



Den relativistiska himmelssfären

Lorentztransformationer med hjälp av Cliffordalgebra

The Relativistic Celestial Sphere

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

Rickard Cullman

Albin Nydén

Hanna Persson

Peter Ryberg

Den relativistiska himmelssfären

Lorentztransformationer med hjälp av Cliffordalgebra

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Peter Ryberg

Examensarbete för kandidatexamen i matematik inom Matematikprogrammet vid Göteborgs universitet

Rickard Cullman Albin Nydén

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers

Hanna Persson

Handledare: Andreas Rosén

Institutionen för Matematiska vetenskaper
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Göteborg, Sverige 2020

Förord

Under arbetets gång har gruppen, regelbundet på veckobasis, fört en dagbok som kortfattat sammanfattat arbetsprocessen. Samtliga i gruppen har bidragit med att skriva i denna dagbok. Utöver dagboken har varje gruppmedlem individuellt fört en tidslogg som innehåller såväl aktivitet som den tid det tagit. Detta projekt har i mångt och mycket varit en litteraturstudie med målet att replikera ett resultat i boken *Geometric Multivector Analysis* [4] av vår handledare Andreas Rosén. För att uppnå detta mål har varje gruppmedlem enskilt skrivit tre delrapporter, vardera med olika bitar av det innehåll som utgör huvudrapporten. Varje gruppmedlem har således redogjort för de resultat som rapporten innehåller.

Vi betecknar nedan gruppmedlemmarnas bidrag till såväl huvudrapporten som arbetsprocessen. Vi anger vilka som varit huvudförfattare för respektive avsnitt, men samtliga i gruppen har vägt in i hela texten i sig.

Rickard Cullman: Inledning, avsnitt 3, 5.1 och 6.2.

Definitionen av Cliffordprodukten är en egen konstruktion baserad på räkneregler bevisade i [4]. Bevisen för lemma 3.1, sats 3.2 och sats 3.4 är även de Rickards skapelser.

Albin Nydén: Avsnitt 4 och 7. Figurer 5 och 6 med TikZ, och figurer 7, 8 och 9 med MATLAB.

Albin har samlat in stjärnkoordinater för projektets datamängd och har utfört programmeringen i MATLAB.

Hanna Persson: Avsnitt 5.2, 6.1 och slutsats. Figur 3.

Hanna har samlat in stjärnkoordinater för projektets datamängd.

Peter Ryberg: Populärvetenskaplig presentation, sammanfattning, avsnitt 2.1, 2.2 och 6.2. Figurer 1, 2 och 4 med TikZ.

Peter har tagit ansvar för en större del av planeringsrapporten och fört en möteslogg.

Vi vill avslutningsvis tacka vår handledare Andreas Rosén för all hjälp, vägledning och för att ha introducerat Cliffordalgebran till oss.

Populärvetenskaplig presentation

”Vi ligger alla i rännstenen, men somliga av oss tittar på stjärnorna” skrev författaren Oscar Wilde i sin pjäs *Solfjädern*. Wilde menade det förstås inte i bokstavlig bemärkelse, men ponera nu att vi i själva verket ligger i rännstenen en stjärnklar natt och blickar upp mot stjärnorna; kanske känner vi igen ett par stjärnbilder som exempelvis Karlavagnen och Orions bälte. Låt oss nu vidare anta att vi dessutom ser ett rymdskepp som med en hastighet nära ljusets färdas bort ifrån jorden mot polstjärnan. Passagerarna ombord detta skepp ser också stjärnorna, men deras bild av stjärnhimmelen kommer skilja sig åt från vår, där vi ligger i rännstenen, och stjärnbilder som Karlavagnen och Orions bälte kommer för dem inte se ut som de gör för oss. Albert Einsteins (1879-1955) *relativitetsteori*, som beskriver såväl rum som tid som relativa begrepp, talar om för oss varför så är fallet, och vi ställer oss följaktligen frågande: Hur ser stjärnhimmelen ut från passagerarnas perspektiv? För att nå svaret behöver vi först lite fysik och matematik.

Om det är någonting som Einsteins relativitetsteori lärt oss är det att saker och ting inte alltid är som de verkar. Säg att rymdskeppspassagerarna äter middag. För dem inträffar middagen på en och samma plats, vid middagsbordet ombord rymdskeppet, men för oss i rännstenen äter de middag på olika platser allteftersom tiden fortlöper, då de ur vårt perspektiv färdas bort ifrån jorden. Beroende på vem vi frågar tar middagen dessutom olika lång tid. Om vi tittar på vår klocka skulle den ticka fortare i jämförelse med passagerarnas klocka ombord rymdskeppet. Kunde passagerarna titta på vår klocka skulle de också tycka att vår klocka tickar fortare än deras. Tiden är inte absolut. Med andra ord kommer varken vi eller passagerarna vara överens om var middagen äger rum eller när, och ingen av oss har mer rätt än de andra, ty såväl rum som tid är relativa.

För att få lite klarhet i relativitetsteorin vänder vi oss till Einsteins matematiklärare Hermann Minkowski (1864-1909) som införde en matematisk modell för detta ändamål; han presenterade denna modell under en föreläsning 1908 på dramatiskt vis med uttalandet ”rummet självt och tiden självt är dömda att blekna bort till skuggor och endast en union av de två kommer bevara en självständig verklighet” [2]. Den union Minkowski föreläste om är sammanslagningen av det tredimensionella rummet med en fjärde dimension: tiden. En sammanslagning som helt sonika går under namnet *Minkowskirummet*, eller *rumtiden*. I rumtiden kan vi matematiskt få oss en bild över de märkliga företeelser som förekommer i enlighet med relativitetsteorin, särskilt i exemplet med vår stjärnhimmel vilket hjälper oss att besvara vår fråga.

När vi ligger i rännstenen, eller står upp för den delen, befinner vi oss i vila, vilket i relativitetsteorin också innebär att vi färdas med en konstant hastighet. Vi rör oss trots allt inte ur fläcken och ingen acceleration äger rum. Allteftersom tiden går ”färdas” vi längs en linje i rumtiden. Vi kallar den här linjen för vår *världslinje*. Rymdskeppet vi observerar åker med en hastighet som vida överstiger hastigheter vi är vana vid, nära ljusets hastighet. Passagerarna ombord rymdskeppet färdas längs sin egna världslinje som i rumtiden skiljer sig åt från vår. För att få oss en bild över hur deras stjärnhimmel ser ut ur deras perspektiv behöver vi alltså befinna oss på deras världslinje i rumtiden. Vi byter världslinje med hjälp av en övergång – en så kallad *Lorentztransformation*, uppkallad efter Hendrik Lorentz (1853-1928), som var professor i matematisk fysik.

För att utföra de beräkningar som denna övergång innebär använder vi *Cliffordalgebra*, som namngetts efter matematikern, tillika filosofen William Kingdon Clifford (1845-1879). Vi ämnar lyfta fram Cliffordalgebran i ljuset och det finns anledningar till varför detta matematiska verktyg är lämpligt för vårt ändamål. Clifford har nämligen benämnts som en pionjär inom det fält som skulle bli relativitetsteorin; att det finns en koppling mellan Cliffordalgebra och transformationer i rumtid är således inte långsökt. Men den kanske främsta anledningen till Cliffordalgebras lämplighet är att den besitter ett par egenskaper som gör beräkningar i rumtiden smidigare och överskådligare. För att kunna uppskatta Cliffordalgebran behöver vi emellertid först få en inblick i vad den är.

Algebra, som ordagrant betyder återförenande, kan ses som ett samband mellan ting. En gren på det väldiga träd som utgör matematiken är *linjär algebra* och den förser oss således med *linjära* samband. För att välja ett exempel tar vi ett tredimensionellt rum, inte ett vardagsrum eller sovrum utan ett abstrakt rum med tre dimensioner. Om vi väljer ut två punkter, som vardera anges i koordinater, i rummet och drar en riktad linje från den ena till den andra punkten får vi en *vektor*. I linjär algebra studeras bland annat samband mellan vektorer i rummet; förenar vi dessutom två olika vektorer får vi en ny vektor, likt vi binder samman två snörstumpar och får ett snöre. Cliffordalgebra låter oss emellertid räkna med mer än bara vektorerna i rummet, den tillåter

oss att använda ytorna som utgör dess sidor och hela rummet i sig. Tillsammans med vektorerna har vi alltså ytor och volymer. Cliffordalgebra är en *geometrisk algebra* som beskriver *geometriska* samband mellan vektorer, ytor och volymer, i fallet med vårt tredimensionella rum. Förenar vi vektorer, ytor och volymer får vi en *multivektor*. Likheten med snören för att beskriva vektorer blir dessvärre haltande när vi ska beskriva multivektorer, men vad vi ämnar fokusera på är hur vi räknar med dem.

Hur räknar vi med multivektor i vår geometriska algebra? Vi behöver en särskild matematisk *operation*, ett räknesätt. Ett exempel på en matematisk operation är multiplikation; multiplicerar vi två tal med varandra blir resultatet ett tal, vilket närmare bestämt benämns som en produkt. Samma princip återfinns i Cliffordalgebran. Vi definierar en operation som vi kallar *Cliffordprodukten*, och tar vi Cliffordprodukten av två multivektorer får vi en multivektor; denna operation ligger till grund för Cliffordalgebran. Vad vi upptäcker när vi tillämpar Cliffordprodukten är att det finns olika typer av multivektorer, och en särskild typ som vi använder i våra räkningar är *bivektorer*. En bivektor är Cliffordprodukten av två vektorer och kan betraktas som en riktad yta, likt en vektor har en riktning har en bivektor det likaledes. Bivektorer är användbara för att beräkna exempelvis rotationer av vektorer. Tag en vektor i det tredimensionella rummet och säg att vi vill rotera den med en bestämd vinkel runt en annan vektor. I sedvanlig linjär algebra behöver vi känna till nio saker för hur vår vektor förflyttas, i jämförelse med endast tre saker om vi i stället använder bivektorer som tillhandahålls i Cliffordalgebran. Vi ska inte gå in på detaljer kring dessa faktorer här, men kontentan är att Cliffordalgebran är ett effektivare matematiskt verktyg för ändamålet att utföra rotationer; att vi väljer att behandla rotationer beror på att Lorentztransformationen är en rotation i rumtiden. Vi använder här ett tredimensionellt rum som ett exempel för att förklara Cliffordalgebra, men det vi beskrivit gäller även i såväl lägre som högre dimensioner, exempelvis det fyrdimensionella Minkowskirummet vi utför Lorentztransformationen i.

När vi utför Lorentztransformationen kommer vi uppleva hur stjärnorna på vår stjärnhimmel förflyttas. För att besvara frågan hur stjärnhimmelen ser ut när övergången utförs är det centralt att vi beräknar förflyttningen av stjärnorna. När vi blickar mot stjärnorna nås vi av deras ljus, oavsett hur många ljusår bort de är, och även om det inte är så i verkligheten kan vi i våra beräkningar utgå från att stjärnorna befinner sig på samma avstånd ifrån oss. Med andra ord kan vi betrakta stjärnhimmelen som en *sfär* som omsluter oss på jorden. Sfären är alltså en *himmelssfär*. Vi åsidosätter solen och räknar inte med den som en stjärna på vår himmelssfär. Att med hjälp av Cliffordalgebra förflytta stjärnorna på himmelssfären, i enlighet med Lorentztransformationen, är görbart, men vi kan förenkla räkningarna. I stället för att förflytta stjärnorna på himmelssfären avbildar vi dem först på ett plan, för att där förflytta dem. Att avbilda punkter på detta vis kallas för *stereografisk projektion*. I korta ordalag går det till på följande vis: vi delar vår himmelssfär i två lika stora halvor med ett plan. För att stereografiskt projicera en stjärna på himmelssfären drar vi en linje ifrån sfärens nordpol via stjärnan, som befinner sig på sfären, till planet. Där linjen träffar planet är stjärnans avbildning.

Sedermera beräknar vi hur stjärnornas avbildningar i planet förflyttas till följd av Lorentztransformationen. Vad som händer är att Lorentztransformationen förskjuter dem bort ifrån sfären längre ut på planet. När förflyttningen ägt rum kan vi utan svårigheter dra en linje ifrån den förflyttade stjärnavbildningen på planet till himmelssfärens nordpol. Där linjen skär himmelssfären är den nya positionen för stjärnan. Vad som händer med stjärnorna på himmelssfären är att de samlas i sfärens nordpol. Vad detta innebär är att när vi färdas med en hastighet nära ljusets i en riktning mot polstjärnan kommer stjärnhimmelen koncentreras kring polstjärnan.

Ur rymdskeppspassagerarnas perspektiv kommer deras stjärnhimmel samlas i den punkt vars riktning de färdas i, en ljuspunkt. Med andra ord har Karlavagnen och Orions bälte förskjutits och minskat i storlek. Detta går stick i stäv med hur det porträtteras i filmer som Star Wars. När rymdskeppen i dessa filmer färdas i överljushastighet försvinner stjärnorna förbi dem likt utdragna ljusstreck, men det är inte så det egentligen ska gå till – det som sker är det raka motsatta. Vi får i stället att stjärnorna förs samman. Detta besvarar den fråga vi ställt om hur rymdskeppspassagerarnas stjärnhimmel ser ut. I skrivandets stund är det inte möjligt att praktiskt erfara det fenomen vi har härlett, men matematiken är på så vis fantastisk i att den kan visa hur det ter sig i teorin.

Sammanfattning

I denna uppsats används Cliffordalgebra för att visualisera hur himmelssfären förändras till följd av en Lorentztransformation i Minkowskirummet. Lorentztransformationen härleds först genom ett fysikaliskt resonemang. Därefter byggs Cliffordalgebran upp för Minkowskirummet och formler för såväl vanliga euklidiska rotationer som Lorentztransformationen härleds. Slutligen visas hur Minkowskirummet kan kopplas till himmelssfären med hjälp av Cliffordalgebra och stereografisk projektion. Slutresultatet är MATLAB-plottar som visualiserar hur himmelssfären förändras.

Abstract

In this paper Clifford algebra is used to help visualize how the celestial sphere changes under a Lorentz transformation in Minkowski spacetime. First the Lorentz transformation is obtained using physical reasoning. Then the Clifford algebra for Minkowski spacetime is defined and formulas for Euclidean rotations as well as the Lorentz transformation are derived. Finally it is shown how the Minkowski spacetime is connected to the celestial sphere using Clifford algebra and stereographic projection. The main result is MATLAB plots visualizing how the celestial sphere changes.

Innehåll

1	Inledning	1
2	Minkowskirummet	1
2.1	Lorentztransformationen	1
2.2	Matematisk definition av Minkowskirummet	4
3	Cliffordalgebran	5
4	Rotationer med Cliffordprodukten	8
5	Himmelssfären	11
5.1	Himmelssfären och Minkowskirummet	11
5.2	Himmelssfären i ekvatoriella koordinatsystemet	11
6	Stereografisk projektion och Möbiusspeglingar	12
6.1	Stereografisk projektion och Möbiusavbildningar	12
6.2	Möbiusspeglning	14
6.3	Inducerade avbildningar på planet	16
7	Visualisering av himmelssfären	17
8	Slutsats	20
A	Stjärnkoordinater	22
B	Kod för parabolisk rotation	29
C	Kod för Lorentztransformationen av himmelssfären	38

1 Inledning

I \mathbb{R}^2 tillhandahåller de komplexa talen ett smidigt sätt att utföra rotationer. Med identifikationen

$$(x, y) \sim x + iy$$

kan vi utföra en rotation med ϕ radianer runt origo genom multiplikation med det komplexa talet $e^{i\phi}$. I denna uppsats undersöker vi hur detta tillvägagångssätt kan generaliseras för att beskriva rotationer och mer allmänt; linjära isometrier i högre dimensioner, i euklidiska såväl som icke-euklidiska vektorrum, genom *Cliffordalgebra*.

Cliffordalgebran definierades första gången i [1] för euklidiska rum under namnet *geometrisk algebra* av William Kingdon Clifford (1845-1879), vars arbete byggde vidare på Hermann Grassmans (1809-1877) idéer om *yttre algebra* från 1843. En nyckelfigur i Cliffordalgebras historia var Marcel Riesz (1886-1969), verksam i Lund under mitten av 1900-talet, som i [3] lade grunden till mycket av den moderna teorin inom området. Modellering med hjälp av Cliffordalgebra är ännu inte standard inom den matematiska fysiken, även om exempelvis David Hestenes länge har förespråkat dess användning. Syftet med denna rapport är att ge ett exempel på en sådan användning.

Vi kommer här att tillämpa Cliffordalgebran för att studera Einsteins speciella relativitetsteori, som år 1905 revolutionerade den moderna fysiken genom sin beskrivning av tid och rum som relativa begrepp, upplevelsen av vilka skiljer sig åt mellan observatörer som förflyttar sig i olika hastigheter relativt varandra. Det fyrdimensionella *Minkowskirummet*, eller *rumtiden*, utgör den naturliga miljön för det matematiska studiet av denna teori.

Minkowskirummet är ett vektorrum bestående av alla vektorer (t, x, y, z) , försett med den indefinita inre produkten

$$(t, x, y, z) \cdot (t', x', y', z') = -tt' + xx' + yy' + zz'.$$

En sådan vektor tolkas som en *händelse* på plats (x, y, z) i rummet vid tidpunkt t . Koordinaterna för en händelse skiljer sig åt mellan observatörer som färdas i olika hastigheter, och relateras via *Lorentztransformationen* som är en linjär isometri av Minkowskirummet med avseende på den inre produkten ovan.

Isometrier av Minkowskirummet kan studeras genom att bädda in det som ett delrum i ett större vektorrum bestående av *multivektorer* och definiera en associativ multiplikation, *Cliffordprodukten*, på detta vektorrum, som tillsammans med denna produkt utgör Cliffordalgebran. Isometrier kan sedan beskrivas genom multiplikation med lämpliga multivektorer, en beskrivning som är avsevärt enklare och mer genomskådlig än den konventionella beskrivningen med hjälp av matriser. Delrummet bestående av vektorer $(0, x, y, z)$ identifieras med \mathbb{R}^3 och ger upphov till en delalgebra till Cliffordalgebran; detta låter oss behandla rotationer även i det tredimensionella euklidiska rummet.

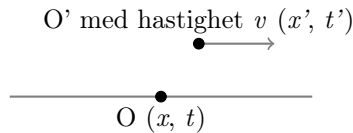
I denna text börjar vi med att härleda Lorentztransformationen genom ett fysikaliskt resonemang. Vi definierar sedan Cliffordprodukten för den Cliffordalgebra som motsvarar Minkowskirummet, och bevisar formler för euklidiska rotationer såväl som Lorentztransformationen. Slutligen beskriver vi hur Minkowskirummet kan visualiseras vid en specifik tidpunkt genom projektion på enhetssfären och beskriver hur Lorentztransformationen förändrar denna. Vi tillämpar dessa resultat för att skapa ett datorprogram som simulerar hur vår upplevelse av stjärnhimmelen förändras då vi färdas mot den i hastigheter jämförbara med ljusets.

2 Minkowskirummet

2.1 Lorentztransformationen

I det här avsnittet härleder vi Lorentztransformationen; vi gör detta i en rumdimension x , men det går enkelt att utöka transformationen till fler dimensioner. Låt O vara en observatör i vila med position x vid tidpunkt t , och låt en annan observatör O' färdas med en konstant hastighet v m/s nära ljusets hastighet i x -led med position x' vid tidpunkt t' . Figur 1 illustrerar situationen.

O och O' har olika referensramar och befinner sig således i olika system; vi kan betrakta dessa som koordinatsystem. I vårt fall har O koordinater (x, t) och O' har koordinater (x', t') . Vi kallar dessa system för *inertialsystem* (vars namn kommer från *inertia* eller tröghet), eftersom att



Figur 1: Observatör O och observatör O'

såväl O som O' färdas med konstant hastighet; att vara i vila är alltså detsamma som att färdas med en konstant hastighet. Vi saknar accelerationer och därför är det följaktligen den *speciella relativitetsteorin* som vi använder oss av. Accelerationer för oss in på den *allmänna relativitetsteorin* och den är bortom denna uppsats.

I klassisk bemärkelse, innan relativitetsteorin sade annorlunda, har vi följande samband i (1) mellan O och O' .

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases} \quad (1)$$

Tiden är absolut i dessa ekvationer; vi kan tänka oss att O :s klocka synkroniseras med O' :s klocka. Vi kan dessutom addera och subtrahera hastigheter i x -led. Relativitetsteorin visar emellertid att sambanden i (1) inte förser oss med hela bilden. Låt oss ta ett exempel för att förtydliga varför. O står stilla och ser O' färdas i en riktning med en hastighet v' nära ljusets hastighet. Säg nu att O' observerar en annan observatör O'' som färdas i samma riktning med en hastighet v'' nära ljusets hastighet. De klassiska reglerna, stipulerade av bland andra Isaac Newton, för att addera hastigheter säger att O kan addera v' och v'' , men relativitetsteorin visar att detta inte längre är möjligt, ty det skulle innebära en hastighet som överstiger ljusets. Vi behöver således ett nytt samband. Vi introducerar en konstant γ som är den så kallade *Lorentzfaktorn*. Lorentzfaktorn är en hastighetsfunktion som förklarar hur exempelvis tiden förändras för O' som färdas relativt O . Med γ får vi följande ekvationer i (2):

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ x = \gamma(x' + vt) \end{cases} \quad (2)$$

Vi behöver bestämma γ . Fysikens lagar gäller och ljusets hastighet $c = 299792458 \text{ m/s}$ är konstant i alla inertialsystem. Om vi betraktar en ljuspuls så kommer den, oavsett vilken observatörs perspektiv vi utgår från, färdas i samma hastighet c . Vår transformation måste således se till att följande ekvationer i (3) uppfylls.

$$\begin{cases} x = ct \\ x' = ct' \end{cases} \quad (3)$$

Dessa ekvationer utgör en särskild händelse i våra två inertialsystem eftersom att endast ljuset kan färdas med hastighet c . Och vi kan använda denna händelse för att härleda γ . Om vi multiplicerar x med x' och använder högerleden i (2) och (3) får vi följande likheter

$$\begin{aligned} xx' &= \gamma^2(x' - vt')(x - vt) = (ct' + vt')(ct - vt) = \gamma^2(c^2tt' - v^2tt') \\ &\iff \\ c^2tt' &= \gamma^2(c^2 - v^2)tt' \\ &\iff \\ c^2 &= \gamma^2(c^2 - v^2) \end{aligned}$$

ur vilket vi löser ut γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Med ett par räkningar får vi Lorentztransformationen (4) som ger oss en övergång ifrån O :s inertialsystem (x, t) till O' :s inertialsystem (x', t') :

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\end{aligned}\tag{4}$$

Låt oss nu vidare undersöka samband mellan O och O' . Namnet till trots är inte allt relativt i relativitetsteorin. O och O' må vara oense om var och när saker och ting inträffar, men följande kvantitet är något som de båda kan enas om:

$$x^2 - c^2t^2 = (x')^2 - c^2(t')^2\tag{5}$$

Denna kvantitet förblir oförändrad efter att Lorentztransformationen har utförts, den är *invariant*; hade Einstein fått sin vilja igenom hade hans teori uppkallats efter detta ord [2]. Låt oss med hjälp av Lorentztransformationen visa att kvantiteten är invariant:

$$\begin{aligned}(x')^2 - c^2(t')^2 &= (\gamma(x - vt))^2 - c^2\left(\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\right)^2 \\&= \gamma^2(x^2 + v^2t^2 - 2vxt - c^2t^2 + \frac{v^2x^2}{c^2} - 2vxt) = x^2 - c^2t^2\end{aligned}$$

I avsnitt 2.2 kommer vi visa hur denna kvantitet utgör den inre produkten i rumtiden, men innan vi fortsätter med den matematiska grunden ämnar vi göra en omskrivning av vår Lorentztransformation. Längre fram i rapporten kommer vi nämligen utföra *hyperboliska rotationer*, och dessa har en koppling till vår nyss härledda Lorentztransformation (vi visar detta i avsnitt 4). Vi introducerar därmed hyperboliska funktioner med vilka vi, i stället för att räkna v i m/s , ämnar räkna v i antal procent av c med vinkeln ϕ , som i fysikalisk bemärkelse kallas *rapiditet*. Vi har

$$v = c \tanh(\phi)$$

där $0 < v < c$, $0 < \phi < \infty$ och $\tanh(\phi) \in [-1, 1]$. Låt oss räkna ett exempel för att demonstrera. Låt $\phi = 1$ radian vilket ger oss att $\tanh(1) \approx 0.76$. Med vinkeln, eller rapiditet, $\phi = 1$ färdas O' i en hastighet som motsvarar 76% av ljusets. Om vi i stället låter ϕ bli oändligt stort får vi

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} \tanh(\phi) = 1$$

vilket innebär att O' färdas med ljusets hastighet. Detta är inte fysikaliskt möjligt, och hädanefter anger vi $c = 1$ (alltså 100% hastighet). Vi skriver om uttrycket för γ och får

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\tanh(\phi))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\sinh(\phi))^2}{(\cosh(\phi))^2}}} = \frac{\cosh(\phi)}{\sqrt{(\cosh(\phi))^2 - (\sinh(\phi))^2}} = \cosh(\phi)$$

Vi har i härledningen ovan använt oss av $\tanh(\phi) = (\sinh(\phi))(\cosh(\phi))^{-1}$ och den hyperboliska ettan $(\cosh(\phi))^2 - (\sinh(\phi))^2 = 1$. Vi gör en omskrivning av (4) med ϕ i stället för v och utökar dessutom med två rumdimensioner:

$$\begin{cases}x' = (\cosh(\phi))x - (\sinh(\phi))t \\y' = y \\z' = z \\t' = -(\sinh(\phi))x + (\cosh(\phi))t\end{cases}\tag{6}$$

(6) är en fyrdimensionell Lorentztransformation där O' färdas i x -led. Tiden utgör den fjärde dimensionen. Låt oss nu formellt introducera rumtiden.

2.2 Matematisk definition av Minkowskirummet

I detta avsnitt kombinerar vi rummet och tiden för att få rumtiden, eller *Minkowskirummet* som vi benämmer med W . Minkowskirummet är fyrdimensionellt där tre dimensioner utgörs av rumkoordinaterna $\{x, y, z\}$ och den fjärde dimensionen utgörs av tiden t . Dess ortonormerade bas, ON-bas, består av vektorerna $\{e_1, e_2, e_3\}$ för rumkoordinaterna, samt vektorn e_0 som spänner upp tidsaxeln.

I det euklidiska rummet har vi *skalärprodukten*, men som det uppdagats håller inte denna produkt i rumtiden eftersom att O och O' är oense om var, och dessutom när, saker och ting inträffar. Vi behöver en alternativ *inre produkt* för W och den ges av kvantiteten i (5); denna kvantitet är densamma oberoende av hur inertialsystemen skiljer sig åt. Minkowskirummets inre produkt har samma egenskaper som skalärprodukten men med ett undantag som berör e_0 .

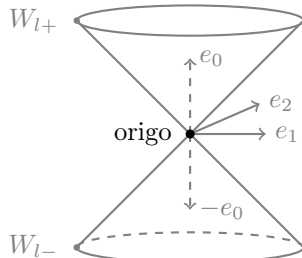
Definition 2.1. Vi definierar Minkowskirummet W som ett tidsorienterat fyrdimensionellt vektorrum över kroppen \mathbb{R} med ON-bas $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ och inre produkt $v_1 \cdot v_2$ för vektorer $v_1, v_2 \in W$; den inre produkten definieras som

$$(te_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3) \cdot (t'e_0 + x'e_1 + y'e_2 + z'e_3) = -tt' + xx' + yy' + zz'$$

med $e_0 \cdot e_0 = -1$ och $e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_3 = 1$.

Vi låter origo i W beskriva "här och nu" för vår observatör O . Punkter i W kallar vi *händelser*. e_0 pekar framåt i tiden; följaktligen pekar $-e_0$ bakåt i tiden. W kan givetvis ha fler eller färre rumdimensioner, som i vår härledning av Lorentztransformationen exempelvis. Till skillnad från skalärprodukten kan vi inte längre betrakta "längd" på ett naturligt vis, eftersom att vår inre produkt kan ge upphov till negativa tal. Till följd av detta finns det tre sorters vektorer i W : *ljuslika*, *tidslika* och *rumlika*.

För en *ljuslik* vektor $v \in W$ gäller att $v \cdot v = 0$. Alla ljuslika vektorer i W utgör en dubbelkon som vi kallar för *ljuskonen* och benämmer med W_l . Se figur 2 för hur W_l ser ut i tredimensionell rumtid. Den "övre" konen kallar vi för den *framtida ljuskonen* W_{l+} . Den "undre" kallar vi för den *dåtida ljuskonen* W_{l-} , och vi får att $W_l = W_{l+} \cup W_{l-}$.



Figur 2: Ljuskonen W_l i det tredimensionella Minkowskirummet

För en *tidlik* vektor $v \in W$ gäller att $v \cdot v < 0$. De tidlika vektorerna ryms i ljuskonen och kan delas upp i *framtida* W_{t+} , som ryms i den framtida ljuskonen, och *dåtida* W_{t-} , som ryms i den dåtida ljuskonen. Vi har dessutom att $e_0 \in W_{t+}$.

För en *rumslig* vektor $v \in W$ gäller att $v \cdot v > 0$. De rumlika vektorerna befinner sig utanför ljuskonen.

Givet dessa tre typer av vektor i W ska vi definiera en viktig egenskap hos Lorentztransformationen.

Definition 2.2. Vi har Minkowskirummet W . En linjär operator $T: W \rightarrow W$ är en *isometri* om $T(v) \cdot T(v) = v \cdot v$ för alla vektorer $v \in W$.

Definitionen för isometrier gäller allmänt för ett inre produktrum. När vi utför Lorentztransformationen T som tar oss ifrån O :s inertialsystem till O' :s förblir kvantiteten i ekvation (5) oförändrad. Detta innebär, givet vår definition av den inre produkten i W , att T är en *isometri*; vi kan följaktligen betrakta en isometri som en form av basbyte. Att T är en isometri är centralt för det innebär att T avbildar ljuslika vektorer som ljuslika och följaktligen att ljuskonen avbildas på ljuskonen i W . Vi undersöker denna egenskap vidare i avsnitt 5.1.

3 Cliffordalgebran

För att kunna hantera transformationer på ett effektivt sätt ska vi nu bädda in Minkowskirummet i ett större vektorrum och definiera en associativ multiplikation på detta rum, vilket gör rummet till en *associativ algebra*.

Vi börjar med att betrakta rummet $\wedge W$ av formella reella linjärkombinationer av element i mängden E bestående av abstrakta objekt indexerade av potensmängden $P(\{0, 1, 2, 3\})$ till $\{0, 1, 2, 3\}$,

$$E = \{e_s : s \subset \{0, 1, 2, 3\}\}$$

där vi gör tolkningen $e_\emptyset = 1$. Vi skriver alltid element ur E genom att lista elementen i s i stigande ordning, exempelvis $e_{123} := e_{\{1,2,3\}}$. Vi definierar nu, för $s, t \subset \{0, 1, 2, 3\}$

$$A_{s,t} := \{(x, y) \in s \times t : x > y\}$$

och sedan

$$\epsilon : P(\{0, 1, 2, 3\}) \times P(\{0, 1, 2, 3\}) \rightarrow \{1, -1\}$$

genom

$$\epsilon(s, t) := (-1)^{|A_{s,t}|}$$

och

$$\tau : P(\{0, 1, 2, 3\}) \rightarrow \{1, -1\}$$

genom

$$\tau(s) := \begin{cases} -1, & 0 \in s \\ 1, & 0 \notin s. \end{cases}$$

På mängden $\mathbb{R}E = \{ae_s : a \in \mathbb{R}, e_s \in E\}$ definierar vi nu operationen Δ genom

$$ae_s \Delta be_t := (ab)\epsilon(s, t)\tau(s \cap t)e_{s \Delta t}$$

där Δ innebär symmetrisk mängddifferens som en operation på mängder. Vi ska nu visa att denna operation är associativ. För detta behöver vi följande lemman.

Lemma 3.1. *För alla $s, t, u \subset \{0, 1, 2, 3\}$ gäller att $\epsilon(s \Delta t, u) = \epsilon(s, u)\epsilon(t, u)$ och $\epsilon(s, t \Delta u) = \epsilon(s, t)\epsilon(s, u)$.*

Bevis. Mängden $A_{s \Delta t, u}$ består av alla par $(x, y) \in (s \cup t) \times u$ sådana att $x > y$, undantaget de par för vilka $x \in s \cap t$. Varje sådant par hör till $A_{s, u} \cap A_{t, u}$, så att

$$|A_{s \Delta t, u}| \equiv |A_{s, u}| + |A_{t, u}| \pmod{2}$$

eftersom varje sådant par räknas med en gång i varje term på högersidan, och vi får

$$\begin{aligned} \epsilon(s \Delta t, u) &= (-1)^{|A_{s \Delta t, u}|} \\ &= (-1)^{|A_{s, u}| + |A_{t, u}|} = (-1)^{|A_{s, u}|} (-1)^{|A_{t, u}|} \\ &= \epsilon(s, u)\epsilon(t, u). \end{aligned}$$

Ett liknande resonemang, där vi i stället betraktar par (x, y) i $s \times (t \cup u)$ sådana att $y \leq x$, visar att

$$\epsilon(s, t \Delta u) = \epsilon(s, t)\epsilon(s, u).$$

□

Vi har att

$$(s\Delta t)\Delta u = s\Delta(t\Delta u)$$

eftersom båda mängder är lika med unionen av alla tre, undantaget de element som förekommer i exakt två av dem. Genom att kontrollera olika fall där 0 hör eller inte hör till s , t och u kan vi även visa att

$$\tau(s \cap t)\tau((s\Delta t) \cap u) = \tau(s \cap (t\Delta u))\tau(t \cap u).$$

Vidare får vi, genom att använda Lemma 1, att

$$\epsilon(s, t)\epsilon(s\Delta t, u) = \epsilon(s, t)\epsilon(s, u)\epsilon(t, u) = \epsilon(s, t\Delta u)\epsilon(t, u).$$

Sammantaget leder detta till följande resultat.

Sats 3.2. Δ är en associativ operation på $\mathbb{R}E$.

Bevis.

$$\begin{aligned} (e_s\Delta e_t)\Delta e_u &= \epsilon(s, t)\epsilon(s\Delta t, u)\tau(s \cap t)\tau((s\Delta t) \cap u)e_{s\Delta t\Delta u} \\ &= \epsilon(s, t\Delta u)\epsilon(t, u)\tau(s \cap (t\Delta u))\tau(t \cap u)e_{s\Delta t\Delta u} = e_s\Delta(e_t\Delta e_u). \end{aligned}$$

□

Denna operation utvidgar vi sedan till en associativ produkt på $\wedge W$ genom

$$\left(\sum_{s \subset \{0,1,3,4\}} a_s e_s \right) \Delta \left(\sum_{t \subset \{0,1,3,4\}} a_t e_t \right) := \sum_{s,t \subset \{0,1,3,4\}} (a_s a_t) e_s \Delta e_t.$$

Hädanefter kommer vi inte skriva ut Δ , utan skriver för $v, v' \in \wedge W$ att $vv' := v\Delta v'$.

Operationen vi just definierade går under namnet *Cliffordprodukt*, och $\wedge W$ försedd med denna operation kallas för *Cliffordalgebra*. Med hjälp av associativiteten är det lätt att räkna ut produkten av godtyckliga element i $\wedge W$; av definitionen följer omedelbart att

$$\begin{aligned} e_0 e_0 &= -1, \\ e_1 e_1 &= e_2 e_2 = e_3 e_3 = 1 \\ e_s e_t &= -e_t e_s \text{ om } |s| = |t| = 1, s \neq t. \end{aligned} \tag{7}$$

Sedan räknar vi exempelvis

$$\begin{aligned} e_{012}e_1e_{03} &= (e_0e_1e_2)e_1(e_0e_3) = (e_0e_1)(e_2e_1)(e_0e_3) \\ &= -(e_0e_1)(e_1e_2)(e_0e_3) = -e_0(e_1e_1)(e_0e_3) = -(e_0e_0)e_3 = e_3. \end{aligned}$$

Vi definierar nu delrummen $\wedge^k W \subset \wedge W$ för $k = 0, 1, 2, 3, 4$ genom

$$\wedge^k W := \text{Span}\{e_s : |s| = k\}.$$

så att

$$\wedge W = \bigoplus_{k=0}^4 \wedge^k W.$$

$\wedge^1 W$ identifierar vi med Minkowskirummet genom

$$(t, x, y, z) \sim te_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Elementen i $\wedge^2 W$ kallas *bivektorer* och är av särskilt intresse för oss eftersom de är nära kopplade till de isometrier vi ska studera. Ett allmänt element i $\wedge W$ innehåller termer från alla delrummen $\wedge^k W$ och kallas för en *multivektor*.

Vi kommer även vara intresserade av att behandla vanliga euklidiska rotationer i \mathbb{R}^3 , och på samma sätt som \mathbb{R}^3 är ett delrum till Minkowskirummet W är

$$\wedge\mathbb{R}^3 := \text{Span}\{e_s : s \subset \{1, 2, 3\}\}$$

en *delalgebra* till $\wedge W$, det vill säga $\wedge\mathbb{R}^3$ är sluten med avseende på Cliffordprodukten. Identifikationen är naturligtvis

$$(x, y, z) \sim xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

$\wedge^k\mathbb{R}^3$ för $k = 0, 1, 2, 3$ definieras analogt med $\wedge^k W$. Om vi räknar ut produkten av två godtyckliga element i $\wedge^1\mathbb{R}^3$ får vi

$$\begin{aligned} (xe_1 + ye_2 + ze_3)(x'e_1 + y'e_2 + z'e_3) &= xx'e_1e_1 + xy'e_1e_2 + xz'e_1e_3 \\ &\quad +yx'e_2e_1 + yy'e_2e_2 + yz'e_2e_3 + zx'e_3e_1 + zy'e_3e_2 + zz'e_3e_3 \\ &= [xx' + yy' + zz'] + [(yz' - y'z)e_{23} - (x'z - xz')e_{31} + (xy' - x'y)e_{12}]. \end{aligned}$$

Den första termen är skalärprodukten mellan de två vektorerna (x, y, z) och (x', y', z') . Den andra termen har koordinaterna för deras kryssprodukt, dock i basen $\{e_{23}, e_{31}, e_{12}\}$. Om vektorerna är ortogonala är den första termen därför lika med 0. Från linjär algebra vet vi att varje vektor i \mathbb{R}^3 kan skrivas som vektorprodukten av två ortogonala vektorer. Vi noterar sålunda:

Sats 3.3. *Varje bivektor i $\wedge^2\mathbb{R}^3$ kan skrivas som Cliffordprodukten av två ortogonala element ur $\wedge^1\mathbb{R}^3$.*

De nyss utförda beräkningarna hjälper oss även att bevisa följande viktiga sats.

Sats 3.4. *Välj ut någon ON-bas i W och identifiera, på ovan angivet sätt, dessa med vektorerna $\{e'_0, e'_1, e'_2, e'_3\}$ i $\wedge W$. Räknereglerna (7) för Cliffordprodukten är då giltiga även i denna bas.*

Bevis. Vi väljer två baselement med koordinater (t, x, y, z) och (t', x', y', z') i standardbasen och räknar (där $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$):

$$\begin{aligned} e'_a e'_b &= (te_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3)(t'e_0 + x'e_1 + y'e_2 + z'e_3) \\ &= tt'e_0e_0 + te_0(x'e_1 + y'e_2 + z'e_3) + (xe_1 + ye_2 + ze_3)t'e_0 \\ &\quad + (xe_1 + ye_2 + ze_3)(x'e_1 + y'e_2 + z'e_3) \\ &= [-tt' + xx' + yy' + zz'] \\ &\quad + [te_0(x'e_1 + y'e_2 + z'e_3) - t'e_0(xe_1 + ye_2 + ze_3)] \\ &\quad + [(yz' - y'z)e_{23} - (x'z - xz')e_{31} + (xy' - x'y)e_{12}]. \end{aligned} \tag{8}$$

Om $a = b$ försvinner den andra och tredje termen. Den första termen är lika med -1 om $a = b = 0$ och 1 om $a = b \in \{1, 2, 3\}$, vilket visar de första två ekvationerna i (1). Om $a \neq b$ är den första termen lika med 0. Byter vi plats på a och b byter den andra termen tecken, och det är känt från linjär algebra att vektorprodukten antikommuterar. Detta bevisar den tredje ekvationen i (1). \square

Förmågan att göra lämpliga basbyten kommer att vara viktig när vi tillämpar Cliffordalgebran vid räkning med isometrier i W . Genom att välja en ON-bas för \mathbb{R}^3 gäller reglerna även för delalgebran $\wedge\mathbb{R}^3$. Satsen ovan visar även att 1-vektorer, undantaget de ljuslika, är multiplikativt inverterbara:

Sats 3.5. *För alla element v i $\wedge^1 W$ gäller att $v^2 = v \cdot v$; följaktligen är alla element v i $\wedge^1 W$ sådana att $v \cdot v \neq 0$ inverterbara med invers $\frac{1}{v \cdot v} v$.*

Vi avslutar med att visa en användbar räkneregeln. Om vi byter ut e'_a och e'_b i (8) mot två godtyckliga vektorer $v, w \in \wedge^1 W$ och adderar vw och wv tar de två sista termerna ut varandra för att ge

Sats 3.6. *(Cliffords antikommuteringsrelation): $vw + wv = 2(v \cdot w) \forall v, w \in \wedge^1 W$.*

4 Rotationer med Cliffordprodukten

Vi vet från grundläggande komplex analys att rotationer av ett komplext tal z moturs med en vinkel ϕ ges av

$$e^{\phi i} z.$$

Om vi definierar en rotation som en funktion $T : W \rightarrow W$ som är en *isometri* samt att $T(v) = v$ för minst en vektor $v \in W$ då visar det sig att formeln för en allmän rotation av en vektor v längs en rotationsvinkel ϕ med Cliffordprodukten ges av

$$\exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right) v \exp\left(\frac{\phi j}{2}\right) \quad (9)$$

där $j \in \wedge^2 W$ är en bivektor och vi använder följande definition av exponentialfunktionen

$$\exp(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}.$$

Den implicita produkten vi använder är givetvis Cliffordprodukten. Om $\exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right) v \exp\left(\frac{\phi j}{2}\right) \in \wedge^1 W$ så ger Sats 3.5 oss att

$$\begin{aligned} \left(\exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right) v \exp\left(\frac{\phi j}{2}\right)\right) \cdot \left(\exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right) v \exp\left(\frac{\phi j}{2}\right)\right) &= \exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right) v \exp\left(\frac{\phi j}{2}\right) \exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right) v \exp\left(\frac{\phi j}{2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right) v^2 \exp\left(\frac{\phi j}{2}\right) \\ &= (v \cdot v) \exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right) \exp\left(\frac{\phi j}{2}\right) \\ &= (v \cdot v), \end{aligned}$$

så vi ser att (9) bevarar den inre produkten. Bivektorn j i formeln bestäms utifrån vilken rotationsaxel vi roterar kring. Om vi är i $\wedge^2 \mathbb{R}^3$ och vill använda en normaliserad vektor r som rotationsaxeln så ges bivektorn j av

$$j = e_{123} r.$$

En viktig sak att notera med normaliserade bivektorer $j = ae_{12} + be_{13} + ce_{23}$ i $\wedge^2 \mathbb{R}^3$ är att

$$j^2 = -1,$$

genom att använda Sats 3.3 så kan vi skriva $j = v_1 v_2$, där v_1 och v_2 är orthogonala, så vi får

$$j^2 = (v_1 v_2)^2 = v_1 v_2 v_1 v_2 = -v_1 v_1 v_2 v_2 = -1.$$

Vikten av detta faktum är att beräkningen av $\exp\left(\frac{\phi j}{2}\right)$ förenklas avsevärt. Vi noterar att

$$\begin{aligned} j^{2k} &= (-1)^k \\ j^{2k+1} &= (-1)^k j \end{aligned}$$

för $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, med detta får vi

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\phi j}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\phi j}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{2k} + j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{2k+1} \\ &= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\phi}{2}\right). \end{aligned}$$

För att se att (9) ger oss en rotation så bevisar vi följande

Sats 4.1. Om $r_1 \in \mathbb{R}^3$ är en normaliserad vektor, $\phi \in \mathbb{R}$ och $j = e_{123}r_1$ då får vi att

$$\exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right)v\exp\left(\frac{\phi j}{2}\right)$$

roterar vektorn v via rotationsaxeln r_1 med rotationsvinkel ϕ .

Bevis. Vi börja med att hänvisa till sidan 85 i [4] för det faktum att vi kan välja två vektorer r_2 och r_3 så $\{r_1, r_2, r_3\}$ bildar en ON-bas och att ekvationen

$$r_2 r_3 = e_{123} r_1$$

håller. Vi kan då skriva v som $v_1 r_1 + v_2 r_2 + v_3 r_3$ och eftersom r_1 kommuterar med $r_2 r_3$ får vi att r_1 kommuterar med j . Detta ger oss att

$$\exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right)v_1 r_1 \exp\left(\frac{\phi j}{2}\right) = \exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right)\exp\left(\frac{\phi j}{2}\right)v_1 r_1 = v_1 r_1.$$

För r_2 får vi att

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right)v_2 r_2 \exp\left(\frac{\phi j}{2}\right) &= (\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\phi}{2}\right))v_2 r_2 (\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)) \\ &= v_2 ((\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - r_2 r_3 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right))(r_2 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + r_3 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)) \\ &= v_2 (r_2 \cos(\phi) + r_3 \sin(\phi)) \end{aligned}$$

och en helt analog beräkning för r_3 ger oss

$$\exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right)v_3 r_3 \exp\left(\frac{\phi j}{2}\right) = v_3 (-r_2 \sin(\phi) + r_3 \cos(\phi)).$$

Vi ser då att vektorn v roteras via planet som spänns av r_2 och r_3 med en vinkel ϕ medan r_1 bevaras. Detta är den sökta rotationen. \square

För att veta i vilken riktning som rotationen görs så kan vi tänka oss att vektorn som motsvarar rotationsaxeln pekar rakt mot oss så att vi ser ner på planet som är ortogonalt mot rotationsaxeln, då kommer rotationen göras moturs längs planet. Som vi nämnde tidigare så är kvadraten av en normaliserad bivektor i det euklidiska rummet alltid -1 men i Minkowskirummet så kan kvadraten av en normaliserad bivektor vara både negativ, positiv och 0. Detta betyder att vi i Minkowskirummet får tre olika typer av rotationer. Det enklaste exemplet på en bivektor med positiv kvadrat är $j = e_{01}$ då

$$j^2 = e_{01}e_{01} = e_0e_1e_0e_1 = -e_0e_1e_1e_0 = -e_0e_0 = 1.$$

Med detta så ser vi att om vi sätter $j = e_{01}$ i formeln för rotationer ovan så får vi att

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\phi j}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\phi j}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{2k} + j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^{2k+1} \\ &= \cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) + j \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right). \end{aligned}$$

Vi noterar att e_2 och e_3 kommuterar med e_{01} ,

$$e_2 e_{01} = e_2 e_0 e_1 = -e_0 e_2 e_1 = e_0 e_1 e_2 = e_{01} e_2$$

$$e_3 e_{01} = e_3 e_0 e_1 = -e_0 e_3 e_1 = e_0 e_1 e_3 = e_{01} e_3,$$

detta betyder att e_2 och e_3 kommuterar med $\exp\left(\frac{\phi j}{2}\right)$ vilket ger oss

$$\exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right)e_2 \exp\left(\frac{\phi j}{2}\right) = \exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right)\exp\left(\frac{\phi j}{2}\right)e_2 = e_2$$

$$\exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right)e_3\exp\left(\frac{\phi j}{2}\right) = \exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right)\exp\left(\frac{\phi j}{2}\right)e_3 = e_3.$$

För e_0 får vi

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right)e_0\exp\left(\frac{\phi j}{2}\right) &= (\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) - j\sinh\left(\frac{\phi}{2}\right))e_0(\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) + j\sinh\left(\frac{\phi}{2}\right)) \\ &= (\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) - j\sinh\left(\frac{\phi}{2}\right))(e_0\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) - e_1\sinh\left(\frac{\phi}{2}\right)) \\ &= e_0\cosh(\phi) - e_1\sinh(\phi)\end{aligned}$$

och en helt analog beräkning ger

$$\exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right)e_1\exp\left(\frac{\phi j}{2}\right) = e_1\cosh(\phi) - e_0\sinh(\phi).$$

Sammanfattningsvis får vi att om vi roterar i Minkowskirummet med bivektorn $j = e_{01}$ gäller följande

$$\begin{aligned}e_1 &\mapsto e_1\cosh(\phi) - e_0\sinh(\phi) \\ e_2 &\mapsto e_2 \\ e_3 &\mapsto e_3 \\ e_0 &\mapsto e_0\cosh(\phi) - e_1\sinh(\phi)\end{aligned}$$

vilket är precis samma förhållande som vi fick från Lorentztransformationen som vi härledde tidigare i (6). Alltså kan en Lorentztransformation beskrivas som en rotation i Minkowskirummet. Om $u \in \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ är en enhetsvektor och vi låter bivektorn j vara $j = e_0u$ då får vi att

$$j^2 = (e_0u)^2 = e_0ue_0u = -ue_0e_0u = uu = 1$$

och vi kan generalisera beräkningarna ovan till en allmän enhetsvektor u i stället för e_1 genom att välja en ON-bas där u ingår som basvektor och sedan tillämpa Sats 3.4. Vi sammanfattar detta med följande sats.

Sats 4.2. Låt $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ vara en ON-bas för Minkowskirummet W . Sätt $j = e_0u$, där $u \in \text{span}(e_1, e_2, e_3)$ är en enhetsvektor, då ger

$$v \mapsto \exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right)v\exp\left(\frac{\phi j}{2}\right), \quad v \in W$$

Lorentztransformationen längs vektorn u med hastighet $\tanh(\phi)$.

En rotation som den ovan där kvadraten av en bivektor är positiv kallar vi för en *hyperbolisk rotation*, en rotation med en bivektor vars kvadrat är negativ kallar vi för *elliptisk rotation* och en rotation med en bivektor j sådan att $j^2 = 0$ kallar vi för en *parabolisk rotation*. Läsaren kan enkelt bekräfta, genom att använda formeln (9) för en rotation, att en *Parabolisk rotation* med bivektor j ges av

$$v \mapsto \left(1 - \frac{\phi j}{2}\right)v\left(1 + \frac{\phi j}{2}\right).$$

Givet en normaliserad bivektor j och någon rotationsvinkel $\phi \in \mathbb{R}$ så sammanställer vi de olika typerna av rotationer nedan.

$$\text{Elliptisk : } j^2 = -1, \exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right)v\exp\left(\frac{\phi j}{2}\right) = \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)v\left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)$$

$$\text{Hyperbolisk : } j^2 = +1, \exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right)v\exp\left(\frac{\phi j}{2}\right) = \left(\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) - j\sinh\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)v\left(\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) + j\sinh\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)$$

$$\text{Parabolisk : } j^2 = 0, \exp\left(\frac{-\phi j}{2}\right)v\exp\left(\frac{\phi j}{2}\right) = \left(1 - \frac{\phi j}{2}\right)v\left(1 + \frac{\phi j}{2}\right).$$

5 Himmelssfären

5.1 Himmelssfären och Minkowskirummet

Vi har hittills sett hur hastighetsförändringar transformerar rums- och tidskoordinater för en händelse. Vi vänder oss nu mot ett mer konkret problem: hur upplever en människa rent visuellt en Lorentztransformation? För detta ändamål ska vi introducera ett nytt matematiskt objekt, *himmelssfären*, och studera dess egenskaper.

Vi tänker oss att vi befinner oss vid plats $(0, 0, 0)$ vid tidpunkten 0 i vårt universum, dvs vid Minkowskirummets origo. Vad kan vi se på denna plats i detta ögonblick? Vad vi ser är i själva verket ljuset från en händelse som når våra ögon, och de händelser vi kan se i detta ögonblick är de vars ljus når fram till oss. För en sådan händelse (t, x, y, z) gäller naturligtvis att $t < 0$, då vi inte kan se in i framtiden. Vidare färdas ljuset från händelsen sträckan $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ på t sekunder i hastighet 1; detta innebär att

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0.$$

De händelser vi ser är alltså precis de som ligger på den dåtida ljuskonen. Ljuset från en sådan händelse träffar våra ögon ur riktningen (x, y, z) . Om $(t, x, y, z) \in W_{l-}$ gäller även att linjen

$$s(t, x, y, z) \in W_{l-} \quad \forall s > 0.$$

I riktningen (x, y, z) ser vi alltså samtidigt ljuset från alla händelser på denna linje. Detta är svårt att föreställa sig, men i vår simulering kommer vi att arbeta i ett statiskt universum där det på linjen $[(t, x, y, z)]^1$ endast ligger ett enda statiskt föremål (en stjärna), vilket är vad vi observerar i nämnda riktning.

Eftersom vi endast kan se en sak i varje riktning visar resonemanget ovan att vår upplevelse av Lorentztransformationen handlar om hur den förändrar den riktning som ljuset från en händelse når oss från. På grund av identifikationen av riktningsvektorer i \mathbb{R}^3 med linjer på den dåtida ljuskonen introducerar vi följande objekt.

Himmelssfären består av alla linjer $[v]$ på ljuskonen där $v \neq 0$. Antag att vi, i vår referensram, har tidskoordinat e_0 .

$$v \mapsto [v - e_0] \tag{10}$$

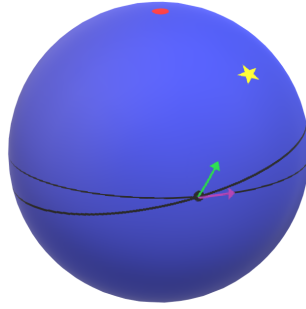
är då en bijektiv avbildning av enhetssfären i \mathbb{R}^3 på himmelssfären. $[v - e_0]$ är linjen på ljuskonen på vilken alla händelser vi ser i riktning v befinner sig. Lorentztransformationen T är linjär och avbildar linjen $[v - e_0]$ på linjen $[T(v - e_0)]$. I egenskap av isometri avbildar T även ljuskonen på sig själv, och T inducerar därför en avbildning på Himmelssfären genom $T[v - e_0] = [T(v - e_0)]$. Genom bijektionen med enhetssfären motsvarar detta en avbildning T_{S^2} på enhetssfären, där $T_{S^2}(v)$ är den unika punkt på enhetssfären sådan att $[T_{S^2}(v) - e_0] = [T(v - e_0)]$. När vi härnäst talar om himmelssfären syftar vi på enhetssfären S^2 genom identifikationen (10).

Hur ska vi tolka $T_{S^2}(v)$? Låt v vara riktningen i vilken vi observerar en händelse. Händelsen ligger då på linjen $[v - e_0]$ på ljuskonen. En observatör som färdas i riktning och hastighet motsvarande Lorentztransformationen T upplever att händelsen i stället ligger på linjen $[T(v - e_0)]$. Riktningen i vilken denna observatör observerar händelsen är den enhetsvektor som spänner upp linjen av rumskoordinaterna för alla händelser på linjen, dvs den vektor u sådan att $[u - e_0] = [T(v - e_0)]$, dvs $u = T_{S^2}(v)$. $T_{S^2}(v)$ är alltså riktningen i vilken den rörliga observatören observerar händelsen.

5.2 Himmelssfären i ekvatoriella koordinatsystemet

Ett objekts position på himmelssfären anges vanligen med hjälp av astronomiska koordinatsystem. Ett exempel på ett sådant är ekvatoriella koordinatsystemet som har himmelsekvatorn som grundplan och jordaxeln som z-axel. Himmelsekvatorn är projektionen av ekvatorn. Vinkelkoordinaterna deklination och rektascension bestämmer objektets position på himlen, som till exempel kan vara en stjärna. Deklinationen och rektascensionen kan jämföras med hur latitud respektive longitud mäts på jorden.

¹ $[v]$ betecknar den linje som spänns upp av vektorn v .



Figur 3: Himmelsfären i det ekvatoriella koordinatsystemet. De två storcirkarna representerar himmelsekvatorn och ekliptikan på himmelsfären, som skär varandra i vårdagsjämningspunkten. Rektascensionen mäts med den lila pilen längs med ekvatorn och deklinationen är vinkeln mellan himmelsekvatorn och den gröna pilen. Den röda punkten är himmelsnordpolen på himmelsfären.

Med en lutning på ungefär $23,5^\circ$ från himmelsekvatorn befinner sig ekliptikan som är banan som representerar solens position på himlen under ett år. Även planeternas banor samt zodiakens stjärnbilder befinner sig längs med ekliptikan. De två punkterna där himmelsekvatorn och ekliptikan skär varandra är höst- och vårjämningsdagarna. Rektascensionen bestäms från vårdagsjämningspunkten mätt mot öster längs med himmelsekvatorn och anges i timmar, minuter och sekunder så att 24 timmar utgör ett helt varv runt himmelsekvatorn.

Deklinationen mäts i rät vinkel mot himmelsekvatorn och är mellan 0° och 90° på norra halvklotet och mellan 0° och -90° på södra halvklotet. Den anges i grader [$^\circ$], bågminuter [$'$] och bågsekunder [$''$]. Vinkelmåtten bågminuter samt bågsekunder motsvarar $1/60$ resp $1/3600$ av en grad.

De stjärnbilder som ska visualiseras är både från norra och södra hemisfären. Samtliga stjärnor som ingår i dessa anges i dess deklination och rektascension på himmelsfären samt skenbar magnitud. Skenbar magnitud är ett mått på stjärnans ljusstyrka mätt från jorden. Den är given i logaritmisk skala så att ju lägre magnituden är desto starkare lyser stjärnan. En stjärna med skenbara magnituden 6,5 är den minsta stjärna som människan kan beskåda med blotta ögat. Då en Lorentztransformation mot norra polstjärnan utförs ändras stjärnornas koordinater på himmelsfären.

6 Stereografisk projektion och Möbiusspeglingar

Värt att notera är att beräkningarna av Lorentztransformationen blir besvärliga då de utförs direkt på himmelsfären. Dessa underlättas då himmelsfären projiceras på ett plan där i stället dess motsvarighet till Lorentztransformationen kan beräknas. I nästkommande avsnitt definieras en sådan avbildning, kallad stereografisk projektion, med egenskapen att den är en Möbiusavbildning.

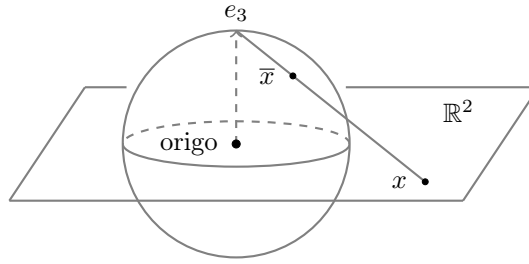
6.1 Stereografisk projektion och Möbiusavbildningar

Stereografisk projektion är avbildningen av ytan på en tredimensionell sfär till ett tvådimensionellt plan. Den är definierad för alla punkter på sfären bortsett från en fix projektionspunkt, som här valts till himmelsnordpolen e_3 . Vidare definieras här sfären som enhetssfären S^2 i \mathbb{R}^3 och planet som \mathbb{R}^2 , men projektionen behöver inte vara ortogonal i allmänhet.

Definition 6.1. *Den stereografiska projektionen*

$$S^2 \setminus \{e_3\} \ni \bar{x} = \frac{2x}{|x|^2 + 1} + \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} e_3 \mapsto \frac{x'}{1 - x_3} = x \in \mathbb{R}^2,$$

där $x' \in \mathbb{R}^2$ och $x_3 \in [-1, 1]$, är skärningen i planet av den raka linje som skär punkterna e_3 och \bar{x} . Se figur 4.



Figur 4: Stereografisk projektion av $\bar{x} \in S^2$ till $x \in \mathbb{R}^2$.

Genom den stereografiska projektion, definierad enligt definition 6.1, avbildas samtliga punkter på nedre halvsfären av $S^2 \setminus \{e_3\}$ på och innanför enhetscirkeln i \mathbb{R}^2 . Speciellt avbildas $-e_3$ på origo. Övriga punkter på \mathbb{R}^2 utgör avbildningen av ytan på den övre halvsfären av $S^2 \setminus \{e_3\}$. Avstånden mellan punkterna på sfären är mindre än avstånden mellan punkterna på planet, då de trycks ihop på sfären. Till följd av detta ändras längd och form på de objekt som avbildas genom stereografisk projektion, men däremot är placeringen av dem i relation till varandra bevarad. En avbildning som har dessa egenskaper kallas *konform*.

Proposition 6.2. *Avbildningen som avser den stereografiska projektionen $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ges av*

$$S^2 \setminus \{e_3\} \ni \bar{x} \mapsto (e_3\bar{x} + 1)(\bar{x} - e_3)^{-1} \in \mathbb{R}^2 \quad (11)$$

Bevis. Vi vill visa att om y är en punkt på enhets sfären så är dess avbildning på \mathbb{R}^2 lika med definitionen för den stereografiska projektionen i definition 6.1.

Låt $y = \bar{x} \in S^2 \setminus \{e_3\}$. Då är $|\bar{x} - e_3|^2 = 2 - 2\langle \bar{x}, e_3 \rangle = 2(1 - x_3)$ och vi får

$$(e_3\bar{x} + 1)(\bar{x} - e_3)^{-1} = \frac{(e_3\bar{x} + 1)(\bar{x} - e_3)}{2(1 - x_3)} = \frac{e_3 - e_3\bar{x}e_3 + \bar{x} - e_3}{2(1 - x_3)} = \frac{x'}{1 - x_3}$$

som är definitionen av den stereografiska projektionen på \mathbb{R}^2 . □

Vi minns från komplex analys att en Möbiusavbildning är en inverterbar avbildning av en komplex variabel z på formen

$$z \mapsto (az + b)(cz + d)^{-1},$$

där koefficienterna a, b, c och d är komplexa tal och villkoret $ad - bc \neq 0$ måste gälla för att avbildningen ska vara inverterbar. Uttrycket för den stereografiska projektionen på \mathbb{R}^2 i (11) är på denna form, varav den således är en Möbiusavbildning. Komplex analys behandlar inte Möbiusavbildningar i dimensioner högre än två av det euklidiska vektorrummet, men däremot kan vår stereografiska projektion i \mathbb{R}^3 beräknas med Cliffordalgebran. Konceptet är detsamma som i två dimensioner, med undantag av att z nu är en vektor som avbildas på multivektorn $(az + b)(cz + d)^{-1}$. Koefficienterna a, b, c och d är multivektorer som bevarar elementen i delrummet $\wedge^1\mathbb{R}^3$, vektorerna, vilket kan visas genom att faktorisera Möbiusavbildningen i de fyra grundläggande Möbiusavbildningarna: translation, dilation, rotation och inversion. Det gäller att varje Möbiusavbildning är en sammansättning av ett ändligt antal av dessa och de definieras i \mathbb{R}^3 enligt följande

1. *Translation* av vektorn $y \in \mathbb{R}^3$ med hjälp av en annan vektor $v \in \mathbb{R}^3$ är avbildningen

$$y \mapsto y + v \in \mathbb{R}^3.$$

2. *Dilation* av vektorn $y \in \mathbb{R}^3$ med faktorn $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ är avbildningen

$$y \mapsto cy \in \mathbb{R}^3.$$

3. *Rotation*, se sats 4.1.

4. *Inversion* av vektorn $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ är avbildningen

$$y \mapsto y^{-1} = \frac{y}{|y|^2} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Speciellt avbildas området inuti enhetssfären till området utanför och omvänt, medan ytan av S^2 avbildas på sig självt.

De beräkningar som avser Möbiusavbildningar utförs enklast genom att använda matrisrepresentation.

Proposition 6.3. *En Möbiusavbildning*

$$z \mapsto (az + b)(cz + d)^{-1},$$

där a, b, c, d är multivektorer i $\wedge \mathbb{R}^3$, kan med hjälp av Cliffordalgebran representeras av matrisen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Bevis. Låt

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z) = (az + b)(cz + d)^{-1}, \quad (12)$$

där a, b, c, d är multivektorer i $\wedge \mathbb{R}^3$ och $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ är en matris.

Genom att visa att

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ f \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} (z) = f \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) (z)$$

bevisas påståendet att en Möbiusavbildning kan skrivas på matrisform.

För att undvika långa uttryck, sätt $s = a'z + b'$ och $t = c'z + d'$. Med hjälp av ekvation (11) och Cliffordprodukten får vi att

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ f \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} (z) &= (ast^{-1} + b)(cst^{-1} + d)^{-1} = (as + bt)(cs + dt)^{-1} \\ &= ((aa' + bc')w + ab' + bd')((ca' + dc')w + (cb' + dd'))^{-1} \\ &= f \left(\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \right) (z) = f \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) (z) \end{aligned}$$

□

6.2 Möbiusspeglning

För att underlätta räkningarna i avsnitt 6.3 introducerar vi speglingar med hjälp av Cliffordalgebra. Låt $a \in W$ vara en icke ljuslik vektor och $v \in W$ en vektor. Speglingen S av v i hyperplanet som är ortogonalt till a ges av följande ekvation

$$S(v) = -ava^{-1}$$

där $a^{-1} = a/(a \cdot a)$ enligt sats 3.5. Om $a \cdot a = 1$ så kan speglingen skrivas som $S(v) = -ava$.

Enligt Cartan-Dieudonné's sats utgör varje isometri i ett inre produktrum en sammansättning av speglingar i hyperplan [4]. Faktum är att två speglingar utgör en rotation i Minkowskirummet. Det betyder alltså att Lorentztransformationen, som är en hyperbolisk rotation, kan skrivas som en sammansättning av två speglingar: $T(v) = (-a_2)(-a_1)v(a_1)^{-1}(a_2)^{-1}$. Detta är ett värdefullt resultat då det möjliggör för oss att finna en Möbiusspeglning - den avbildning på enhetssfären som motsvarar en speglning i W . I satsen introducerar vi $T_{\mathbb{R}^2}$ som är den avbildning i planet \mathbb{R}^2 som representerar Möbiusavbildningen på enhetssfären. Med denna avbildning utför vi således räkningarna på \mathbb{R}^2 snarare än på S^2 .

Sats 6.4. Vi har Minkowskirummet W med ON-bas $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$. För en vektor $v \in W$ utgör följande ekvation

$$T(v) = -(a + a_3e_3 + a_0e_0)v(a + a_3e_3y + a_0e_0)^{-1}$$

en spegling i hyperplanet ortogonalt till multivektorn $a + a_3e_3 + a_0e_0 \in W$, med $a \in \mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^2 = \text{span}\{e_1, e_2\}$. Dessutom gäller villkoret $a_0^2 \neq |a|^2 + a_3^2$. Den Möbiusavbildning som motsvarar speglingen ges då av

$$T_{\mathbb{R}^2}(x) = (-ax + (a_3 - a_0))((a_3 + a_0)x + a)^{-1}$$

för $x \in \mathbb{R}^2$.

Bevis. För att underlätta räkningarna skriver vi $a' := a + a_3e_3$. Vi väljer en punkt $x \in P(W)$ så att vektorn $-e_0 + x$ ligger på den dätida ljuskonen W_l . Vi får då

$$\begin{aligned} T(-e_0 + x) &= -(a_0e_0 + a')(-e_0 + x)(a_0e_0 + a')^{-1} \\ &= k(a_0e_0 + a')(-e_0 + x)(a_0e_0 + a') \\ &= k(a_0^2e_0 + a_0^2x + a_0a' + a_0a'xe_0 + a_0a' + a_0xa'e_0 + \\ &= k((a_0^2 + 2a_0(a' \cdot x) + |a'|^2)e_0 + (a_0^2x + 2a_0a' + a'xa')) \in W_l \end{aligned}$$

med $k \in \mathbb{R}$ och $k \neq 0$. Vi normaliserar nu koefficienten till e_0 till -1 . Vi gör detta för att kunna tillämpa vårt tidigare härledda samband $[T_{S^2}(x) - e_0] = [T(-e_0 + x)]$. Då $a_0^2 + 2a_0(a' \cdot x) + |a'|^2 = |a_0x + a'|^2$ dividerar vi vårt uttryck med detta och vi får följaktligen

$$\begin{aligned} T(-e_0 + x) &= -e_0 - \frac{(a_0^2x + 2a_0a' + a'xa')}{(a_0^2 + 2a_0(a' \cdot x) + |a'|^2)} \\ &= -e_0 - \frac{(a'x + a_0)(a_0x + a')}{|a_0x + a'|^2} \end{aligned}$$

Vi har nu följande ekvation

$$T_{S^2}(x) - e_0 = -e_0 - \frac{(a'x + a_0)(a_0x + a')}{|a_0x + a'|^2}$$

ur vilken vi får vår inducerade avbildning $T_{S^2}(x)$

$$\begin{aligned} T_{S^2}(x) &= -\frac{(a'x + a_0)(a_0x + a')}{|a_0x + a'|^2} = -\frac{(a'x + a_0)}{(a_0x + a')} \\ &= \frac{a'x + a_0}{-a_0x - a'} = (a'x + a_0)(a_0x + a')^{-1} \end{aligned}$$

vilket är den Möbiusavbildning på enhetsfären S^2 som motsvarar vår spegling T . Då det är besvärligt att utföra beräkningar på enhetssfären finner vi avbildningens motsvarande avbildning på planet $\mathbb{R}^2 = \text{span}\{e_1, e_2\}$ med hjälp av stereografisk projektion; vi tillämpar avbildningen $(e_3yx + 1)(x - e_3)^{-1}$ för dessa räkningar. Vi kommer se att de avbildningar vi arbetar med antar en särskilt enkel form i planet \mathbb{R}^2 . Räkningarna som följer gör vi enklast med matrisrepresentation av Möbiusavbildningar. Matrisen som representerar vår härledda Möbiusavbildning ges av:

$$\begin{pmatrix} a' & a_0 \\ -a_0 & -a' \end{pmatrix}$$

Vi vänster- och högermultiplicerar med matrisen som representerar vår stereografiska projektion:

$$\begin{pmatrix} e_3 & 1 \\ 1 & -e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & a_0 \\ -a_0 & -a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_3 & 1 \\ 1 & -e_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -a & a_3 - a_0 \\ a_3 + a_0 & a \end{pmatrix}$$

Vi kan bortse från konstanten 2 då den kan förkortas bort i formeln till den inducerade avbildningen. Den inducerade Möbiusavbildningen i planet \mathbb{R}^2 ges av följande ekvation.

$$T_{\mathbb{R}^2}(x) = (-ax + (a_3 - a_0))((a_3 + a_0)x + a)^{-1}$$

□

6.3 Inducerade avbildningar på planet

Vi härleder nu Lorentztransformationens inducerade avbildning $T_{\mathbb{R}^2}$ på \mathbb{R}^2 och använder den för att beskriva den visuella upplevelsen. Lorentztransformationen T i riktning e_3 med hastighet $\tan(\phi)$ kan skrivas

$$\begin{aligned} T(x) &= \exp\left(-\frac{\phi e_0 e_3}{2}\right)x \exp\left(\frac{\phi e_0 e_3}{2}\right) \\ &= (\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) - e_0 e_3 \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right))x (\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right) + e_0 e_3 \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right)) \\ &= -(\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right)e_3 - e_0 \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right))(-e_3 x e_3)(\cosh\left(\frac{\phi}{2}\right)e_3 - e_0 \sinh\left(\frac{\phi}{2}\right)) \end{aligned}$$

och vi ser att T är sammansättningen av spegling i planet ortogonalt mot e_3 och spegling i planet ortogonalt mot $\cosh(\frac{\phi}{2})e_3 - e_0 \sinh(\frac{\phi}{2})$. Vi använder vår formel för den inducerade Möbiusavbildningen i \mathbb{R}^2 , som vi skriver med matrisrepresentation. För spegling med e_3 har vi att $a = a_0 = 0$ och $a_3 = 1$. Denna spegling representeras därför av matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

För den andra speglingen gäller i stället att $a = 0$, $a_3 = \cosh(\frac{\phi}{2})$ och $a_0 = \sinh(\frac{\phi}{2})$. Vi får att $a_3 - a_0 = \exp(\frac{\phi}{2})$ och $a_3 + a_0 = \exp(-\frac{\phi}{2})$. Den inducerade Möbiusavbildningen representeras då av matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & \exp(\frac{\phi}{2}) \\ \exp(-\frac{\phi}{2}) & 0 \end{pmatrix}.$$

$T_{\mathbb{R}^2}$ representeras av sammansättningen av dessa matriser:

$$\begin{pmatrix} 0 & \exp(\frac{\phi}{2}) \\ \exp(-\frac{\phi}{2}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\frac{\phi}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{\phi}{2}) \end{pmatrix}$$

så att

$$T_{\mathbb{R}^2}(x) = (\exp(\frac{\phi}{2})x)(\exp(-\frac{\phi}{2}))^{-1} = \exp(\phi)x.$$

Vi kan nu ge en geometrisk beskrivning av den upplevda Lorentztransformationen. För positiva hastigheter, där $\phi > 0$, färdas punkten x i figur 4 längs en rak linje bort från origo. Detta motsvaras av att punkten \bar{x} förflyttar sig i en rak kurva in mot e_3 . En person som färdas mot polstjärnan kommer därmed uppleva att stjärnorna pressas ihop i en omgivning till polstjärnan vid höga hastigheter.

På samma sätt kan vi beskriva upplevelsen av en parabolisk rotation. Låt $j = (e_0 + e_3)a$, där $a \in \mathbb{R}^2$ är en normerad vektor, så att $j^2 = 0$ och

$$\begin{aligned} \exp(-\frac{\phi}{2}j)x \exp(\frac{\phi}{2}j) &= (1 - \frac{\phi}{2}(e_0 + e_3)a)x(1 + \frac{\phi}{2}(e_0 + e_3)a) \\ &= -(a - \frac{\phi}{2}(e_3 + e_0))(-axa)(a - \frac{\phi}{2}(e_3 + e_0)). \end{aligned}$$

Med matrisrepresentation och sats 6.5 ser vi att speglingen i a motsvaras av

$$\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

och speglingen i $(a - \frac{\phi}{2}(e_0 + e_3))$, där $a_0 = \frac{\phi}{2}$ och $a_3 = \frac{\phi}{2}$, av

$$\begin{pmatrix} -a & \phi \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

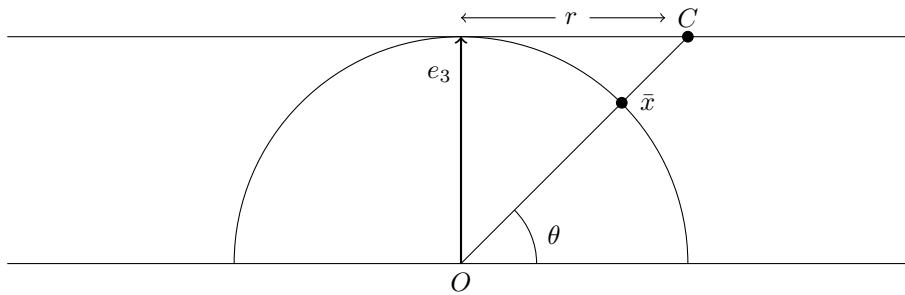
med sammansättning

$$\begin{pmatrix} -a & \phi \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \phi a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och motsvarande avbildning $x \mapsto x + \phi a$. Den paraboliska rotationen translaterar alltså \mathbb{R}^2 ϕ längdenheter i riktning a . Läsaren uppmanas att själv bilda sig en uppfattning om motsvarande avbildning på sfären.

7 Visualisering av himmelsfären

För att enkelt visualisera himmelsfären så kommer vi att projicera sfären på ett plan. Eftersom att rektascensionen inte förändras av en Lorentztransformation så är vi enbart intresserade av hur deklinationen förändras. Vi påpekar att denna projektion inte är en Möbiusavbildning utan vi använder denna projektion för att enkelt kunna visualisera himmelsfären. Projektionen sker enligt figur 5 nedan.

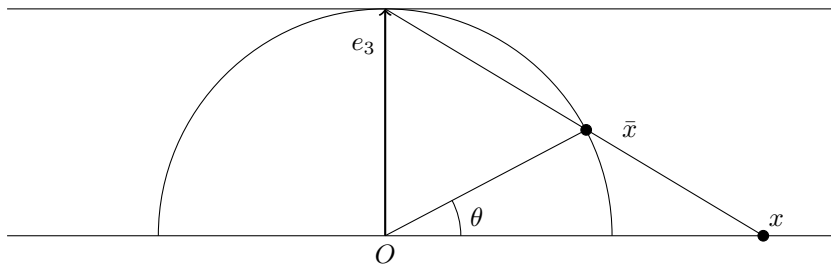


Figur 5: Projektion av himmelsfären.

Här är θ deklinationen för punkten \bar{x} på sfären och C är projektion av \bar{x} på det övre planet. Om vi låter r vara storleken av C i det övre planet i figuren, då ger grundläggande trigonometri oss att $r = \cot(\theta)$. Gör vi variabelbytet $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$ får vi förhållandet

$$r = \tan(\theta').$$

Om vi låter x vara den stereografiska projektionen av \bar{x} enligt figur 6 nedan, då ser vi får två



Figur 6: Stereografisk projektion

rätvinkliga trianglar. En av de rätvinkliga trianglarna utgörs av \bar{x}, x och planet som x ligger i och den andra utgörs av e_3, x och det nedre planet i figur 6. Dessa två trianglar är likformiga vilket ger oss

$$|x| = \frac{|x| - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \implies |x| = \frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)}$$

och gör vi återigen variabelbytet $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$ får vi

$$|x| = \frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta')}{1 - \cos(\frac{\pi}{2} - \theta')} = \frac{\cos(\theta')}{1 - \sin(\theta')} = \cot(\frac{\theta'}{2})$$

alltså får vi förhållandet

$$|x| = \cot\left(\frac{\theta'}{2}\right)$$

mellan x och deklinationen. Vi såg tidigare i avsnitt 5.3 att om vi gör en hyperbolisk rotation, som ger oss en Lorentztransformation, på \bar{x} då ändras x enligt $x \mapsto \exp(\phi)x$. Använder vi identiteten

$$\exp(t) = \sqrt{\frac{1 + \tanh(t)}{1 - \tanh(t)}}$$

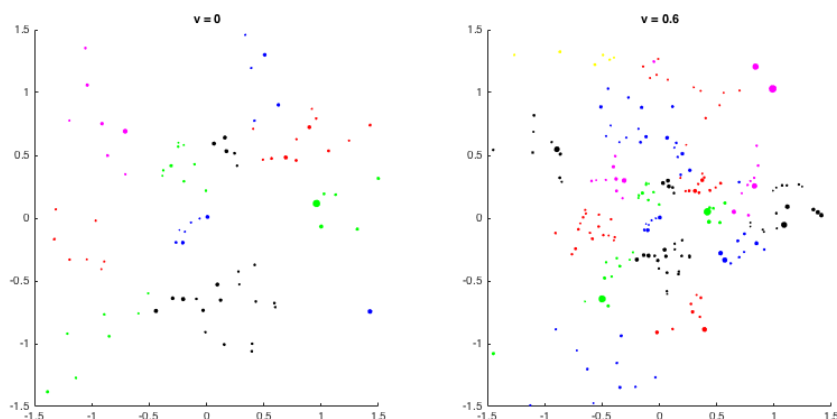
och att vi har relationen $v = \tanh(\phi)$ mellan hastigheten v och ϕ så får vi att x ändras enligt

$$x \mapsto \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} x.$$

Sätter vi $\lambda = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$ så får vi att θ' ändras enligt

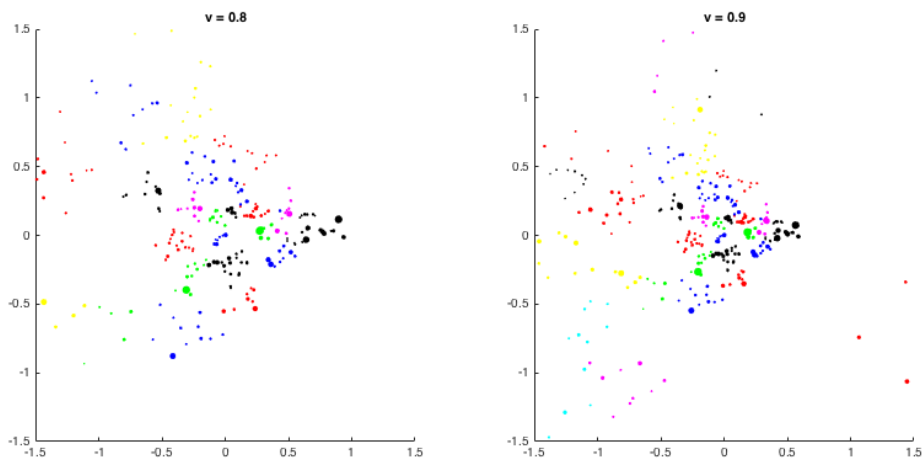
$$\theta' \mapsto \cot\left(\frac{\theta'}{2}\right) \mapsto \lambda \cot\left(\frac{\theta'}{2}\right) \mapsto 2\operatorname{arccot}\left(\lambda \cot\left(\frac{\theta'}{2}\right)\right)$$

när vi utför en hyperbolisk rotation på \bar{x} . Vi ser att om $v \rightarrow 1$ så går $\lambda \rightarrow \infty$ vilket betyder att $2\operatorname{arccot}\left(\lambda \cot\left(\frac{\theta'}{2}\right)\right)$ går mot noll, detta ger oss att när en observatör färdas nära ljusets hastighet så kommer stjärnhimmelen att koncentreras framför observatören i färdriktningen. Med allt detta så kan vi nu slutligen visualisera himmelssfären och se de relativistiska effekterna. I följande figurer har vi använt det vi beskrivit ovan för att visualisera himmelssfären. Koordinaterna för stjärnorna samt koden vi har använt för att skapa bilderna finns i bilagor A, B och C.



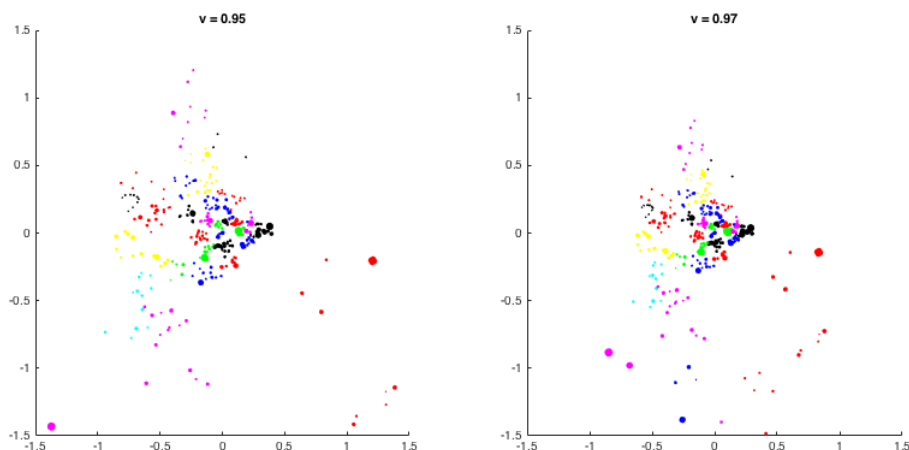
Figur 7: Himmelssfären för en stationär observatör och en observatör som färdas vid 60 % av ljusets hastighet.

I den första plotten i figur 7 så ser vi stjärnbilderna Cassiopeja, Lilla Björnen, Stora Björn, Cepheus, Perseus, Kusken och i den andra plotten där en observatör färdas i 60% av ljusets hastighet så har även stjärnbilderna Kräftan, Orion, Lejonet, Pegasus, Oxen, Tvillingarna, Jungfrun, Örnen och Fiskarna kommit in i bilden.



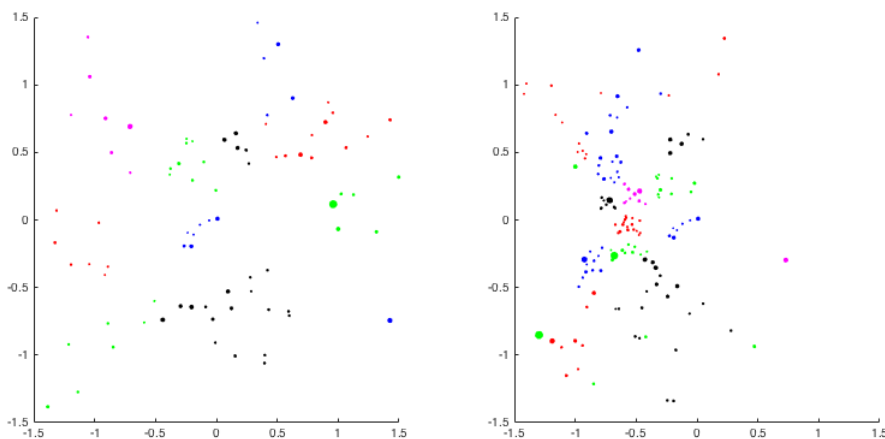
Figur 8: Himmelsfären för en observatör som färdas 80% och 90% av ljusets hastighet

I den första plotten i figur 8 så ser vi vad en observatör som färdas 80 % av ljusets hastighet ser och då ser vi hela konstellationen av Vågen, Stenbocken och Vattumannen och på den andra bilden, där en observatör färdas 90% av ljusets hastighet, så ser vi även Bildhuggaren, Södra Fisken, Södra Kronan och Skytten. Alltså har konstellationer på den södra stjärnhimlen börjat komma in i bilden för en observatör som färdas i 90% av ljusets hastighet



Figur 9: Himmelsfären för en observatör som färdas 95% och 97% av ljusets hastighet

I den första plotten i figur 9, där en observatör färdas i 95% av ljusets hastighet, så har konstellationerna Tranan, Skorpionen, Vargen och Kentauren kommit fram i bilden. Slutligen i den andra plotten i figur 9 där en observatör färdas i 97% av ljusets hastighet så ser vi även Södra Korset och Kölen. De fyra blå prickarna längst ner på den andra plotten i figur 9 är Södra Korset som ligger i nästan diametralt motsatt position på himmelsfären som Lilla Björn, som ligger vid origo i de övre figurerna. Alltså kommer en observatör som färdas i 97% av ljusets hastighet se till stora delar hela himmelen. Vi har tidigare diskuterat paraboliska rotationer och vi såg i avsnitt 6.3 att om vi gör en parabolisk rotation med bivektor $j = a(e_3 + e_0)$ på himmelsfären så ändras $x \in \text{span}\{e_1, e_2\}$ enligt $x \mapsto x + \phi a$. I figur 10 så har vi gjort en parabolisk rotation med $a = -e_1$ och $\phi = 2$.



Figur 10: Parabolisk rotation av himmelssfären

Den fysikaliska tolkningen av en parabolisk rotation är inte helt självklar men den paraboliska rotationen

$$v \mapsto \exp(e_1(e_3 + e_0))v\exp(-e_1(e_3 + e_0)) = (1 + e_1(e_3 + e_0))v(1 - e_1(e_3 + e_0))$$

som vi använt i figur 10 kan skrivas som

$$v \mapsto \exp\left(\frac{-\pi}{8}e_{13}\right)(\sqrt{2} + e_{03})\exp\left(\frac{3\pi}{8}e_{13}\right)v\exp\left(\frac{-3\pi}{8}e_{13}\right)(\sqrt{2} - e_{03})\exp\left(\frac{\pi}{8}e_{13}\right)$$

vilket är en sammansättning av två vanliga rotationer och en hyperbolisk rotation. Vi kan alltså tolka figur 10 som hur stjärnhimmelen ser ut för en observatör som först gör en vanlig rotation sedan en Lorentztransformation och sedan ytterligare en vanlig rotation.

8 Slutsats

Om vi, dessförinnan vi tagit del av denna rapport, ställt oss frågan hur himlen, med alla sina stjärnor, ser ut för någon som färdas mot himmelsnordpolen i en hastighet som närmar sig ljusets, hade svaret troligen kunnat efterliknas med synen av gatulampor som sveper förbi ett bilfönster en mörk kväll. På samma sätt som ljuset från en gatulampa färdas mot dig, sittandes i bilen, får vi en bild av hur stjärnorna gör detsamma då vi befinner oss i ett förbipasserande rymdskepp. Detta är även den bild som de flesta moderna science fiction-filmer demonstrerar så det är inte så underligt att detta är vår första intuition.

Efter att ha studerat himmelssfärens verkliga utseende, kan slutsatsen dras att denna inte överensstämmer med vår första intuition. Under Lorentztransformationen mot himmelsnordpolen förflyttas samtliga stjärnor mot varandra och bildar en samling av tätt placerade stjärnor i den punkt observatören färdas mot. Även de stjärnor som, innan observatören lämnade jorden, befann sig på södra halvklotet förflyttas på samma sätt så att de blir synliga för den observatör som färdas mot nordpolen. Detta resultat gör att stjärnorna upplevs färdas i samma riktning som observatören och minskat i storlek.

Ett viktigt konstaterande beträffande denna uppkommande geometri i Minkowskirummet är inte endast det resultat som åstadkommits, utan med vilket matematiskt verktyg det gjorts. Med hjälp av Cliffordalgebran har grundläggande matematikkunskaper från såväl den linjära algebran som komplex analys möjliggjorts i dimensioner högre än två. Vidare har en omfattande förenkling vid beräkningar upptäckts, i jämförelse med den traditionella linjära algebran som oftast tillämpas inom området. Vi matematiker vill ju ofta inte krångla till det för oss mer än nödvändigt och det är därför beklagligt att Cliffordalgebran inte fått mer av den uppskattning som den förtjänar. Oavsett tillvägagångssätt blir resultaten alltid desamma, något som gör matematiken så fantastisk.

Referenser

- [1] W. Clifford, "Applications of Grassmann's Extensive Algebra", *American Journal of Mathematics*, Vol 1, No. 4, pp. 350-358, 1878.
- [2] W. Isaacson, *Einstein: His Life and Universe*, London: Simon & Schuster, 2008.
- [3] M. Riesz, *Clifford Numbers and Spinors*, Berlin: Springer, 1993.
- [4] A. Rosén, *Geometric Multivector Analysis*, 1 uppl., Basel: Birkhäuser, 2019.

A Stjärnkoordinater

```
1 %% Stj nkoordinater
2 % Stj rnkoordinater f r n gra stj rnbilder
3 % En stj rnbild anges som en matris, d r raderna utg r varje enskild
4 % stj rna och kolonnerna utg r dess egenskaper; deklination [ ],
5 % deklination ['], rektascension [h], rektasension [min], skenbar
   magnitud.
6
7 % S dra hemisf ren (14 st)
8 crux=[-63, -5, 12, 26, 0.77; % s dra korset
9       -59, -41, 12, 47, 3;
10      -58, -44, 12, 15, 5.57;
11      -57, -6, 12, 31, 2];
12 libra=[-16, -43, 15, 53, 4.13; % v gen
13        -14, -47, 15, 35, 4;
14        -25, -16, 15, 4, 6.5;
15        -16, -2, 14, 50, 2.75;
16        -9, -22, 15, 17, 2.6];
17 grus=[-37, -21, 21, 53, 3; % tranan
18        -39, -32, 22, 6, 4.5;
19        -46, -57, 22, 8, 1.7;
20        -43, -29, 22, 29, 4;
21        -43, -31, 23, 6, 4.3;
22        -45, -14, 23, 10, 3.8;
23        -46, -53, 22, 42, 4.1;
24        -51, -19, 22, 48, 3.5;
25        -52, -45, 23, 0, 4.1];
26 sculptor=[-37, -49, 23, 32, 4.4; % bildhuggaren
27            -32, -31, 23, 18, 4.4;
28            -29, -21, 0, 58, 4.3];
29 piscisau=[-29, -37, 22, 57, 1.17; %
30            -27, -2, 22, 40, 4.2;
31            -28, -27, 22, 0, 5.43;
32            -30, -53, 21, 47, 5;
33            -32, -32, 22, 10, 5;
34            -32, -32, 22, 55, 4.2];
35 capricorn=[-16, -7, 21, 47, 2.85; % stenbocken
36            -16, -39, 21, 40, 3.7;
37            -16, -50, 21, 22, 4.3;
38            -22, -24, 21, 26, 3.77;
39            -17, -13, 21, 5, 4;
40            -26, -55, 20, 51, 4.12;
41            -14, -46, 20, 21, 3;
42            -12, -32, 20, 18, 3.6;
43            -25, -16, 20, 46, 4.1];
44 scorpius=[-37, -6, 17, 33, 1.6; % skorpionen
45            -39, -1, 17, 42, 2.4;
46            -40, -7, 17, 47, 3;
47            -42, -59, 17, 37, 1.9;
48            -43, -14, 17, 12, 3.3;
49            -42, -21, 16, 54, 3.6;
50            -38, -2, 16, 51, 3;
51            -34, -17, 16, 50, 2.3;
52            -28, -12, 16, 35, 2.8;
53            -26, -25, 16, 29, 1;
```

```

54         -19, -48, 16, 5, 2.6;
55         -22, -37, 16, 0, 2.3;
56         -26, -6, 15, 58, 2.9];
57 coronaaus=[-42, -42, 18, 56, 5.3;
58           -42, -5, 19, 3, 4.7;
59           -40, -29, 19, 8, 4.5;
60           -39, -20, 19, 10, 4.1;
61           -37, -54, 19, 9, 4.1;
62           -37, -3, 19, 6, 4.3;
63           -37, -6, 18, 58, 4.8;
64           -38, -19, 18, 43, 5.1;
65           -39, -42, 18, 32, 5.2];
66 lupus=[-49, -25, 14, 37, 4;      % vargen
67        -52, -5, 15, 12, 3.4;
68        -47, -23, 14, 41, 2.3;
69        -45, -22, 14, 26, 4.3;
70        -43, -8, 14, 58, 2.7;
71        -40, -38, 15, 21, 3.2;
72        -36, -15, 15, 21, 3.6;
73        -41, -10, 15, 35, 2.8;
74        -42, -34, 15, 38, 4.3;
75        -38, -23, 16, 0, 3.4;
76        -36, -48, 16, 6, 4.2;
77        -33, -37, 15, 50, 4];
78 octans=[-83, -40, 14, 26, 4.31; % oktanten
79        -77, -23, 21, 41, 3.73;
80        -77, -15, 0, 25, 2.8];
81 carina=[-40, 0, 8, 3, 2.25;      % k len
82        -47, -20, 8, 9, 1.83;
83        -59, -30, 8, 22, 1.86;
84        -52, -41, 6, 23, -0.74;
85        -43, -11, 6, 37, 3.173;
86        -59, -16, 9, 17, 2.21;
87        -61 -19 10 17 3.34;
88        -58 -44 10 27 3.81;
89        -59 -13 8 31 8.06;
90        -60 -33 10 43 4.58;
91        -64 -23 10 42 2.76;
92        -70 -2 10 13 3.29;
93        -69 -43 9 13 1.69;
94        -58 -51 10 53 3.79;
95        -59 -45 8 40 4.31;
96        -58 -58 9 10 3.43];
97 sagittaurus=[-40, -36, 19, 23, 3.97; % skytten
98             -41, -52, 19, 55, 4.118;
99             -24, -53, 19, 36, 4.59;
100            -27, -40, 19, 6, 3.326;
101            -29, -52, 19, 2, 2.59;
102            -26, -17, 18, 55, 2.05;
103            -21, -6, 18, 57, 3.51;
104            -21, -44, 19, 04, 3.771;
105            -17, -50, 19, 21, 3.93;
106            -26, -59, 18, 45, 3.17;
107            -25, -25, 18, 27, 2.82;
108            -29, -49, 18, 20, 2.70;
109            -21, -3, 18, 13, 3.85;

```



```

110         -34, -23, 18, 24, 1.85;
111         -36, -45, 18, 17, 3.11;
112         -27, -49, 17, 47, 4.54;
113         -44, -28, 19, 22, 4.01;
114         -44, -27, 19, 22, 4.01;
115         -35, -16, 19, 59, 4.37;
116         -30, -25, 18, 5, 2.98;
117         -27, -42, 20, 2, 4.54;
118         -18, -57, 19, 17, 4.88];
119 centaurus=[-36, -42, 13, 20, 2.73;      % kentauren
120           -39, -24, 13, 31, 4.6;
121           -41, -41, 13, 49, 3.41;
122           -36, -22, 14, 6, 2.06;
123           -42, -28, 13, 49, 3.42;
124           -42, -9, 14, 35, 2.35;
125           -42, -6, 14, 59, 3.14;
126           -44, -48, 13, 58, 3.87;
127           -47, -17, 13, 55, 2.55;
128           -53, -27, 13, 39, 2.30;
129           -60, -22, 14, 3, 0.61;
130           -60, -50, 14, 39, 0.01;
131           -48, -57, 12, 41, 2.17;
132           -50, -13, 12, 28, 3.91;
133           -50, -43, 12, 8, 2.57;
134           -63, -1, 11, 35, 3.13;
135           -39, -30, 14, 23, 4.41];
136 aquarius=[-20, -6, 23, 22, 3.97;      % vattuman
137           -9, -5, 23, 15, 4.248;
138           -7, -34, 22, 52, 3.722;
139           0, -7, 22, 35, 4.04;
140           0, -1, 22, 28, 3.65;
141           -1, -23, 22, 21, 3.849;
142           0, -19, 22, 5, 2.942;
143           -9, -29, 20, 47, 3.77;
144           -7, -46, 22, 16, 4.175;
145           -13, -52, 22, 06, 4.279;
146           -13, -35, 22, 49, 4.042;
147           -21, -10, 23, 9, 3.679;
148           -5, -34, 21, 31, 2.87;
149           -10, -4, 22, 30, 4.81;
150           -15, -49, 22, 54, 3.28];
151
152 % Norra hemisf ren (19 st)
153 cancer=[9, 11, 8, 16, 3.54;      % kr ftan
154         18, 9, 8, 44, 3.94;
155         11, 51, 8, 58, 4.24;
156         21, 28, 8, 43, 4.652;
157         28, 45, 8, 46, 4.02;
158         22, 2, 9, 9, 5.15];
159 aries=[19, 17, 1, 53, 3.86;      % v duren
160        20, 48, 1, 54, 2.655;
161        23, 27, 2, 7, 2;
162        27, 15, 2, 49, 3.63];
163 cass=[59 09 00 09 2;
164        56 32 0 40 2;
165        60 43 0 56 2;

```

```

166         60 14 1 25 3;
167         63 40 1 54 3.5];
168 lillbjo=[89 15 2 31 2;           % lilla bj rnen
169         86 35 17 32 4.3;
170         82 2 16 45 4;
171         77 47 15 44 4.3;
172         74 09 14 50 2.2;
173         71 50 15 20 3;
174         75 45 16 17 5];
175 stobjo=[49 18 13 47 1.8;       % stora bj rnen
176         54 55 13 23 2.2;
177         55 57 12 54 1.8;
178         57 01 12 15 3.3;
179         61 45 11 03 2;
180         56 22 11 01 2.4;
181         53 41 11 53 2.4;
182         63 03 9 31 3.6;
183         60 43 8 30 3.4;
184         59 2 9 50 3.8;
185         51 40 9 32 3.2;
186         48 2 8 59 3.2;
187         47 9 9 3 3.5;
188         47 46 11 46 3.6;
189         44 29 11 09 3;
190         41 29 10 22 3.2;
191         42 54 10 17 3.5;
192         33 5 11 18 3.5;
193         31 31 11 18 4.4];
194 ceph=[77 37 23 39 3.3;       % cassiopeja
195        66 11 22 49 3.5;
196        70 33 21 28 3.2;
197        62 35 21 18 2.5;
198        61 50 20 45 3.5;
199        62 59 20 29 4.3;
200        58 12 22 10 3.5;
201        57 2 22 15 4.2;
202        58 24 22 29 4.2];
203 orion=[7 24 5 55 .7;         % orion
204         9 56 5 35 3.4;
205         6 20 5 25 1.5;
206        -8 -12 5 14 .3;
207        -9 -40 5 47 2;
208         0 -17 5 32 2.2;
209        -1 -12 5 36 1.7;
210        -1 -56 5 40 1.7;
211        -4 -50 5 35 4.5;
212        -5 -54 5 35 2.7;
213        -5 -23 5 35 5;
214         10 9 4 54 4.6;
215         8 54 4 50 4.3;
216         6 57 4 49 3.2;
217         5 36 4 51 3.6;
218         2 26 4 54 3.6;
219         1 42 4 58 4.5;
220         9 38 6 2 4.2;
221         14 12 6 11 4.3;

```

```

222     14 46 6 7 4.3;
223     20 8 6 3 4.6;
224     20 16 5 54 4.4];
225 perseus= [49 51 3 24 1.9; % perseus
226           47 47 3 42 3;
227           40 0 3 57 2.9;
228           35 47 3 58 4;
229           31 53 3 54 2.9;
230           44 51 3 9 3.8;
231           40 57 3 8 2.1;
232           38 50 3 5 3.5;
233           38 19 2 50 4.2;
234           53 30 3 4 3;
235           55 53 2 50 3.7;
236           50 41 1 43 4];
237 cygnus=[45 16 20 41 1.4; % svanen
238          45 7 19 44 2.9;
239          40 15 20 22 2.3;
240          33 58 20 46 2.5;
241          30 13 21 12 3.3;
242          51 43 19 29 3.7;
243          27 57 19 30 3.2;
244          35 4 19 56 3.9;
245          30 9 19 39 4.7];
246 leo=[11 58 10 8 1.36; % lejonet
247       14 34 11 49 2.14;
248       19 50 10 19 2.37;
249       23 46 9 45 2.97;
250       15 25 11 14 3.33;
251       23 25 10 16 3.43;
252       16 45 10 7 3.51;
253       26 0 9 52 4];
254 pegand=[29 5 0 8 2; %
255          28 4 23 3 2.5;
256          15 12 23 4 2.5;
257          15 11 0 13 2.8;
258          10 49 22 41 3.4;
259          6 11 22 10 3.5;
260          9 52 21 44 2.4;
261          23 33 22 46 4;
262          17 20 21 44 4.3;
263          19 48 21 22 4;
264          30 13 22 43 3;
265          25 20 22 7 3.8;
266          25 38 21 44 4.1;
267          30 51 0 39 3.4;
268          35 37 1 9 2.2;
269          42 19 2 3 2.3;
270          33 43 0 36 4.2;
271          38 29 0 56 3.8;
272          48 37 1 37 3.5];
273 hercules=[36 48 17 15 3.2; % herkules
274           38 55 16 42 3.5;
275           31 36 16 41 2.9;
276           30 55 17 0 3.9;
277           37 15 17 56 3.8;

```

```

278         46 0 17 39 3.7;
279         42 26 16 34 4.2;
280         46 18 16 19 3.8;
281         44 56 16 8 4.2;
282         24 50 17 15 3.1;
283         26 6 17 30 4.2;
284         27 43 17 46 3.4;
285         29 14 17 57 3.7;
286         28 45 18 7 3.8;
287         21 29 16 30 2.8;
288         14 23 17 14 3.4;
289         19 9 16 21 3.7];
290 bootes=[19 11 14 15 0.2; % bj rnvaktaren
291         13 43 14 41 4.4;
292         18 23 13 54 2.7;
293         27 4 14 44 2.7;
294         30 22 14 31 3.5;
295         33 18 15 15 3.4;
296         40 23 15 1 3.5;
297         38 18 14 32 3;
298         46 5 14 16 4.1;
299         51 50 14 25 4.1];
300 auriga=[45 59 5 16 .08; % kusken
301         44 56 5 59 1.9;
302         37 12 5 59 2.6;
303         33 9 4 56 2.6;
304         41 14 5 6 3.1;
305         43 49 5 1 3.1];
306 taurus=[28 36 5 26 1.6; % oxen
307         22 57 4 42 4.2;
308         19 10 4 28 3.6;
309         17 32 4 22 3.8;
310         21 8 5 37 3;
311         16 30 4 35 1;
312         15 37 4 19 3.6;
313         12 29 4 0 3.4;
314         9 43 3 27 3.7];
315 gemini=[12 53 6 45 3.3; % tvillingarna
316         16 23 6 37 1.9;
317         20 34 7 4 3.9;
318         21 58 7 20 3.5;
319         24 23 7 44 3.5;
320         28 1 7 45 1.2;
321         31 53 7 34 1.5;
322         25 7 6 43 2.9;
323         22 30 6 22 2.9;
324         22 30 4 14 3.3];
325 virgo=[-11 -9 13 25 1; % jungfrun
326         0 -35 13 34 3.3;
327         3 23 12 55 3.4;
328         -1 -26 12 41 2.7;
329         -5 -32 13 9 4.3;
330         -10 -16 14 12 4.1;
331         1 32 14 1 4.2;
332         1 53 14 46 3.7;
333         10 57 13 2 2.8;

```

```

334         0 -40 12 19 3.8;
335         1 45 11 50 3.5];
336 aquila=[8 52 19 50 0.9;           % rnen
337         10 36 19 46 2.6;
338         6 24 19 55 3.7;
339         13 51 19 5 2.9;
340         15 4 18 59 4;
341         0 -49 20 11 3.2;
342         1 0 19 52 3.9;
343         3 6 19 25 3.3;
344         -4 -52 19 6 3.4;
345         -5 -44 19 1 4];
346 pisces=[2 45 2 2 4.1;           % fiskarna
347         5 29 1 41 4.4;
348         7 53 1 2 4.2;
349         7 35 0 48 4.4;
350         6 51 23 59 4;
351         5 37 23 39 4.1;
352         6 22 23 27 4.2;
353         3 16 23 17 3.7;
354         1 46 23 42 4.4;
355         9 9 1 45 4.2;
356         15 20 1 31 3.6;
357         30 5 1 11 4.5];

```

B Kod för parabolisk rotation

```
1 phi = 0.9;
2 a = [-1, 0];
3
4 stars= cass;
5 mag= stars(:,5);
6 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
7 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
8 v=90-v;
9 v= 2*pi*v/360;
10 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
11 fi= 2*pi*fi/24;
12 fi= 1.5-fi;
13 r=tan(v);
14 subplot(1,2,1)
15 hold on
16 scatter(r.*cos(fi), r.*sin(fi), mag, 'k. ')
17 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
18 subplot(1,2,2)
19 hold on
20 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
21 for i=1:length(v)
22     L = cot(v(i)/2);
23     vek = [L*cos(fi(i)), L*sin(fi(i))] + phi*a;
24     r2 = tan(2*acot(sqrt(vek(1)^2 + vek(2)^2)));
25     if(vek(1) >= 0)
26         t = atan(vek(2)/vek(1));
27         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'k. ')
28     elseif(vek(1) < 0)
29         t = atan(vek(2)/vek(1)) + pi;
30         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'k. ')
31     end
32 end
33
34 stars= lillbjo;
35 mag= stars(:,5);
36 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
37 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
38 v=90-v;
39 v= 2*pi*v/360;
40 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
41 fi= 2*pi*fi/24;
42 fi= 1.5-fi;
43 r=tan(v);
44 subplot(1,2,1)
45 hold on
46 scatter(r.*cos(fi), r.*sin(fi), mag, 'b. ')
47 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
48 subplot(1,2,2)
49 hold on
50 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
51 for i=1:length(v)
52     L = cot(v(i)/2);
53     vek = [L*cos(fi(i)), L*sin(fi(i))] + phi*a;
54     r2 = tan(2*acot(sqrt(vek(1)^2 + vek(2)^2)));
```

```

55     if (vek(1) >= 0)
56         t = atan(vek(2)/vek(1));
57         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'b. ')
58     elseif (vek(1) < 0)
59         t = atan(vek(2)/vek(1)) + pi;
60         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'b. ')
61     end
62 end
63
64 stars= stobjo;
65 mag= stars(:,5);
66 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
67 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
68 v=90-v;
69 v= 2*pi*v/360;
70 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
71 fi= 2*pi*fi/24;
72 fi= 1.5-fi;
73 r=tan(v);
74 subplot(1,2,1)
75 hold on
76 scatter(r.*cos(fi), r.*sin(fi), mag, 'k. ')
77 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
78 subplot(1,2,2)
79 hold on
80 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
81 for i=1:length(v)
82     L = cot(v(i)/2);
83     vek = [L*cos(fi(i)), L*sin(fi(i))] + phi*a;
84     r2 = tan(2*acot(sqrt(vek(1)^2 + vek(2)^2)));
85     if (vek(1) >= 0)
86         t = atan(vek(2)/vek(1));
87         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'k. ')
88     elseif (vek(1) < 0)
89         t = atan(vek(2)/vek(1)) + pi;
90         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'k. ')
91     end
92 end
93
94 stars= ceph;
95 mag= stars(:,5);
96 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
97 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
98 v=90-v;
99 v= 2*pi*v/360;
100 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
101 fi= 2*pi*fi/24;
102 fi= 1.5-fi;
103 r=tan(v);
104 subplot(1,2,1)
105 hold on
106 scatter(r.*cos(fi), r.*sin(fi), mag, 'g. ')
107 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
108 subplot(1,2,2)
109 hold on
110 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])

```

```

111 for i=1:length(v)
112     L = cot(v(i)/2);
113     vek = [L*cos(fi(i)), L*sin(fi(i))] + phi*a;
114     r2 = tan(2*acot(sqrt(vek(1)^2 + vek(2)^2)));
115     if(vek(1) >= 0)
116         t = atan(vek(2)/vek(1));
117         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'g. ')
118     elseif(vek(1) < 0)
119         t = atan(vek(2)/vek(1)) + pi;
120         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'g. ')
121     end
122 end
123
124 stars= perseus;
125 mag= stars(:,5);
126 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
127 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
128 v=90-v;
129 v= 2*pi*v/360;
130 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
131 fi= 2*pi*fi/24;
132 fi= 1.5-fi;
133 r=tan(v);
134 subplot(1,2,1)
135 hold on
136 scatter(r.*cos(fi), r.*sin(fi), mag, 'r. ')
137 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
138 subplot(1,2,2)
139 hold on
140 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
141 for i=1:length(v)
142     L = cot(v(i)/2);
143     vek = [L*cos(fi(i)), L*sin(fi(i))] + phi*a;
144     r2 = tan(2*acot(sqrt(vek(1)^2 + vek(2)^2)));
145     if(vek(1) >= 0)
146         t = atan(vek(2)/vek(1));
147         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'r. ')
148     elseif(vek(1) < 0)
149         t = atan(vek(2)/vek(1)) + pi;
150         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'r. ')
151     end
152 end
153
154 stars= cygnus;
155 mag= stars(:,5);
156 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
157 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
158 v=90-v;
159 v= 2*pi*v/360;
160 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
161 fi= 2*pi*fi/24;
162 fi= 1.5-fi;
163 r=tan(v);
164 subplot(1,2,1)
165 hold on
166 scatter(r.*cos(fi), r.*sin(fi), mag, 'm. ')

```



```

167 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
168 subplot(1,2,2)
169 hold on
170 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
171 for i=1:length(v)
172     L = cot(v(i)/2);
173     vek = [L*cos(fi(i)), L*sin(fi(i))] + phi*a;
174     r2 = tan(2*acot(sqrt(vek(1)^2 + vek(2)^2)));
175     if(vek(1) >= 0)
176         t = atan(vek(2)/vek(1));
177         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'm. ')
178     elseif(vek(1) < 0)
179         t = atan(vek(2)/vek(1)) + pi;
180         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'm. ')
181     end
182 end
183
184 stars= leo;
185 mag= stars(:,5);
186 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
187 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
188 v=90-v;
189 v= 2*pi*v/360;
190 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
191 fi= 2*pi*fi/24;
192 fi= 1.5-fi;
193 r=tan(v);
194 subplot(1,2,1)
195 hold on
196 scatter(r.*cos(fi), r.*sin(fi), mag, 'r. ')
197 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
198 subplot(1,2,2)
199 hold on
200 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
201 for i=1:length(v)
202     L = cot(v(i)/2);
203     vek = [L*cos(fi(i)), L*sin(fi(i))] + phi*a;
204     r2 = tan(2*acot(sqrt(vek(1)^2 + vek(2)^2)));
205     if(vek(1) >= 0)
206         t = atan(vek(2)/vek(1));
207         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'r. ')
208     elseif(vek(1) < 0)
209         t = atan(vek(2)/vek(1)) + pi;
210         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'r. ')
211     end
212 end
213
214 stars= pegand;
215 mag= stars(:,5);
216 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
217 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
218 v=90-v;
219 v= 2*pi*v/360;
220 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
221 fi= 2*pi*fi/24;
222 fi= 1.5-fi;

```

```

223 r=tan(v);
224 subplot(1,2,1)
225 hold on
226 scatter(r.*cos(fi), r.*sin(fi), mag, 'b. ')
227 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
228 subplot(1,2,2)
229 hold on
230 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
231 for i=1:length(v)
232     L = cot(v(i)/2);
233     vek = [L*cos(fi(i)), L*sin(fi(i))] + phi*a;
234     r2 = tan(2*acot(sqrt(vek(1)^2 + vek(2)^2)));
235     if(vek(1) >= 0)
236         t = atan(vek(2)/vek(1));
237         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'b. ')
238     elseif(vek(1) < 0)
239         t = atan(vek(2)/vek(1)) + pi;
240         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'b. ')
241     end
242 end
243
244 stars= hercules;
245 mag= stars(:,5);
246 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
247 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
248 v=90-v;
249 v= 2*pi*v/360;
250 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
251 fi= 2*pi*fi/24;
252 fi= 1.5-fi;
253 r=tan(v);
254 subplot(1,2,1)
255 hold on
256 scatter(r.*cos(fi), r.*sin(fi), mag, 'r. ')
257 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
258 subplot(1,2,2)
259 hold on
260 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
261 for i=1:length(v)
262     L = cot(v(i)/2);
263     vek = [L*cos(fi(i)), L*sin(fi(i))] + phi*a;
264     r2 = tan(2*acot(sqrt(vek(1)^2 + vek(2)^2)));
265     if(vek(1) >= 0)
266         t = atan(vek(2)/vek(1));
267         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'r. ')
268     elseif(vek(1) < 0)
269         t = atan(vek(2)/vek(1)) + pi;
270         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'r. ')
271     end
272 end
273
274 stars= bootes;
275 mag= stars(:,5);
276 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
277 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
278 v=90-v;

```

```

279 v= 2*pi*v/360;
280 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
281 fi= 2*pi*fi/24;
282 fi= 1.5-fi;
283 r=tan(v);
284 subplot(1,2,1)
285 hold on
286 scatter(r.*cos(fi), r.*sin(fi), mag, 'g. ')
287 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
288 subplot(1,2,2)
289 hold on
290 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
291 for i=1:length(v)
292     L = cot(v(i)/2);
293     vek = [L*cos(fi(i)), L*sin(fi(i))] + phi*a;
294     r2 = tan(2*acot(sqrt(vek(1)^2 + vek(2)^2)));
295     if(vek(1) >= 0)
296         t = atan(vek(2)/vek(1));
297         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'g. ')
298     elseif(vek(1) < 0)
299         t = atan(vek(2)/vek(1)) + pi;
300         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'g. ')
301     end
302 end
303
304 stars= auriga;
305 mag= stars(:,5);
306 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
307 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
308 v=90-v;
309 v= 2*pi*v/360;
310 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
311 fi= 2*pi*fi/24;
312 fi= 1.5-fi;
313 r=tan(v);
314 subplot(1,2,1)
315 hold on
316 scatter(r.*cos(fi), r.*sin(fi), mag, 'g. ')
317 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
318 subplot(1,2,2)
319 hold on
320 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
321 for i=1:length(v)
322     L = cot(v(i)/2);
323     vek = [L*cos(fi(i)), L*sin(fi(i))] + phi*a;
324     r2 = tan(2*acot(sqrt(vek(1)^2 + vek(2)^2)));
325     if(vek(1) >= 0)
326         t = atan(vek(2)/vek(1));
327         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'g. ')
328     elseif(vek(1) < 0)
329         t = atan(vek(2)/vek(1)) + pi;
330         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'g. ')
331     end
332 end
333
334 stars= taurus;

```

```

335 mag= stars (:,5);
336 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
337 v=stars (:,1)+ stars (:,2)/60;
338 v=90-v;
339 v= 2*pi*v/360;
340 fi=stars (:,3)+stars (:,4)/60;
341 fi= 2*pi*fi/24;
342 fi= 1.5-fi;
343 r=tan(v);
344 subplot(1,2,1)
345 hold on
346 scatter(r.*cos(fi), r.*sin(fi), mag, 'm. ')
347 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
348 subplot(1,2,2)
349 hold on
350 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
351 for i=1:length(v)
352     L = cot(v(i)/2);
353     vek = [L*cos(fi(i)), L*sin(fi(i))] + phi*a;
354     r2 = tan(2*acot(sqrt(vek(1)^2 + vek(2)^2)));
355     if(vek(1) >= 0)
356         t = atan(vek(2)/vek(1));
357         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'm. ')
358     elseif(vek(1) < 0)
359         t = atan(vek(2)/vek(1)) + pi;
360         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'm. ')
361     end
362 end
363
364 stars= gemini;
365 mag= stars (:,5);
366 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
367 v=stars (:,1)+ stars (:,2)/60;
368 v=90-v;
369 v= 2*pi*v/360;
370 fi=stars (:,3)+stars (:,4)/60;
371 fi= 2*pi*fi/24;
372 fi= 1.5-fi;
373 r=tan(v);
374 subplot(1,2,1)
375 hold on
376 scatter(r.*cos(fi), r.*sin(fi), mag, 'b. ')
377 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
378 subplot(1,2,2)
379 hold on
380 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
381 for i=1:length(v)
382     L = cot(v(i)/2);
383     vek = [L*cos(fi(i)), L*sin(fi(i))] + phi*a;
384     r2 = tan(2*acot(sqrt(vek(1)^2 + vek(2)^2)));
385     if(vek(1) >= 0)
386         t = atan(vek(2)/vek(1));
387         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'b. ')
388     elseif(vek(1) < 0)
389         t = atan(vek(2)/vek(1)) + pi;
390         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'b. ')

```

```

391     end
392 end
393
394 stars= virgo;
395 mag= stars (:,5);
396 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
397 v=stars (:,1)+ stars (:,2)/60;
398 v=90-v;
399 v= 2*pi*v/360;
400 fi=stars (:,3)+stars (:,4)/60;
401 fi= 2*pi*fi/24;
402 fi= 1.5- fi;
403 r=tan(v);
404 subplot(1,2,1)
405 hold on
406 scatter(r.*cos(fi), r.*sin(fi), mag, 'b. ')
407 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
408 subplot(1,2,2)
409 hold on
410 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
411 for i=1:length(v)
412     L = cot(v(i)/2);
413     vek = [L*cos(fi(i)), L*sin(fi(i))] + phi*a;
414     r2 = tan(2*acot(sqrt(vek(1)^2 + vek(2)^2)));
415     if(vek(1) >= 0)
416         t = atan(vek(2)/vek(1));
417         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'b. ')
418     elseif(vek(1) < 0)
419         t = atan(vek(2)/vek(1)) + pi;
420         scatter(r2*cos(t), r2*sin(t), mag(i), 'b. ')
421     end
422 end
423
424 stars= aquila;
425 mag= stars (:,5);
426 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
427 v=stars (:,1)+ stars (:,2)/60;
428 v=90-v;
429 v= 2*pi*v/360;
430 fi=stars (:,3)+stars (:,4)/60;
431 fi= 2*pi*fi/24;
432 fi= 1.5- fi;
433 r=tan(v);
434 subplot(1,2,1)
435 hold on
436 scatter(r.*cos(fi), r.*sin(fi), mag, 'k. ')
437 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
438 subplot(1,2,2)
439 hold on
440 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
441 for i=1:length(v)
442     L = cot(v(i)/2);
443     vek = [L*cos(fi(i)), L*sin(fi(i))] + phi*a;
444     r2 = tan(2*acot(sqrt(vek(1)^2 + vek(2)^2)));
445     if(vek(1) >= 0)
446         t = atan(vek(2)/vek(1));

```

```

447         scatter(r2*cos(t),r2*sin(t),mag(i),'k. ')
448     elseif(vek(1) < 0)
449         t = atan(vek(2)/vek(1)) + pi;
450         scatter(r2*cos(t),r2*sin(t),mag(i),'k. ')
451     end
452 end
453
454 stars= pisces;
455 mag= stars(:,5);
456 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
457 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
458 v=90-v;
459 v= 2*pi*v/360;
460 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
461 fi= 2*pi*fi/24;
462 fi= 1.5-fi;
463 r=tan(v);
464 subplot(1,2,1)
465 hold on
466 scatter(r.*cos(fi), r.*sin(fi), mag, 'r. ')
467 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
468 subplot(1,2,2)
469 hold on
470 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
471 for i=1:length(v)
472     L = cot(v(i)/2);
473     vek = [L*cos(fi(i)), L*sin(fi(i))] + phi*a;
474     r2 = tan(2*acot(sqrt(vek(1)^2 + vek(2)^2)));
475     if(vek(1) >= 0)
476         t = atan(vek(2)/vek(1));
477         scatter(r2*cos(t),r2*sin(t),mag(i),'r. ')
478     elseif(vek(1) < 0)
479         t = atan(vek(2)/vek(1)) + pi;
480         scatter(r2*cos(t),r2*sin(t),mag(i),'r. ')
481     end
482 end

```

C Kod för Lorentztransformationen av himmelssfären

```
1 b2 = 1; b3 = 1; %Variera dessa v rden f r olika hastigheter.
2
3 stars= cass;
4 mag= stars(:,5);
5 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
6 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
7 v=90-v;
8 v= 2*pi*v/360;
9 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
10 fi= 2*pi*fi/24;
11 fi= 1.5-fi;
12 x=tan(v/2);
13 x=x/b2;
14 v2=2*atan(x);
15 r2=tan(v2);
16 subplot(1,2,1)
17 hold on
18 title('v = ')
19 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag,'k.')
20 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
21 x=tan(v/2);
22 x=x/b3;
23 v3=2*atan(x);
24 r3=tan(v3);
25 subplot(1,2,2)
26 hold on
27 title('v = ');
28 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag,'k.')
29 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
30
31
32 stars= lillbjo;
33 mag= stars(:,5);
34 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
35 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
36 v=90-v;
37 v= 2*pi*v/360;
38 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
39 fi= 2*pi*fi/24;
40 fi= 1.5-fi;
41 x=tan(v/2);
42 x=x/b2;
43 v2=2*atan(x);
44 r2=tan(v2);
45 subplot(1,2,1)
46 hold on
47 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag,'b.')
48 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
49 x=tan(v/2);
50 x=x/b3;
51 v3=2*atan(x);
52 r3=tan(v3);
53 subplot(1,2,2)
54 hold on
```

```

55 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'b. ')
56 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
57
58 stars= stobjo;
59 mag= stars(:,5);
60 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
61 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
62 v=90-v;
63 v= 2*pi*v/360;
64 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
65 fi= 2*pi*fi/24;
66 fi= 1.5- fi;
67 x=tan(v/2);
68 x=x/b2;
69 v2=2*atan(x);
70 r2=tan(v2);
71 subplot(1,2,1)
72 hold on
73 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'k. ')
74 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
75 x=tan(v/2);
76 x=x/b3;
77 v3=2*atan(x);
78 r3=tan(v3);
79 subplot(1,2,2)
80 hold on
81 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'k. ')
82 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
83
84 stars= ceph;
85 mag= stars(:,5);
86 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
87 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
88 v=90-v;
89 v= 2*pi*v/360;
90 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
91 fi= 2*pi*fi/24;
92 fi= 1.5- fi;
93 x=tan(v/2);
94 x=x/b2;
95 v2=2*atan(x);
96 r2=tan(v2);
97 subplot(1,2,1)
98 hold on
99 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'g. ')
100 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
101 x=tan(v/2);
102 x=x/b3;
103 v3=2*atan(x);
104 r3=tan(v3);
105 subplot(1,2,2)
106 hold on
107 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'g. ')
108 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
109
110 stars= orion;

```



```

111 mag= stars (:,5);
112 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
113 v=stars (:,1)+ stars (:,2)/60;
114 v=90-v;
115 v= 2*pi*v/360;
116 fi=stars (:,3)+stars (:,4)/60;
117 fi= 2*pi*fi/24;
118 fi= 1.5-fi;
119 x=tan(v/2);
120 x=x/b2;
121 v2=2*atan(x);
122 r2=tan(v2);
123 subplot(1,2,1)
124 hold on
125 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'k. ')
126 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
127 x=tan(v/2);
128 x=x/b3;
129 v3=2*atan(x);
130 r3=tan(v3);
131 subplot(1,2,2)
132 hold on
133 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'k. ')
134 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
135
136 stars= perseus;
137 mag= stars (:,5);
138 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
139 v=stars (:,1)+ stars (:,2)/60;
140 v=90-v;
141 v= 2*pi*v/360;
142 fi=stars (:,3)+stars (:,4)/60;
143 fi= 2*pi*fi/24;
144 fi= 1.5-fi;
145 x=tan(v/2);
146 x=x/b2;
147 v2=2*atan(x);
148 r2=tan(v2);
149 subplot(1,2,1)
150 hold on
151 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'r. ')
152 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
153 x=tan(v/2);
154 x=x/b3;
155 v3=2*atan(x);
156 r3=tan(v3);
157 subplot(1,2,2)
158 hold on
159 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'r. ')
160 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
161
162 stars= cygnus;
163 mag= stars (:,5);
164 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
165 v=stars (:,1)+ stars (:,2)/60;
166 v=90-v;

```

```

167 v= 2*pi*v/360;
168 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
169 fi= 2*pi*fi/24;
170 fi= 1.5-fi;
171 x=tan(v/2);
172 x=x/b2;
173 v2=2*atan(x);
174 r2=tan(v2);
175 subplot(1,2,1)
176 hold on
177 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'm. ')
178 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
179 x=tan(v/2);
180 x=x/b3;
181 v3=2*atan(x);
182 r3=tan(v3);
183 subplot(1,2,2)
184 hold on
185 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'm. ')
186 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
187
188 stars= leo;
189 mag= stars(:,5);
190 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
191 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
192 v=90-v;
193 v= 2*pi*v/360;
194 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
195 fi= 2*pi*fi/24;
196 fi= 1.5-fi;
197 x=tan(v/2);
198 x=x/b2;
199 v2=2*atan(x);
200 r2=tan(v2);
201 subplot(1,2,1)
202 hold on
203 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'r. ')
204 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
205 x=tan(v/2);
206 x=x/b3;
207 v3=2*atan(x);
208 r3=tan(v3);
209 subplot(1,2,2)
210 hold on
211 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'r. ')
212 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
213
214 stars= pegand;
215 mag= stars(:,5);
216 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
217 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
218 v=90-v;
219 v= 2*pi*v/360;
220 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
221 fi= 2*pi*fi/24;
222 fi= 1.5-fi;

```

```

223 x=tan(v/2);
224 x=x/b2;
225 v2=2*atan(x);
226 r2=tan(v2);
227 subplot(1,2,1)
228 hold on
229 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'b. ')
230 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
231 x=tan(v/2);
232 x=x/b3;
233 v3=2*atan(x);
234 r3=tan(v3);
235 subplot(1,2,2)
236 hold on
237 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'b. ')
238 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
239
240 stars= hercules;
241 mag= stars(:,5);
242 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
243 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
244 v=90-v;
245 v= 2*pi*v/360;
246 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
247 fi= 2*pi*fi/24;
248 fi= 1.5-fi;
249 x=tan(v/2);
250 x=x/b2;
251 v2=2*atan(x);
252 r2=tan(v2);
253 subplot(1,2,1)
254 hold on
255 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'r. ')
256 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
257 x=tan(v/2);
258 x=x/b3;
259 v3=2*atan(x);
260 r3=tan(v3);
261 subplot(1,2,2)
262 hold on
263 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'r. ')
264 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
265
266 stars= bootes;
267 mag= stars(:,5);
268 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
269 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
270 v=90-v;
271 v= 2*pi*v/360;
272 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
273 fi= 2*pi*fi/24;
274 fi= 1.5-fi;
275 x=tan(v/2);
276 x=x/b2;
277 v2=2*atan(x);
278 r2=tan(v2);

```

```

279 subplot(1,2,1)
280 hold on
281 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'g. ')
282 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
283 x=tan(v/2);
284 x=x/b3;
285 v3=2*atan(x);
286 r3=tan(v3);
287 subplot(1,2,2)
288 hold on
289 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'g. ')
290 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
291
292 stars= auriga;
293 mag= stars(:,5);
294 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
295 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
296 v=90-v;
297 v= 2*pi*v/360;
298 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
299 fi= 2*pi*fi/24;
300 fi= 1.5-fi;
301 x=tan(v/2);
302 x=x/b2;
303 v2=2*atan(x);
304 r2=tan(v2);
305 subplot(1,2,1)
306 hold on
307 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'g. ')
308 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
309 x=tan(v/2);
310 x=x/b3;
311 v3=2*atan(x);
312 r3=tan(v3);
313 subplot(1,2,2)
314 hold on
315 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'g. ')
316 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
317
318 stars= taurus;
319 mag= stars(:,5);
320 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
321 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
322 v=90-v;
323 v= 2*pi*v/360;
324 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
325 fi= 2*pi*fi/24;
326 fi= 1.5-fi;
327 x=tan(v/2);
328 x=x/b2;
329 v2=2*atan(x);
330 r2=tan(v2);
331 subplot(1,2,1)
332 hold on
333 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'm. ')
334 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])

```

```

335 x=tan(v/2);
336 x=x/b3;
337 v3=2*atan(x);
338 r3=tan(v3);
339 subplot(1,2,2)
340 hold on
341 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'm. ')
342 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
343
344 stars= gemini;
345 mag= stars(:,5);
346 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
347 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
348 v=90-v;
349 v= 2*pi*v/360;
350 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
351 fi= 2*pi*fi/24;
352 fi= 1.5-fi;
353 x=tan(v/2);
354 x=x/b2;
355 v2=2*atan(x);
356 r2=tan(v2);
357 subplot(1,2,1)
358 hold on
359 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'b. ')
360 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
361 x=tan(v/2);
362 x=x/b3;
363 v3=2*atan(x);
364 r3=tan(v3);
365 subplot(1,2,2)
366 hold on
367 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'b. ')
368 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
369
370 stars= virgo;
371 mag= stars(:,5);
372 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
373 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
374 v=90-v;
375 v= 2*pi*v/360;
376 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
377 fi= 2*pi*fi/24;
378 fi= 1.5-fi;
379 x=tan(v/2);
380 x=x/b2;
381 v2=2*atan(x);
382 r2=tan(v2);
383 subplot(1,2,1)
384 hold on
385 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'b. ')
386 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
387 x=tan(v/2);
388 x=x/b3;
389 v3=2*atan(x);
390 r3=tan(v3);

```

```

391 subplot(1,2,2)
392 hold on
393 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'b. ')
394 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
395
396 stars= aquila;
397 mag= stars(:,5);
398 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
399 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
400 v=90-v;
401 v= 2*pi*v/360;
402 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
403 fi= 2*pi*fi/24;
404 fi= 1.5-fi;
405 x=tan(v/2);
406 x=x/b2;
407 v2=2*atan(x);
408 r2=tan(v2);
409 subplot(1,2,1)
410 hold on
411 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'k. ')
412 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
413 x=tan(v/2);
414 x=x/b3;
415 v3=2*atan(x);
416 r3=tan(v3);
417 subplot(1,2,2)
418 hold on
419 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'k. ')
420 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
421
422 stars= pisces;
423 mag= stars(:,5);
424 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
425 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
426 v=90-v;
427 v= 2*pi*v/360;
428 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
429 fi= 2*pi*fi/24;
430 fi= 1.5-fi;
431 x=tan(v/2);
432 x=x/b2;
433 v2=2*atan(x);
434 r2=tan(v2);
435 subplot(1,2,1)
436 hold on
437 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'r. ')
438 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
439 x=tan(v/2);
440 x=x/b3;
441 v3=2*atan(x);
442 r3=tan(v3);
443 subplot(1,2,2)
444 hold on
445 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'r. ')
446 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])

```

```

447
448 %S?dra
449
450 stars= crux; %dyker upp vid b = 8
451 mag= stars (:,5);
452 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
453 v=stars (:,1)+ stars (:,2)/60;
454 v=90-v;
455 v= 2*pi*v/360;
456 fi=stars (:,3)+stars (:,4)/60;
457 fi= 2*pi*fi/24;
458 fi= 1.5-fi;
459 x=tan(v/2);
460 x=x/b2;
461 v2=2*atan(x);
462 r2=tan(v2);
463 subplot(1,2,1)
464 hold on
465 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'b. ')
466 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
467 x=tan(v/2);
468 x=x/b3;
469 v3=2*atan(x);
470 r3=tan(v3);
471 subplot(1,2,2)
472 hold on
473 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'b. ')
474 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
475
476 stars= libra; %dyker upp vid b = 2
477 mag= stars (:,5);
478 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
479 v=stars (:,1)+ stars (:,2)/60;
480 v=90-v;
481 v= 2*pi*v/360;
482 fi=stars (:,3)+stars (:,4)/60;
483 fi= 2*pi*fi/24;
484 fi= 1.5-fi;
485 x=tan(v/2);
486 x=x/b2;
487 v2=2*atan(x);
488 r2=tan(v2);
489 subplot(1,2,1)
490 hold on
491 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'g. ')
492 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
493 x=tan(v/2);
494 x=x/b3;
495 v3=2*atan(x);
496 r3=tan(v3);
497 subplot(1,2,2)
498 hold on
499 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'g. ')
500 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
501
502 stars= grus; %dyker upp vid b = 4.5

```

```

503 mag= stars (:,5);
504 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
505 v=stars (:,1)+ stars (:,2)/60;
506 v=90-v;
507 v= 2*pi*v/360;
508 fi=stars (:,3)+stars (:,4)/60;
509 fi= 2*pi*fi/24;
510 fi= 1.5-fi;
511 x=tan(v/2);
512 x=x/b2;
513 v2=2*atan(x);
514 r2=tan(v2);
515 subplot(1,2,1)
516 hold on
517 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'm. ')
518 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
519 x=tan(v/2);
520 x=x/b3;
521 v3=2*atan(x);
522 r3=tan(v3);
523 subplot(1,2,2)
524 hold on
525 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'm. ')
526 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
527
528 stars= scuptor; %dyker upp vid b = 4;
529 mag= stars (:,5);
530 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
531 v=stars (:,1)+ stars (:,2)/60;
532 v=90-v;
533 v= 2*pi*v/360;
534 fi=stars (:,3)+stars (:,4)/60;
535 fi= 2*pi*fi/24;
536 fi= 1.5-fi;
537 x=tan(v/2);
538 x=x/b2;
539 v2=2*atan(x);
540 r2=tan(v2);
541 subplot(1,2,1)
542 hold on
543 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'k. ')
544 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
545 x=tan(v/2);
546 x=x/b3;
547 v3=2*atan(x);
548 r3=tan(v3);
549 subplot(1,2,2)
550 hold on
551 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'k. ')
552 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
553
554 stars= piscisau; %dyker upp vid b = 3.5
555 mag= stars (:,5);
556 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
557 v=stars (:,1)+ stars (:,2)/60;
558 v=90-v;

```



```

559 v= 2*pi*v/360;
560 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
561 fi= 2*pi*fi/24;
562 fi= 1.5-fi;
563 x=tan(v/2);
564 x=x/b2;
565 v2=2*atan(x);
566 r2=tan(v2);
567 subplot(1,2,1)
568 hold on
569 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'y. ')
570 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
571 x=tan(v/2);
572 x=x/b3;
573 v3=2*atan(x);
574 r3=tan(v3);
575 subplot(1,2,2)
576 hold on
577 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'y. ')
578 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
579
580 stars= capricorn; %dyker upp vid b = 2.5
581 mag= stars(:,5);
582 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
583 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
584 v=90-v;
585 v= 2*pi*v/360;
586 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
587 fi= 2*pi*fi/24;
588 fi= 1.5-fi;
589 x=tan(v/2);
590 x=x/b2;
591 v2=2*atan(x);
592 r2=tan(v2);
593 subplot(1,2,1)
594 hold on
595 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'b. ')
596 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
597 x=tan(v/2);
598 x=x/b3;
599 v3=2*atan(x);
600 r3=tan(v3);
601 subplot(1,2,2)
602 hold on
603 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'b. ')
604 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
605
606 stars= scorpius; %dyker upp vid b = 3
607 mag= stars(:,5);
608 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
609 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
610 v=90-v;
611 v= 2*pi*v/360;
612 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
613 fi= 2*pi*fi/24;
614 fi= 1.5-fi;

```

```

615 x=tan(v/2);
616 x=x/b2;
617 v2=2*atan(x);
618 r2=tan(v2);
619 subplot(1,2,1)
620 hold on
621 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'y. ')
622 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
623 x=tan(v/2);
624 x=x/b3;
625 v3=2*atan(x);
626 r3=tan(v3);
627 subplot(1,2,2)
628 hold on
629 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'y. ')
630 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
631
632 stars= coronaaus; %dyker upp vid b = 4
633 mag= stars(:,5);
634 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
635 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
636 v=90-v;
637 v= 2*pi*v/360;
638 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
639 fi= 2*pi*fi/24;
640 fi= 1.5-fi;
641 x=tan(v/2);
642 x=x/b2;
643 v2=2*atan(x);
644 r2=tan(v2);
645 subplot(1,2,1)
646 hold on
647 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'k. ')
648 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
649 x=tan(v/2);
650 x=x/b3;
651 v3=2*atan(x);
652 r3=tan(v3);
653 subplot(1,2,2)
654 hold on
655 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'k. ')
656 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
657
658 stars= lupus; %dyker upp vid b = 4
659 mag= stars(:,5);
660 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
661 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
662 v=90-v;
663 v= 2*pi*v/360;
664 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
665 fi= 2*pi*fi/24;
666 fi= 1.5-fi;
667 x=tan(v/2);
668 x=x/b2;
669 v2=2*atan(x);
670 r2=tan(v2);

```

```

671 subplot(1,2,1)
672 hold on
673 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'c. ')
674 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
675 x=tan(v/2);
676 x=x/b3;
677 v3=2*atan(x);
678 r3=tan(v3);
679 subplot(1,2,2)
680 hold on
681 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'c. ')
682 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
683
684 stars= carina; %dyker upp vid b = 6
685 mag= stars(:,5);
686 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
687 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
688 v=90-v;
689 v= 2*pi*v/360;
690 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
691 fi= 2*pi*fi/24;
692 fi= 1.5-fi;
693 x=tan(v/2);
694 x=x/b2;
695 v2=2*atan(x);
696 r2=tan(v2);
697 subplot(1,2,1)
698 hold on
699 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'r. ')
700 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
701 x=tan(v/2);
702 x=x/b3;
703 v3=2*atan(x);
704 r3=tan(v3);
705 subplot(1,2,2)
706 hold on
707 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'r. ')
708 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
709
710 stars= sagittaurus; %dyker upp vid b = 3
711 mag= stars(:,5);
712 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
713 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
714 v=90-v;
715 v= 2*pi*v/360;
716 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
717 fi= 2*pi*fi/24;
718 fi= 1.5-fi;
719 x=tan(v/2);
720 x=x/b2;
721 v2=2*atan(x);
722 r2=tan(v2);
723 subplot(1,2,1)
724 hold on
725 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'r. ')
726 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])

```

```

727 x=tan(v/2);
728 x=x/b3;
729 v3=2*atan(x);
730 r3=tan(v3);
731 subplot(1,2,2)
732 hold on
733 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'r. ')
734 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
735
736 stars= centaurus; %dyker upp vid b = 3.5
737 mag= stars(:,5);
738 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
739 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
740 v=90-v;
741 v= 2*pi*v/360;
742 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
743 fi= 2*pi*fi/24;
744 fi= 1.5-fi;
745 x=tan(v/2);
746 x=x/b2;
747 v2=2*atan(x);
748 r2=tan(v2);
749 subplot(1,2,1)
750 hold on
751 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'm. ')
752 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
753 x=tan(v/2);
754 x=x/b3;
755 v3=2*atan(x);
756 r3=tan(v3);
757 subplot(1,2,2)
758 hold on
759 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'm. ')
760 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
761
762 stars= aquarius; %dyker upp vid b = 2
763 mag= stars(:,5);
764 mag= 400*10.^(-mag/3.5);
765 v=stars(:,1)+ stars(:,2)/60;
766 v=90-v;
767 v= 2*pi*v/360;
768 fi=stars(:,3)+stars(:,4)/60;
769 fi= 2*pi*fi/24;
770 fi= 1.5-fi;
771 x=tan(v/2);
772 x=x/b2;
773 v2=2*atan(x);
774 r2=tan(v2);
775 subplot(1,2,1)
776 hold on
777 scatter(r2.*cos(fi), r2.*sin(fi), mag, 'y. ')
778 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
779 x=tan(v/2);
780 x=x/b3;
781 v3=2*atan(x);
782 r3=tan(v3);

```

```
783 subplot(1,2,2)
784 hold on
785 scatter(r3.*cos(fi), r3.*sin(fi), mag, 'y. ')
786 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
```