este caso "suficientemente pequeño", hallando que dichos valores deberían ser $O(10^{-50})$ como mucho.

Sin embargo podemos citar aquí la curiosa experiencia de P. Nacozy: Si se integra numéricamente el movimiento alrededor del sol de Júpiter y Saturno con sus masas actuales (no despreciables) durante un período largo de tiempo, no hay evolución apreciable.

Si se incrementan las masas y se repite la experiencia se halla idéntico resultado hasta que las masas son 29 veces las actuales. Entonces Saturno es expulsado rápidamente (en unos pocos centenares de años). Parece pues que las cotas para las que es válida la teoría de KAM pueden ser notablemente aumentadas.

Finalmente destaquemos que $H = \text{cte.}$ da una variedad $2n - 1$ dimensional y los toros invariantes de un sistema próximo a integrable son n -dimensionales. Si $n = 2$ dichos toros "separan" la variedad de energía constante. Si un movimiento se inicia en un toro invariante queda siempre sobre él y si entre 2 toros no puede escapar del recinto que delimitan.

Esto no es así si $n \geq 3$ en cuyo caso los toros "no separan" y el sistema puede evolucionar destruyéndose la estabilidad. Un ejemplo fue dado por Arnol'd mediante las llamadas cadenas de transición de toros bigotudos. Se tiene así la llamada inestabilidad topológica o difusión de Arnol'd.

Según Moser podemos imaginar el espacio fásico como una esponja estable. Los minúsculos agujeros corresponden a las zonas situadas fuera de los toros invariantes y la inestabilidad corresponde a la existencia de finísimos tubos comunicando los agujeros.

Hasta la actualidad no se sabe si la difusión de Arnol'd se presenta en la mayoría de los sistemas hamiltonianos o si ocurre lo contrario. En todo caso es muy difícil de determinar numéricamente.

§6.- Colisión triple: Importancia física. Teorema de Siegel. Regularización.

Otra característica esencialmente distinta del problema de 3 cuerpos respecto al de 2 es la posibilidad de colisiones triples. Se sabe (Siegel 1941) que las órbitas que conducen a colisión triple forman una variedad 13-dimensional en el espacio de fases 18-dimensional. Sin embargo se cree que el conjunto de órbitas que pasan cerca de la colisión triple tiene considerable importancia en la evolución del problema de tres cuerpos. De hecho parece comprobado que gran parte de las expulsiones de estrellas de una galaxia se debe a aproximación de una estrella a una binaria

fuerte (es decir, formada por estrellas muy cercanas, con elevada energía potencial). Se está así en una situación próxima a colisión triple.

Un resultado clásico asegura que cuando K cuerpos se acercan a un punto en el que colisionan, sus posiciones relativas a dicho punto tienden a una configuración homotética. Así, en el caso $K=3$ los cuerpos tienden a formar triángulo equilátero (independiente de sus masas) o a estar alineados. Un caso parecido se tiene cuando los cuerpos se alejan unos de otros en una expansión parabólica o hiperbólica.

Siegel probó que con la excepción de un conjunto discreto de valores de las masas las coordenadas de los tres cuerpos que colisionan (referidos al c.d.m.) se expresan analíticamente (para $t > 0$) en función de las variables $t^{1/2}$, $t^{-\lambda_2}$, $t^{-\lambda_3}$ en el caso equilátero y $t^{2/3}$, $t^{-\lambda_2}$ en el colineal. Exceptuando un conjunto discreto de masas, λ_2, λ_3 son irracionales y por tanto la singularidad para $t=0$ es esencial (a diferencia de la colisión binaria, en la que el parámetro de uniformización es $t^{2/3}$).

Así pues, no parece que sea posible una regularización analítica de la colisión triple en el caso general. De hecho McGehee, Marchal y Waldvogel han dado ejemplos de casos en los que tal regularización es imposible.

Una regularización más débil que la analítica es la geométrica. Sea (X_i, \dot{X}_i) una sucesión de condiciones iniciales que tiende hacia una c.i. (\bar{x}, \bar{x}) que lleva a colisión triple. Si $\forall t \in \mathbb{R}_+$ fijo, $X(t, x_i)$ depende continuamente de x_i , podemos definir la prolongación de $X(t)$ en el caso de colisión triple como $\lim_{i \rightarrow \infty} X(t, x_i)$. Sin embargo hay ejemplos en los que $\forall \epsilon > 0$ la ϵ -bola de (\bar{x}, \bar{x}) contiene puntos cuyas trayectorias se alejan después del paso por las proximidades de colisión triple y uno de los cuerpos puede salir de esta situación con energía arbitrariamente grande. Sin embargo éste es otro campo en el que hay mucho camino por recorrer.

7.- Evolución final: Clasificación de tipos de movimientos.

Chazy (1922) clasificó los tipos de movimientos del problema de tres cuerpos cuando $t \rightarrow \infty$ en 7 tipos:

- 1) H : Movimiento hiperbólico, en que las distancias mutuas $|x_i - x_j|$ son de la forma $O(t)$.
- 2) HP_i : Movimiento hiperbólico-parabólico. El cuerpo i se aleja hiperbólicamente de los otros 2, y éstos se hallan en un movimiento parabólico (esto es la distancia es $O(t^{2/3})$).
- 3) P : Movimiento triparabólico: $|X_i - X_j| = O(t^{2/3})$.
- 4) HE_i : Movimiento hiperbólico-elíptico. Análogo a HP_i pero hallándose los 2 cuerpos restantes en movimiento elíptico.
- 5) PE_i : Parabólico elíptico.
- 6) L : Movimientos estables a la Lagange : $\sup_{i,j, t > 0} \{|X_i - X_j|\} < \infty$
- 7) OS : Movimientos oscilatorios: $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sup_{i,j} \{|X_i - X_j|\} = \infty$,

$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{i,j} \{|X_i - X_j|\} < \infty$. Del tipo 7) Chazy no disponía

de ningún ejemplo. El primero fue suministrado por Sitnikov (1959). (Ver §8).

Si $h > 0$ sólo son posibles 1), 2), 4). Dado que i puede ser 1, 2, 3, hay un total de 7 posibles evoluciones finales para $t \rightarrow +\infty$. Las mismas se tienen para $t \rightarrow -\infty$. Puede pasarse de cualquiera de ellas para $t \rightarrow -\infty$ a cualquier otra $t \rightarrow +\infty$, según ha sido probado por Birkhoff, Sitnikov y Alexeyev, y el conjunto de condiciones que permite el paso de una a otra tiene medida positiva (excepto en el tipo HP_i , cuya medida total es nula). Es decir, puede darse captura parcial ($H_{-\infty} \rightarrow HE_{i+\infty}$) y su recíproco (desintegración completa), así como intercambio ($HE_{i-\infty} \rightarrow HE_{j+\infty}$). Si $h < 0$ la situación es mucho más complicada. Dejando de lado el caso PE_i

(de medida nula) consideramos el HE_i , L y OS (cuya medida no se conoce aún).

Se sabe que es posible el paso de cualquiera de estas situaciones para $t \rightarrow -\infty$ a otra $t \rightarrow +\infty$, pero que las transiciones $HE_{i-\infty} \rightarrow HE_{i+\infty}$, $HE_{j-\infty} \rightarrow HE_{j+\infty}$, $L_{-\infty} \rightarrow L_{+\infty}$ ocurren para conjuntos de c.i. de medida positiva mientras que los pasos $HE_{i-\infty} \rightarrow L_{+\infty}$, $HE_{i-\infty} \rightarrow OS_{+\infty}$ tienen lugar para conjuntos de medida nula. Existe multitud de criterios para reconocer que se está en un caso HE_i cuando se procede a la integración numérica de las ecuaciones del movimiento.

HE_i son abiertos conexos en el espacio fásico, pero cada uno de ellos tiene ramificaciones complicadas en el espacio de fases. Birkhoff decía que HE_i eran como tres corrientes de agua proviniendo de $-\infty$ que se ramificaban en un conjunto numerable de arroyos que posteriormente se juntaban para (a excepción de una cantidad de agua de medida nula que puede quedar en L o OS) pasar a formar las 3 corrientes $HE_{i+\infty}$.

Szebehely ha conjeturado que si la relación entre 2 masas pequeñas es suficientemente cercana a 1 y si $c^2 h < 0$ y suficientemente cercano a cero, casi todas las soluciones son del tipo HE_i tanto para $t \rightarrow +\infty$ como para $t \rightarrow -\infty$.

8.- Movimiento quasi-aleatorio: Problema de Sitnikov.

Consideremos dos masas $m_1 = m_2 = 1/2$ en movimiento elíptico en el plano x, y y una tercera masa $m_3 \approx 0$ en el eje Z , pasando por el c.d.m. de m_1 y m_2 . Sea 2π el período de m_1 y m_2 . La ecuación que rige el movimiento de m_3 es $\ddot{z} = -z(z^2 + r^2(t))^{-3/2}$, donde $r(t)$ es la distancia de m_1 al origen. Si la órbita es circular el movimiento de m_3 es periódico.

Sean $t_k, k \in \mathbb{Z}$, ceros de z . Suponemos $t_k < t_{k+1}$, e introducimos $S_k = \left[\frac{t_{k+1} - t_k}{2\pi} \right]$. A cada solución $z(t)$ podemos asociar la sucesión (infinita por ambos lados) $\{S_k\}$.

Teorema. (Sitnikov) Dada una excentricidad $e > 0$ suficientemente pequeña existe un entero $m = m(e)$ tal que cualquier sucesión $\{S_k\}$ con $S_k \geq m$ corresponde a una solución de la ecuación diferencial anterior.

El teorema puede extenderse a valores de m , no nulos y de e cualesquiera (con excepción de un conjunto discreto).

Si, por ejemplo $S_k \rightarrow \infty$ para $k \rightarrow \infty$, S_k acotado para $k \rightarrow -\infty$ tendremos una transición de movimiento tipo Lagrange a oscilatorio. Si S_k vale infinito para un valor de k finito, se tendrá un escape. Aparentemente el movimiento, siendo determinista, tiene un comportamiento aleatorio ya que la sucesión $\{S_k\}$ puede ser cualquiera (con $S_k \geq m$).

Básicamente la demostración del teorema usa el shift de Bernoulli: Sea A un alfabeto finito o numerable. Considera el espacio X de las sucesiones doblemente infinitas $\{S_k\}$, $S_k \in A$. En dicho espacio se introducé una topología definiendo como base de entornos de

$S^* = \{S_k^*\}$ a $U_j = \{S \mid S_k = S_k^*, |k| < j\}$. Si P es una medida en

$A \mid \sum_{S_k \in A} P(S_k) = 1$, puede dotarse a X de la medida producto de la forma habitual. La aplicación $\sigma : X \rightarrow X \mid (\sigma(s))_k = S_{k-1}$ se llama el shift de Bernoulli. Trivialmente preserva medida, es ergódica y además es un homeomorfismo. Definiendo la entropía como $\sum_{S_k \in A} -P(S_k) \ln P(S_k)$ se tiene que dos shifts son isomorfos si y sólo si tienen la misma entropía.

En el caso de que A sea finito σ equivale a la llamada transformación del panadero.

La idea esencial es incluir el shift como subsistema de un homeomorfismo $\phi : Y \rightarrow Y$, esto es:

... tal que $X \rightarrow X$ conmuta, siendo

$$\begin{array}{ccc} \tau & & \tau \\ \downarrow & \Downarrow & \downarrow \\ Y & \rightarrow & Y \end{array} \quad \tau \text{ un homeomorfismo entre } X \text{ y su imagen.}$$

La teoría de los sistemas dinámicos quasi-aleatorios (= sistemas con entropía topológica positiva) ha sido desarrollada por Alexeyev.

Se sabe (Markus, Meyer) que con carácter genérico (una propiedad es genérica si es cierta para una intersección numerable de abiertos densos), los sistemas hamiltonianos no son ni integrables ni ergódicos (en cada variedad $H = \text{cte}$). Podemos conjeturar sin embargo que un comportamiento del tipo del problema de Sitnikov (relacionados con la difusión de Arnol'd) sí es genérico.

9.- Particularidades del problema de cuatro cuerpos: P.e.r. y evolución final.

El problema de cuatro cuerpos ofrece un nuevo salto en cuanto a dificultad respecto al de 3 cuerpos. Sin embargo parece que no haya ya variación cualitativa de las situaciones que pueden darse al aumentar el número de cuerpos (aunque no hay resultados en este sentido).

En cuanto a p.e.r. se conocían clásicamente algunas soluciones. Si las masas son iguales las soluciones eran del tipo cuadrado, triángulo equilátero con una masa en el centro o colineales. El autor, en colaboración con J. Llibre, ha encontrado recientemente otra familia de soluciones en las que tres de las masas se hallan en los vértices de un triángulo isósceles y la cuarta en el interior. En total se conocen 50 p.e.r. y se tenían fundados motivos para creer que eran las únicas. Véanse sin embargo resultados de Palmore. Smale conjeturó que la energía potencial sobre $\frac{1}{2} \sum m_i (z_i)^2 = 1$ es función de Morse. En este caso y dado que dicho conjunto es homeomorfo a $P_{n-2}(\mathbb{C}) - D$ ($D = \text{colisiones}$), la conjetura implica que el nº de p.e.r. es finito para todo n , y que para $n = 4$ la suma al-

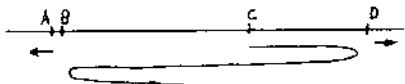
ternada del nº de p.e.r. que tienen índice por e impar es 2 (valor de la característica de Euler-Poincaré de $P_2(\mathbb{C}) - D$). Esto se cumple en nuestro caso ya que hay 12 p.e.r. alineadas y 8 de tipo equilátero con índice 2, 24 de tipo isósceles con índice 3 y 6 de tipo cuadrado con índice 4.

A diferencia del caso $n=3$ en que el número de las p.e.r. es independiente de las masas, sabemos que si una de las masas es suficientemente pequeña hay 38 p.e.r. si las otras 3 son suficientemente parecidas y 34 en caso contrario. Para los valores en que ocurre la transición (que forman una variedad de codim. 1 en el espacio de las masas) el potencial restringido deja de ser f. de Morse. Un análisis completo está en estudio.

Respecto a evolución final aparecen dos tipos nuevos de comportamiento:

a) La expansión super-hiperbólica. Sólo se presenta si $n \geq 4$. Si $d(t)$ es el diámetro del sistema, se tiene $d(t)/t \rightarrow \infty$. Como mínimo hay 2 distancias mutuas $|X_i - X_j|$ tales que $\overline{\lim} |X_i - X_j|/t = +\infty$ $\underline{\lim} |X_i - X_j|/t = 0$.

b) La expansión infinita en tiempo finito (Mather-McGehee). Sólo se presenta si $n \geq 4$. Para ello imaginemos un cuerpo C de masa pequeña oscilando entre una binaria AB y el cuarto cuerpo D que se alejan de forma aproximadamente lineal del c.d.m.



Las colisiones con D son de tipo elástico. Con la binaria AB son de tipo explosivo, extrayendo C tanta energía como se quiera, que posteriormente comunicará a D y colapsando la binaria hacia energías potenciales mayores.

Tanto en el caso a) como en b) la demostración se lleva a cabo por un proceso análogo al del T. de Sitnikov.

Un notable esfuerzo se dedica últimamente a la obtención de

órbitas periódicas del problema general de 4 cuerpos (e incluso para mayor número de cuerpos) por parte de Hadjidemetriou y su escuela. Partiendo de un problema con 2 cuerpos no nulos y los restantes nulos tales que las masas nulas describen órbitas periódicas del problema restringido con periodos conmensurables, se usa el método de la continuación analítica prolongando la familia de órbitas periódicas a masas no nulas.

§10.- Valores mayores de n. Soluciones particulares. Teorema de Moulton. Experiencias numéricas. Caso $n < 1000$. Regularización. Caso $n \approx 1000$.

Para valores de $n > 4$ se sabe que el problema de n cuerpos puede descomponerse en subsistemas o cúmulos. Si cuando $t \rightarrow \infty$ esos subsistemas se alejan unos de otros en movimiento del tipo parabólico o hiperbólico los centros de masas de cada subsistema tienden hacia una solución homotética. Poco se sabe del movimiento interno en cada cúmulo (excepto si está formado por 2 o 3 cuerpos o si su movimiento es del tipo 1).

Para $n > 4$ y masas cualesquiera se dispone de algunas experiencias en la búsqueda de órbitas periódicas (ver §9). Si todas las masas excepto una son pequeñas (caso planetario) es posible la aplicación del teorema KAM (ver §5).

Se desconoce el número y forma de los p.e.r. (ver §4). Sin embargo sí se conocen para el caso alineado. En efecto, Moulton probó que en el problema de n cuerpos existen para todos los valores de las masas $n!1/2$ p.e.r. alineadas. El teorema se demuestra por inducción respecto al número de masas y por prolongación respecto al valor de la última masa introducida.

Por lo que antecede sólo queda el recurso de las experiencias numéricas. Este ha sido utilizado in extenso y ha contribuido en gran parte al refinamiento de los métodos de resolución de e.d.o.

Son corrientes los programas que integran las ecuaciones del movimiento para varios cientos de cuerpos, sea directamente o por métodos de Montecarlo. En todo caso debe pensarse que la integración directa requiere pasos variables para cada cuerpo. En caso contrario cada paso de integración significaría la evaluación de $\binom{n}{2}$ distancias. En este problema juegan un papel preponderante las binarias. Estas exigen un paso de integración muy pequeño y en las proximidades de una colisión pueden tenerse errores notables. Por ello es imprescindible efectuar un paso a variables regularizadas para tratar este problema.

Una técnica debida a Heggie permite la regularización de todas las colisiones binarias. Para ello se consideran $y_{ij} = x_i - x_j$ como variables independientes y se efectua la regularización KS para cada una de ellas. Sin embargo el nº de grados de libertad crece de $3n$ a $2n(n-1)$, por lo que deja de ser práctico si $n > 4$. Indiquemos que en este caso el Hamiltoniano es polinomial. Para valores de n mayores debe recurrirse a procedimientos aproximados mas groseros. Una técnica adecuada puede ser la de estimación del campo creado por las partículas alejadas y el estudio correcto sólo para los más próximos. Otro método consiste en la aproximación de los términos $\frac{1}{r_{ij}^2}$ por cantidades previamente almacenadas en memoria. Esta técnica ha sido usada por Hohl y le permite tratar cientos de miles de partículas. De esta manera puede conseguirse simular el comportamiento de galaxias. Sin embargo el movimiento es inestable y el escape de estrellas es continuo.

11.- Técnicas de perturbaciones. Teorías planetarias. Movimientos de la luna. Pequeños denominadores. Resonancias.

En los problemas prácticos de cálculo de efemérides de astros

del sistema solar se recurre a la integración numérica y a las teorías de perturbaciones. En todo caso si la órbita real se aleja lentamente de una órbita Kepleriana, puede tomarse ésta como órbita de referencia y dar sólo las desviaciones con respecto a la misma. En ciertos casos es más interesante tomar como órbita de referencia otras soluciones, sean las del problema de los dos centros (como en la teoría de Vinti de un satélite artificial en el campo terrestre) o las órbitas intermedias de Garfinkel o Aksnes para el mismo problema, o bien la órbita de variación de Hill para el movimiento de la luna, etc.

Otra técnica consiste en facilitar en cada momento la órbita Kepleriana (o no) osculatriz. Este se define como la órbita kepleriana cuya posición y velocidad coinciden en cada momento con la órbita real. Por supuesto que los elementos $a, e, I, \omega, \Omega, M_0 - ta^{-1/3}$ serán funciones del tiempo. Sea σ el vector formado por dichos elementos. Se tendrá $\dot{\sigma} = \varepsilon \varphi(\sigma, t)$, donde el factor ε indica que $\dot{\sigma}$ sería cero si no hubiera la perturbación, y que ésta se supone pequeña. Partiendo de un valor inicial σ_0 se obtiene σ_1 mediante $\sigma_1 = \sigma_0 + \varepsilon \int_0^t \varphi(\sigma_0, \tau) d\tau$. El método de Picard deja de ser práctico ya que puede $\varphi(\sigma_1, t)$ ser expresión difícil. Se aplica un desarrollo de Taylor limitado $\varphi(\sigma_1, t) = \varphi(\sigma_0, t) + D\varphi(\sigma_0, t) \varepsilon \int_0^t \varphi(\sigma_0, \tau) d\tau$ con lo que $\sigma_2 = \sigma_1 + \varepsilon^2 \int_0^t D\varphi(\sigma_0, \tau) \int_0^\tau \varphi(\sigma_0, \xi) d\xi d\tau$.

La iteración da lugar al método clásico de teoría de perturbaciones iniciado por Lagrange, Laplace y Poisson.

Los métodos de series de Lie, promedios, von Zeipel, etc. consisten en técnicas iterativas para eliminar la perturbación del hamiltoniano inicial $H = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots$ con objeto de convertirlo en un hamiltoniano independiente de las variables angulares.

Las sucesivas iteraciones y su convergencia se ven dificultadas

por la aparición de pequeños denominadores. Por ejemplo, en el método clásico se tiene en cada paso que la función a integrar respecto al tiempo es del tipo $\sum_{k \in \mathbb{Z}^3} A_k(p) \exp i(k,q)$ y si (k,q) es

pequeño dicho término aparece multiplicado por un factor grande. Este hecho implica que la mayor parte de las series utilizadas en mecánica celeste tienen carácter asintótico y no son válidas uniformemente.

En las teorías planetarias se suele usar como pequeño parámetro la masa de los cuerpos perturbadores. El estudio iniciado por Laplace de la variación de e y ω para los distintos planetas debido a sus perturbaciones (al menos en una aproximación de primer orden) condujo a introducir la ecuación o polinomio característico.

La teoría de la luna es un ejemplo de la dificultad que encierran los cálculos en Mecánica Celeste. Por una parte ni su masa ni la perturbación solar son pequeñas, con lo que los desarrollos que se obtienen convergen lentamente. Por otra parte la precisión de las medidas actuales (del orden de decenas de cm . en la distancia mediante uso de reflectores laser) obliga a utilizar teorías de orden muy elevado. A título de ejemplo digamos que una teoría aceptable de la luna que diera correctamente su posición con error de unos pocos metros por siglo requeriría tener en cuenta la influencia de todos los planetas (excepto Plutón) y trabajar con desarrollos de Fourier conteniendo millones de términos.

Un tal trabajo requiere el uso de ordenadores en el manejo de expresiones analíticas y en procesos analíticos de derivación, integración y multiplicación de series.

El ajuste de las desviaciones de la posición de la luna respecto a las que predice la teoría newtoniana mediante precisas y muy numerosas observaciones de ocultaciones de estrellas por la misma ha permitido constatar la disminución de la cons-

tante de la gravitación y en breve se dispondrá de valores de la velocidad de variación.

Finalmente indiquemos que la aparición de pequeños denominadores está relacionada con el fenómeno de resonancia. Hay que destacar las numerosas resonancias que se producen en el sistema solar, tanto entre planetas como con satélites, asteroides, o con anillos de Saturno. Los asteroides evitan ciertos valores del movimiento medio mientras que muestran preferencia por otros. Se está lejos de tener una explicación satisfactoria de estos hechos, pero en todo caso la resonancia parece tener un papel importante en la evolución del sistema solar hacia su estado actual.

CONCLUSION: Wintner decía que toda generación de matemáticos ataca el problema de 3 cuerpos (y por extensión el de n) de una manera peculiar y con herramientas propias. Hoy en día podemos afirmar que métodos utilizados abarcan de la topología al estudio probabilístico, de la teoría de puntos críticos a las aproximaciones diofánticas y del análisis no lineal a las técnicas numéricas. Además la precisión alcanzada por la técnica en las mediciones ha permitido que las medidas sean mucho más precisas que las teorías, obligando a rehacerlas y a estudiar las bases físicas en que se apoyan.

Concluamos con una anécdota. V. Szebehely , autor del mejor texto sobre el problema restringido y de numerosísimos artículos y persona sumamente afable, ha felicitado las Navidades del 75 a sus amigos y conocidos que trabajan en Mecánica Celeste diciendo: Deseo fervientemente que usted "resuelva" en 1976 el problema de 3 cuerpos.

BIBLIOGRAFIA

- Abraham, R., Marsden, J.E.: Foundations of Mechanics, Benjamin, 1967
- Alexeyev, V.M.: "Quasirandom dynamical systems. I, II, III", Math. USSR Sbornik, 5, (1968), 73-128; 6, (1968), 505-560; 7, (1969) 1-43.
- Alexeyev, V.M.: "Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps", Actes Congrès Inter. Math., Nice, 1970, Tome 2, 893-907, Gauthier-Villars.
- Arnol'd, V.I.: "Small denominators and problems of stability of motion in Classical and Celestial Mechanics", Russ. Math. Surveys, 18, (1963), 85-192.
- Arnol'd, V.I.: "Instability of Dynamical Systems with Several Degrees of Freedom", Soviet Math. Dokl., 5, (1964), 581-585.
- Arnol'd, V.I., Avez, A.: Ergodic Problems of Classical Mechanics. Benjamin, 1968.
- Bartlett, J.H.: "The Restricted Problem of Three Bodies, I, II", Mat. Fys. Skr. Vid. Selsk., 2, n° 7, (1964); 3, n° 1, (1965).
- Birkhoff, G.: Dynamical Systems, Am. Math. Soc., 1927.
- Cabral, H.E.: "On the Integral Manifolds of the N-Body Problem", Inventiones Math., 20, (1973) 50-72.
- Chazy, J.: "Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des 3 corps quand le temps croît indéfiniment", Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 3^e série, 39, (1922) 29-130.
- Easton, R.: "The Topology of the Regularized Integral Surfaces of the 3-Body Problem", J. of Diff. Equa., 12, (1972) 361-384.
- Easton, R.: "Some Topology of n-Body Problems", J. of Diff. Equa., 19, (1975) 258-269.
- Escobal, P.R.: Methods of Orbit Determination, J. Wiley, 1965.

- Gauss, K.F.: Theoria Motus, Dover (reprint) 1963
- Hadjidemetriou, J.D.: "Families of Periodic Orbits in the General N-Body Problem", en Long-Time Prediction in Dynamics; 223-240, Ed. V. Szebehely, B.D. Tapley, Reidel, 1976.
- Hagihara, Y.: Celestial Mechanics, Vol. 1, MIT Press, 1970; Vol. 2, MIT Press, 1972; Vol. 3, Japan Society for the Promotion of the Science, 1974; Vol. 4, Japan Soc., 1975.
- Heggie, D.: "A Global Regularisation of the Gravitational N-Body Problem", Celestial Mechanics, 10, (1974) 217-242.
- Hénon, M.: "Exploration numérique du problème restreint. III, IV", Bulletin Astronomique, série 3, 1, fasc. 1, 57, (1966), fasc. 2, 49 (1966)
- Hohl, F.: "N-Body Simulations of disks", en Dynamics of Stellar Systems, A. Hayli (editor), IAU Symposium, n° 69, p. 349, Reidel, 1975.
- Kolmogoroff, A.N.: "General Theory of Dynamical Systems and Classical Mechanics", Proceed. 1954, Inter. Cong. Math (en ruso). Traducido al inglés en Abraham, apéndice D.
- Leontovich, A.M.: "On the Stability of the Lagrange Periodic Solutions for the Reduced Problem of the Three Bodies", Soviet Math. Doklady, 3, (1965) 425-430.
- Losco, L.: "Sur un invariant intégral du problème des n-corps: conséquence de l'homogénéité du potentiel", en The Stability of the Solar System and of Small Stellar Systems. Y. Kozai (Editor), IAU Symposium N° 62, 249-255, Reidel, 1974.
- McGehee, R.: "Triple Collision in the Collinear Three-Body Problem", Inventiones Math., 27, (1974) 191-227.
- McGehee, R., Mather, J.N.: "Solutions of the collinear four body problem which become unbounded in finite time", Battle Recontres, 1974 Proceedings.
- Marchal, Ch.: "Qualitative Methods and Results in Celestial Mecha-

- tics", en Long-Time Predictions in Dynamics, Ed. V. Zebehy, B.D. Tapley, 181-208, Reidel, 1976.
- Markus, L., Meyer, K.R.: "Generic Hamiltonian Dynamical Systems are neither Integrable nor Ergodic", Memoirs of the A.M.S., 144, 1974.
- Moser, J.: "Nonexistence of Integrals for Canonical Systems of Differential Equations" Comm. on Pure and Appl. Math., 8, (1955) 409-436.
- Moser, J.: "On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus", Nach. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys. Klass., 1, (1962), 1-20.
- Moser, J.: "Regularization of Kepler's Problem and the Averaging Method on a Manifold", Comm. on Pure & Appl. Math., 23, (1970) 609-636.
- Moser, J.: Stable and Random Motion in Dynamical Systems, Princeton Univ. Press, 1973.
- Moulton, F.R.: "The Straight line solutions of the problem of N-bodies", Annals of Math., 12, (1910), 1-17.
- Palmore, J.: "Classifying Relative Equilibria, I, II", Bull. A.M.S., 79, (1973) 904-908; 81, (1975), 489-491.
- Palmore, J.: "Classifying Relative Equilibria, III", Letters in Math. Phys., 1, (1975) 71-73.
- Poincaré, H.: Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste. Gauthier-Villars, 1892, 1893, 199.
- Robinson, C.: "Lectures on Hamiltonian Systems", Monografias de Matemática, Guanabara, 1971.
- Rüsmann, H.: "Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringes", Narichten Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Klass., 1970.
- Saari, D.G.: "Expanding gravitational systems", T.A.M.S., 156, (1971) 1-22.
- Siegel, C.L., Moser, J.K.: Lectures on Celestial Mechanics, Springer-Verlag, 1971.

- Simó, C.: "La variedad de órbitas Keplerianas y la teoría general de perturbaciones" Tesis, Universidad de Barcelona, 1974.
- Simó, C.: "Aspects Topologiques en Mécanique Céleste", Table ronde de Mec. Cel., Institut Henri Poincaré, Paris, 21, mai 1975.
- Simó, C.: "Posiciones de equilibrio relativo del problema de 3 + 1 cuerpos y su evolución", Comunicación en la Reunión Anual de Matemáticos Españoles, Málaga, 1976.
- Sitnikov, K.A.: "The existence of oscillatory motions in 3-body problem", Soviet Phys. Doklady, 5, (1961), 647-650.
- Smale, S.: "Topology and Mechanics", Inventiones Math., 10, (1970) 305-331; 11, (1970) 45-64.
- Souriau, J.M.: Structure des Systèmes dynamiques, Dunod, 1970
- Sternberg, S.: Celestial Mechanics, Benjamin, 1969
- Stiefel, E.L., Scheifele, G.: Linear and Regular Celestial Mechanics, Springer-Verlag, 1971
- Szebehely, V.: Theory of Orbits. The restricted problem of 3 bodies, Academic-Press, 1967.
- Waldvogel, J.: "Triple Collision" en Long-Time Predictions in Dynamics, 241-258, Ed. V. Szebehely, B.D. Tapley, Reidel, 1976.
- Whittaker, E.T.: A Treatise on the Analytical Dynamics of particles and rigid bodies, Cambridge Univ. Press, 1973.
- Wintner, A.: The Analytical Foundations of Celestial Mechanics, Princeton Univ. Press, 1941.