VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

SIGNIFICADOS DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO MANIFESTADOS POR ALUMNOS UNIVERSITARIOS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE COSTA RICA

MEANINGS OF THE CONCEPT OF THE LIMIT OF A FUNCTION AT A POINT EXPRESSED BY STUDENTS OF THE NATIONAL UNIVERSITY OF COSTA RICA

Yosenith González Flores, José Antonio Fernández Plaza, Juan Francisco Ruiz Hidalgo
Universidad Nacional (Costa Rica). Universidad de Granada (España). Universidad de Granada (España)
yflowers3@gmail.com, joseanfplaza@ugr.es, jfruiz@ugr.es

Resumen
Esta investigación en proceso espera analizar el significado del concepto de límite de una función en un punto expresado por estudiantes universitarios de la Universidad Nacional de Costa Rica. El marco teórico está formado por el pensamiento matemático avanzado, así como la noción de significado de los conceptos matemáticos escolares. Se utiliza una metodología cualitativa y descriptiva para analizar los datos recopilados. Algunas de las conclusiones preliminares indican que los estudiantes de Biología e Ingeniería en Química Industrial expresan una comprensión dual concepto-proceso para el límite, usan principalmente la representación gráfica y proponen aplicaciones vagas. Esperamos analizar el resto de la información proporcionada por los estudiantes universitarios de diferentes grados para determinar si los significados expresados son similares a los ya obtenidos.

Palabras clave: límite, pensamiento matemático avanzado.

Abstract
This ongoing research aims to analyze the meaning of the concept of limit of a function at a point expressed by undergraduate students of the National University of Costa Rica. The theoretical framework is made up of the Advanced Mathematical Thinking as well as the notion of meaning of school mathematical concepts. A qualitative and descriptive methodology is used to analyze the data collected. Some of the preliminary conclusions indicate that Biology and Industrial Chemistry Engineering students express a dual understanding concept-process for the limit. They use mostly the graphic representation and propose vague applications. We expect to analyze the rest of the information provided by the undergraduates of different grades to determine if the expressed meanings are similar to the ones already obtained.

Key words: limit, advanced mathematical thinking.

Introducción

El cálculo diferencial e integral fue desarrollado por Newton y Leibniz durante los siglos XVII y XVIII, inicialmente de forma poco rigurosa hasta que varios siglos después se dio un tratamiento más formal. Un caso particular es el concepto de límite de una función. Fue hasta el siglo XIX, en donde frases con carácter ambiguo del tipo "*tan pequeño como se quiera"* obtuvieron mayor rigor y formalismo en los trabajos de Weierstrass y otros matemáticos (Ruiz, 2003).

La epistemología histórica muestra un camino lleno de imprecisiones y problemas en la formalización del límite en las matemáticas. Este concepto es básico en el cálculo diferencial e integral para el desarrollo de otros conceptos como continuidad, derivabilidad, integración, convergencia, entre otros (Kidron, 2014).

Según Kidron (2014), el concepto de límite es una noción compleja del pensamiento matemático avanzado. Por tal razón, en las matemáticas escolares su enseñanza debería abordarse mediante un análisis profundo que implique, entre otros elementos, a la epistemología del concepto, en cuanto a su desarrollo histórico, a las creencias del profesor y a la evolución de las concepciones de sus alumnos (Contreras y García, 2015). No obstante, se reincide en conflictos cognitivos o dificultades en su aprendizaje (Blázquez y Ortega, 2002; Tall, 1980; Tall y Katz, 2014) lo que ha favorecido la investigación sobre diferentes aspectos de su comprensión (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico, y Castro, 2013; Kidron y Tall, 2014; Swinyard, 2011; Tall y Katz, 2014).

En Costa Rica se desconocen estudios en esta línea. Por lo tanto, hemos formulado esta investigación para darle continuidad a un estudio en el que se abordaron algunos aspectos del significado de límite finito de una función en un punto, con 38 estudiantes universitarios de Biología e Ingeniería en Química Industrial de la Universidad Nacional de Costa Rica. Concretamente, el propósito de nuestra investigación es profundizar y analizar sobre los significados atribuidos al concepto de límite, durante y posterior a su enseñanza, por los estudiantes universitarios mencionados y algunos de otras carreras de dicha universidad que se incorporarán al estudio.

Marco teórico

Los fundamentos teóricos de esta investigación están organizados en dos apartados. El primero presenta los antecedentes, que corresponden a la literatura relacionada con el límite. El segundo resalta el posicionamiento conceptual, destacando las bases teóricas que orientan el estudio, especialmente la noción de significado desde una perspectiva semántica.

Antecedentes

La compresión del concepto de límite supone para los estudiantes dificultades. Esto ha generado que esta noción haya sido abordada en diferentes estudios y desde diversas perspectivas. Las investigaciones pueden organizar en tres grupos: (1) sobre concepciones intuitivas y el lenguaje del cálculo, (2) sobre conflictos cognitivos y (3) sobre la introducción en el aula de definiciones alternativas a la formal y el estudio de fenómenos asociados. A continuación, se presentan algunos estudios.

Investigaciones sobre concepciones intuitivas y el lenguaje del cálculo

Diversos estudios sobre las concepciones del límite muestran que un gran número de estudiantes de secundaria y de universidad tienen una noción intuitiva del límite y lo asocian con aspectos inalcanzables.

En este sentido, Williams (1991) estudió las concepciones del límite que tenían estudiantes universitarios. Para ello, les brindó seis afirmaciones sobre los límites y les solicitó que determinaran su veracidad o falsedad y que indicaran cuáles describían mejor el límite. De esas seis afirmaciones, tres fueron escogidas por la mayoría de los estudiantes como verdaderas. Las tres afirmaciones atienden aspectos del límite como noción intuitiva, el límite como noción inalcanzable y el límite relacionado con la definición formal. Dichas afirmaciones también las seleccionaron con mayor frecuencia como la mejor descripción de un límite.

Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico y Castro (2013) describieron e interpretaron las definiciones que brindaron un grupo de estudiantes de bachillerato sobre el concepto de límite finito de una función en un punto en términos de aspectos estructurales, agrupados y sintetizados de investigaciones previas. Estos aspectos corresponden a la interpretación como objeto o como proceso de la noción de límite, los algoritmos y las destrezas prácticas para su cálculo, su alcanzabilidad y su rebasabilidad. A partir de ellos, analizaron las definiciones recogidas. Como parte de los resultados destacaron la riqueza de significado de estas definiciones debido al carácter no alcanzable y no rebasable atribuido al límite y por su consideración dual como objeto o proceso.

Swinyard (2011) realizó un experimento de enseñanza de diez semanas con dos estudiantes que no conocían previamente la definición de límite convencional $\varepsilon - \delta$. Dicho experimento consistió en la reinvención de una definición formal de límite que capturara el significado deseado de la definición convencional a través de tareas diseñadas con esa intención. En el estudio se muestra la evolución de la definición y los razonamientos empleados.

Investigaciones sobre conflictos cognitivos referentes al concepto de límite

La transición de la definición informal a la formal del límite puede generar muchos conflictos en los estudiantes. Tall (1980) describió que cuando a los escolares se les brinda una definición informal de límite, y posteriormente la definición formal, se construye una imagen conceptual antes de la definición formal del concepto, lo que ocasiona que ciertas propiedades implícitas que no son parte de la definición se vuelven parte de la imagen conceptual.

Blázquez y Ortega (1998) realizaron un estudio sobre comprensión del concepto de límite funcional por alumnos de segundo curso de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, a través de actividades en registros de representación gráfica, tabular numérico y simbólico. Determinaron que los escolares se resisten a aceptar la no existencia del límite y, en consecuencia, su búsqueda lleva a una situación en la que surgen “obstáculos como la identificación del límite con el valor de la función en el punto (que es muy fuerte porque les sirve para justificar propiedades como la unicidad) o la confusión entre el valor al que tiende x y el límite” (p. 131).

Cornu (2002) indica que una de las mayores dificultades en la enseñanza y aprendizaje del límite radica en su riqueza, complejidad y en que los aspectos cognitivos no pueden generarse únicamente a partir de la definición. En la enseñanza de las matemáticas, comúnmente se da mayor énfasis a ciertos aspectos del concepto de límite, por lo que los estudiantes podrían adquirir creencias implícitas sobre la forma en la que deben operar. Las diferentes investigaciones que se han llevado a cabo muestran que la mayoría de los estudiantes no dominan la idea de límite, incluso en una etapa más avanzada de sus estudios.

Tall y Katz (2014) utilizaron los marcos teóricos de la educación matemática y la psicología cognitiva para analizar las ideas de Cauchy sobre función, continuidad, límite e infinitesimal. Específicamente, sobre la convergencia de sucesiones muestran que algunos estudiantes tienen *(1) una vista asintótica en la que la sucesión se acerca, pero no alcanza el límite, (2) una sucesión que se puede agrupar en torno a uno o más puntos y (3) el concepto de límite moderno con un límite único.* Estos investigadores argumentaron que las primeras dos concepciones se pueden encontrar en entendimientos históricos y que están en concordancia con las ideas de Newton y Cauchy, respectivamente. Esto evidencia que lo que a menudo se considera en la literatura de investigación como conceptos erróneos de los estudiantes, se describe más adecuadamente como preconceptos que ocurren en etapas tempranas de su aprendizaje, que pueden aparecer en conceptos formales más ampliamente aceptados.

Investigaciones centradas en la introducción de definiciones de límite alternativas a la formal en el aula y el estudio de fenómenos asociados

Algunas definiciones del concepto de límite en el ámbito escolar pueden ser informales y, por tanto, presentar indicios de imprecisión y subjetividad, en otros casos, pueden ser formales y rigurosas, con un nivel mayor de abstracción, pero no tan apropiadas para los estudiantes de secundaria y de los primeros cursos universitarios (Blázquez, Gatica y Ortega, 2009; Blázquez, Ortega, Gatica, S y Benegas, 2006).

Existen propuestas alternativas a las definiciones informales y formales tradicionales del concepto de límite, que superan los vicios de imprecisión y subjetividad en el caso de las informales, y los excesos de rigor en las formales. En este sentido, Blázquez y Ortega (2002) presentaron una definición rigurosa, con menos formalismo y más dinámica para los estudiantes: *el límite de una función f en $x = a$ es L, si para cualquier aproximación K de L $(K \neq L)$, existe un entorno reducido de a tal que las imágenes de todos sus puntos, están más próximas a L que K.*

Kidron (2011) estudió las concepciones de una estudiante sobre la definición de asíntota horizontal, para esto le hizo reflexionar sobre la imagen conceptual de dicho concepto, a través de algunas tareas con una situación de conflicto. Esta situación la ayudó a reconstruir su conocimiento de la definición de asíntota horizontal como un límite.

Kidron y Tall (2014) abogaron por una mayor consideración, en la enseñanza del cálculo, de la distinción entre el infinito potencial y el infinito real del proceso límite. Para los estudiantes, el límite se ve a menudo en términos del infinito potencial del proceso en curso en lugar del límite fijo que se puede calcular con la precisión deseada. Entre sus conclusiones indican que la introducción del límite de una sucesión de funciones puede ser cognitivamente más fácil de comprender que los límites de una sucesión de números. En este estudio, además de mostrar la relación entre el infinito potencial del proceso y el infinito real del límite, se evidencia la transición de los polinomios de Taylor como aproximaciones a una precisión deseada hacia la definición formal de límite.

Con base en algunas investigaciones, como las mencionadas, puede notarse que la comprensión de dicho concepto es compleja y en consecuencia la enseñanza de este tema puede resultar complicada para los profesores de matemáticas. En este sentido, las investigaciones para determinar los significados que atribuyen los estudiantes al concepto de límite, permitirán una mejor comprensión del problema y brindar aportes a la enseñanza de este tema.

Posicionamiento conceptual

Este apartado se organizó en dos subapartados. El primero corresponde a algunos elementos del pensamiento matemático avanzado y el segundo presenta algunas ideas sobre los significados de los contenidos matemáticos escolares.

Pensamiento Matemático Avanzado

Esta investigación se inserta en la Didáctica del Análisis Matemático, específicamente en el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) que surge en 1985 en el seno del congreso del PME (Psychology of Mathematics Education), con el objetivo de profundizar en las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de nociones relacionadas con el cálculo infinitesimal. En el PMA destacan procesos cognitivos abstractos como definir, demostrar y formalizar, que, aunque no son procesos exclusivos de las matemáticas superiores, toman mayor relevancia en estos cursos. En las matemáticas básicas las descripciones se realizan con base en la experiencia, mientras que, en niveles más altos de las matemáticas, las propiedades de los objetos se construyen a partir de definiciones (Azcárate y Camacho, 2003).

En el 13 International Congress on Mathematical Education (ICME 13-2016) se hizo un análisis sobre el desarrollo de la investigación en el campo de la enseñanza y aprendizaje del cálculo, con un foco particular en los temas de investigación asociados al límite, derivada e integral, con una visión general sobre marcos teóricos utilizados, y evoluciones puntuales abordadas a través de las principales tendencias en el campo. También se brindó una descripción del estado de la enseñanza del cálculo tanto desde el punto de vista europeo como americano, y se incluyó una bibliografía ampliada con algunas de las referencias más importantes sobre este tema (Azcárate, Camacho-Machín, González, y Moreno, 2015; Bressoud, Ghedamsi, Martinez-Luaces, y Torner, 2016).

Significado de los conceptos matemáticos escolares

Para efectos de esta investigación, se asume el significado de un concepto introducido por Frege a finales del siglo XIX, que fue posteriormente adaptado y desarrollado al significado de un concepto matemático escolar considerando para su análisis tres componentes: estructura conceptual, sistemas de representación, y sentidos y modos de uso (Rico, 2012; Rico, 2013; Rico, 2016a, Rico, 2016b). Dentro de este marco, comprender el significado de un concepto matemático supone conocer su definición, sus tipos de representaciones, sus operaciones, relaciones, procedimientos y propiedades, así como su interpretación y aplicación en la resolución de tareas matemáticas. Esta perspectiva permitirá analizar cómo entienden y utilizan los estudiantes el concepto de límite. A continuación, se detallan las tres componentes del significado de un contenido matemático escolar.

Estructura conceptual

Se compone de los conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos y proposiciones, vinculados con un contenido matemático, junto con la estructura formal que proporciona referencia a los contenidos utilizados (Rico, 2012; Rico 2013). La estructura conceptual se caracteriza por tres componentes: campo conceptual, campo procedimental y campo actitudinal. Sin embargo, para efectos de este estudio sólo se consideran las dos primeras, y se detallan con base en lo expuesto por Rico (1997) y en Fernández-Plaza (2016).

El *campo conceptual* es el conjunto de conceptos y relaciones que refieren a un contenido matemático. Se distinguen tres niveles de conocimientos: *(a) los hechos* que se componen de términos, notaciones, convenios y resultados; *(b) los conceptos* que describen una regularidad de un conjunto de hechos y *(c) las estructuras conceptuales* que corresponde a un conjunto de conceptos y transformaciones relacionados entre sí.

El *campo procedimental* que refiere a las reglas, pautas, algoritmos o procedimientos utilizados para resolver una tarea matemática. Comprende tres niveles según la complejidad del contenido: *(a) las destrezas* que son el procesamiento ordenado de contenidos básicos, *(b) los razonamientos* que son el procesamiento de relaciones e inferencias entre conceptos y *(c) las estrategias* que implican el procesamiento de conceptos, relaciones y la conexión de razonamientos que operan dentro de una o varias estructuras conceptuales.

Sistemas de representación

Las representaciones aluden a los signos, notaciones simbólicas o gráficas para cada noción matemática que expresan los conceptos y procedimientos, así como sus relaciones, características y propiedades. Se pueden considerar dos grupos de sistemas de representación: las *simbólicas* que incluyen símbolos alfanuméricos, y las *gráficas* que aluden a figuras (Castro y Castro, 1997; Kaput, 1987; Lupiáñez, 2016).

Sentidos y modos de uso

Los sentidos y modos de uso de los conceptos matemáticos hacen referencia a las diversas situaciones a las que responde, a los problemas que resuelve y a los fenómenos que organiza, lo que permite complementar sus significados (Ruiz-Hidalgo, 2016). En esta investigación se consideran relevantes tres elementos: *(a) los términos y modos de uso* que son palabras que sintetizan la definición de un concepto matemático para brindarle sentido, corresponden a distintas interpretaciones del mismo; *(b) los contextos matemáticos* que están relacionados con las funciones y las cuestiones a las que responden los conceptos matemáticos y *(c) las situaciones* que corresponden a las circunstancias o condiciones en las que se aplica y trabaja el concepto matemático. Se consideran cuatro situaciones: las personales, las laborales (y educativas), las sociales y las científicas (OCDE, 2012).

Metodología

La investigación es cualitativa de carácter exploratorio y descriptivo. Es exploratoria debido a que no se conocen antecedentes de estudios similares en Costa Rica y descriptiva ya que se pretende determinar los significados que le atribuyen al concepto de límite de una función en un punto los sujetos de investigación, así como su relación con los conceptos de continuidad y derivabilidad, sin emitir juicios de valor.

Instrumentos para la recolección de la información

En esta investigación la información se recolectó mediante cuatro cuestionarios. El cuestionario 1 es de tipo semántico y consta de cinco tareas; se administró a los estudiantes durante la enseñanza de límites con el propósito de determinar la forma en que entendían esta noción, sus representaciones y sus aplicaciones. El cuestionario 2 se aplicó a sus profesores y constaba de las mismas tareas del cuestionario 1, salvo en sus indicaciones. El cuestionario 3 se aplicó a los estudiantes y tiene dos partes: la primera parte, que consta de las mismas tareas del cuestionario 1, para identificar si los sujetos muestran evolución o cambios en las concepciones del concepto de límite de una función y una segunda parte, que consta de tres tareas nuevas de desempeño, para determinar los razonamientos empleados y el vínculo del concepto de límite con los conceptos de continuidad y derivación. El cuestionario 4 se aplicó a los profesores y es una adaptación del cuestionario 3 en donde se incluyen únicamente las tres tareas de desempeño. El propósito de los cuestionarios 2 y 4 administrados a los docentes de los grupos, es identificar las similitudes y diferencias que podrían existir entre el significado que expresan los estudiantes para el concepto de límite con el que les brindaba su profesor.

Descripción de las tareas del cuestionario 1 y expectativas de respuesta de los estudiantes para cada una de ellas

En la *tarea 1* denominada *definición del límite* se solicitó a los estudiantes que escribieran la definición que les había dado su profesor, se les sugirió que la transcribieran de su cuaderno para que fuera lo más fiel posible. Dado que no se utiliza un libro de texto oficial, esperábamos diferentes propuestas de definición. En la *tarea 2* llamada *interpretación de la definición* se solicitó a los estudiantes una explicación con sus propias palabras del significado de la definición de límite considerada en la tarea 1; con esto se pretendía conocer, en términos generales, como entendían dicho concepto y los aspectos o características que resaltaban. En la *tarea 3* denominada *representaciones* se les solicitó que realizaran dibujos, esquemas, figuras o lo que consideraran pertinente para representar la definición de límite de la tarea 1 para determinar qué elementos resaltaban. En la *tarea 4* llamada *aplicaciones* se les pidió que mencionaran algunas aplicaciones que podrían tener los límites; la pregunta era abierta y por lo tanto se esperaba que los estudiantes indicaran aplicaciones en diferentes áreas o contextos no necesariamente matemáticos. Finalmente, en la *tarea 5* llamada *significado de la palabra límite fuera de la matemática* se les indicó que escribieran otros significados, fuera del matemático, de la palabra límite, para esto podían usar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que consideraran necesario; con esta tarea se pretendía conocer cuáles eran los significados que le atribuían los estudiantes a la palabra límite fuera del contexto matemático.

Recolección de la información
La información se ha recolectado en dos fases con estudiantes del curso MAT 002 Cálculo I durante el primer

semestre del 2018 en 15 grupos de 35 estudiantes en promedio, de la Universidad Nacional de Costa Rica y sus respectivos profesores. Se aplicaron en total cuatro cuestionarios de respuesta abierta; en la *fase 1 (durante la enseñanza del límite)*, dos de ellos, el primero a los 421 estudiantes que asistieron a clases y el segundo a los 12 docentes de los respectivos grupos, tres de ellos tenían dos grupos a cargo; en la *fase 2 (posterior a la enseñanza del límite)*, los restantes dos cuestionarios, el tercero a los 256 estudiantes que asistieron a clases y el cuarto a los 12 docentes de cada uno de los grupos.

Sujetos de investigación

Los sujetos de esta investigación son los 421 estudiantes de la fase 1 y los 256 estudiantes de la fase 2. Estaban matriculados en las carreras de Biología, Cartografía Digital, Enseñanza de las Ciencias, Economía, Administración, Enseñanza de la Matemática, Comercio y Negocio Internacionales, Ingeniería en Química Industrial, Ingeniería en Gestión Ambiental, Ingeniería en Sistemas de Información, Ingeniería en Ciencias Forestales, Ingeniería en Topografía Catastro y Geodesia, Ingeniería en Bioprocesos Industriales. Además, no tenían ninguna formación previa en el tema de límites, debido a que este tema no se estudia en la educación secundaria de Costa Rica ni en el curso MAT 001 Matemática General (curso previo a cálculo I para algunas carreras) que aborda los contenidos de álgebra básica, ecuaciones e inecuaciones lineales, elementos básicos de geometría analítica, funciones reales de variable real y trigonometría básica.

Método para el análisis de la información

La información de los cuestionarios se analizará con base en el análisis de contenido, que posibilita la codificación, la categorización, la comparación y la conclusión en instrumentos de respuesta abierta (Cohen, Manion, y Morrison, 2007). Se usaron las categorías de manera inductiva y deductiva, para cada una de las tareas relacionadas con la concepción del límite, en el caso de las deductivas se utilizaron las planteadas por Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico y Castro (2013). Asimismo, para el análisis de las tareas de desempeño que involucran al límite, la continuidad y la derivabilidad, se propondrán categorías a priori con base en la revisión de literatura y se determinarán si existen categorías emergentes. De ser necesario, se hará uso de alguna técnica estadística de comparación que permita determinar semejanzas y diferencias entre características de grupos.

Resultados

Al ser una investigación en curso, se presenta una síntesis de los resultados preliminares de la muestra de 38 estudiantes de las carreras de Biología e Ingeniería en Química Industrial; sobre el significado que le atribuyen al concepto de límite finito de una función en un punto. Los resultados fueron obtenidos de la aplicación del cuestionario 1 y están organizados por las 5 tareas matemáticas que lo componen.

La tarea 1 tuvo un rol importante para la consecución de las tareas 2, 3 4 y 5 del cuestionario 1. Concretamente, se tuvo que, de los 38 sujetos de investigación, 22 (el 58%) escribieron una definición completa e informal dada por el profesor, un estudiante la escribió incompleta e informal, 15 estudiantes (el 39%) no anotaron ninguna definición y ningún estudiante transcribió una definición formal. A modo de ejemplo, se presenta la definición escrita por el sujeto de investigación EBM0125:

> Sean f una función de variable real, $a, L \in \mathbb{R}$. Se dice que el límite de f en , a es L sí y solo sí cada vez que las preimágenes de f son cercanas a a, entonces las correspondientes imágenes son cercanas a L. Simbólicamente se escribe
> $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Nótese que el sujeto EBM0125 escribió la definición de límite de una función en un punto que les dio su profesor, de forma completa e informal (en nuestro estudio la entendemos como informal, porque no usa la definición convencional $\varepsilon - \delta$).

En la tarea 2 se tiene que para la definición del límite finito de una función en un punto, de los 38 estudiantes: 28 (el 74%) señalaron el límite como un *objeto*; 29 (el 76%) distinguieron el límite como un *proceso*; 10 (el 26%) refirieron en su definición a las *variables x e y*; 6 (el 16%) resaltaron *descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función;* 12 (el 32%) resaltaron *coordinación entre ambas variables*; 13 (el 34%) evidenciaron *símbolos matemáticos y notaciones;* 6 (el 16%), refirieron a un *sistema de representación distinto al numérico o simbólico;* 7 (el 18%), mostraron la *vinculación del límite con la imagen*; 13 (el 34%) evidenciaron la categoría *términos;* 12 (el 32%) expresaron *condiciones de lateralidad y doble convergencia*, 3 (el 8%), destacaron *propiedades matemáticas*, y 8 (el 21%) mostraron *aspectos estructurales de alcanzabilidad y rebasabilidad*. A modo de ejemplo, se presenta la definición escrita por el sujeto de investigación EBH0309:

> Para una función real de variable real, cuando se vayan acercando los números a una preimagen, se van acercando a una imagen, esta imagen es el límite si es la misma cuando se acerca tanto por derecha como por izquierda de la preimagen.

Este sujeto evidencia la presencia de la categoría "referencia a las variables" pues aludió a la variable independiente como *preimagen* y a la variable dependiente como *imagen*, también muestra la categoría "coordinación entre las variables *x* e *y*" pues se evidencia convergencia de la variable dependiente en relación con la convergencia de la variable independiente, evidencia la categoría "límite como proceso" debido a que alude a nociones dinámicas como *cuando se vayan acercando los números*, muestra la categoría "límite como objeto" cuando alude al límite como algo fijo y estático (imagen), muestra la categoría "vinculación entre el límite y la imagen" debido a que relaciona el límite con la imagen y finalmente, muestra la categoría "condiciones de lateralidad y doble convergencia" pues indica que *si es la misma cuando se acerca tanto por derecha como por izquierda de la preimagen.*

En la tarea 3 para la representación del límite finito de una función en un punto, de los 38 sujetos: 5 (el 13%) señalaron el límite como un *objeto*; 16 (el 42%) distinguieron el límite como un *proceso*; 6 (el 16 %) mostraron *descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función;* 15 (el 39%) resaltaron *coordinación entre ambas variables*; 29 (el 76%) evidenciaron *símbolos matemáticos y notaciones;* 11 (el 29%) mostraron la *vinculación del límite con la imagen*; 11 (el 29%) mostraron *condiciones de lateralidad y doble convergencia*, 15 (el 39%) evidenciaron *propiedades matemáticas*, 5 (el 13%) hicieron una *tabla de valores*, y 3 (el 8%) evidenciaron en la representación, *aspectos estructurales de alcanzabilidad y rebasabilidad*. A modo de ejemplo, se presenta la representación realizada por el sujeto de investigación EBM1313.

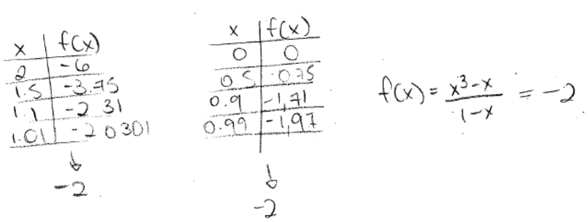

Figura 1. Representación de EBM1313.

Nótese que el sujeto EBM1313 muestra la categoría "tabla de valores" debido a como organiza los números, evidencia la categoría "límite como objeto" pues indica que el valor es *-2*, exhibe la categoría "límite como proceso" ya que refiere al límite de manera procesual a modo de aproximaciones tanto para la variable independiente como para la dependiente, presenta la categoría "coordinación entre ambas variables" debido a que se evidencia convergencia de $f(x)$ en relación con la convergencia de x, expone la categoría "símbolos matemáticos y notaciones" porque usa números y letras para representar las nociones y finalmente, muestra la categoría "condiciones de lateralidad y doble convergencia" pues evidencia que tanto por izquierda como por derecha de *1* el límite debe ser *-2*.

En la tarea 4 sobre las aplicaciones del límite, de los 38 estudiantes: solo 13 sujetos (el 34%) indicaron aplicaciones. Específicamente, 4 indicaron como aplicaciones *gráficas matemáticas,* 3 *estadísticas* y 2 *economía*. Las aplicaciones denominadas *astronomía, ingeniería, física, arquitectura, convergencia de una función, concepto de derivada, industria y medicina* fueron mencionadas una vez por un sujeto, no necesariamente el mismo. A modo de ejemplo, se presenta la respuesta brindada por el sujeto de investigación EBM0927:

Para estadísticas o gráficas matemáticas.

Se puede observar en el ejemplo anterior la generalidad de las aplicaciones mencionadas.
En la tarea 5 para los significados de la palabra límite fuera de la matemática de los 38 sujetos: 37 (el 97%) brindaron otro significado del límite fuera de la matemática. Puntualmente, 16 (el 42%) aludieron al límite como *barrera*, 11 (el 29%), refirieron al límite como *valor extremo*, 9 (el 24%) mencionaron el límite como *frontera*, 5 (el 13%) citaron el límite como una noción *no alcanzable o no rebasable*, 4 (el 11%) como un *impedimento*, 3 (el 8%) hicieron referencia al límite como la noción de *fin*, y 1 (el 3%) aludió al límite como una noción *alcanzable*, al igual que 1 (el 3%) lo indicó como la noción de *hueco.*
A modo de ejemplo, se presenta la respuesta brindada por el sujeto de investigación EQH0228:

Un tope. Algo que no nos permite seguir. Algo que demarca una división.

Se percibe como este sujeto alude al límite como barrera y como frontera.
Los resultados preliminares de nuestro estudio están estrechamente vinculados con el marco teórico, debido a que en la tarea 2 los sujetos debían explicar con sus propias palabras la definición de límite, poniendo de manifiesto concepciones, propiedades y conceptos dando lugar a la *estructura conceptual*, en la tarea 3 los sujetos debían representar el concepto de límite, para lo que usaron signos, símbolos, notaciones y gráficas, de esta manera se evidencian *los sistemas de representación* y finalmente, en las tareas 4 y 5 debían indicar que aplicaciones tenían los límites y el significado de la palabra límite fuera de la matemática, donde resaltan *los sentidos y modos de uso*. Estos tres aspectos nos informan del significado que tienen los sujetos de investigación sobre el concepto de límite.

Conclusiones

Esta primera aproximación al tema ha permitido detectar aspectos sobre los significados atribuidos por una parte de los estudiantes de Biología e Ingeniería en Química Industrial sobre el concepto de límite de una función en un punto durante su enseñanza. Entre las principales conclusiones de este trabajo se resaltan la concepción dual objeto/proceso, la coordinación entre las variables independiente y dependiente, las condiciones de lateralidad y doble convergencia que atribuyeron los estudiantes al límite. La representación gráfica fue la más utilizada, y los sentidos que atribuían al límite fuera de la matemática eran en su mayoría *valor extremo*, *barrera*, *noción no alcanzable o no rebasable*, *frontera*, y en menor medida, *fin*, *alcanzable, impedimento* y *hueco*.

Consideramos que este trabajo constituye un aporte a la investigación en la Didáctica del Análisis Matemático, específicamente al Pensamiento Matemático Avanzado, en la construcción de instrumentos y categorías de análisis para el estudio de los significados del concepto de límite que le atribuyen estudiantes universitarios en cursos de cálculo diferencial. Asimismo, los instrumentos, las categorías de análisis y la metodología empleada en esta investigación podrían servir de insumo para realizar investigaciones sobre el estudio de los significados de otros conceptos del Análisis Matemático.

Por otra parte, también hace una contribución a la enseñanza del concepto de límite mediante la reflexión sobre los significados que tienen los estudiantes universitarios de dicho concepto, lo que puede orientar en el planteamiento de estrategias metodológicas de enseñanza que consideren estos significados y de este modo se favorezca su aprendizaje en los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X* (2), 135- 149.

Azcárate C., Camacho-Machín, M., González M. T. y Moreno, M. (Coords.) (2015). *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM*. La Laguna, España: Universidad de la Laguna.

Blázquez, S. y Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula, 10*, 119-135.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO*, 30, 67-82.

Blázquez, S., Gatica, N., y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *La Gaceta de la RSME*, *12*(1), 145- 168.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(2), 189-209.

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V. y Torner, G. (2016). *Teaching and learning of calculus.* Springer.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En Rico,L. (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (sixth edition). London: Routledge.

Contreras, A. y García, M. (2015). Investigaciones sobre límites. En M. Camacho-Machín, M. González y M. Moreno (Eds.), *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM*. La Laguna, España: Universidad de La Laguna, servicio de publicaciones.

Cornu, B. (2002). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* (pp. 153–166). doi:10.1007/0-306-47203-1_10

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. y Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA*, *7*(3), 117-130.

Fernández-Plaza, J. (2016). Análisis del contenido. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 103–118). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Kaput, J. (1987). Representations Systems and Mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Kidron, I. (2011). Constructing knwledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(6), 1261-1279.

Kidron, I. (2014). Calculus teaching and learning. *Encyclopedia of mathematics education*. (pp. 69-75). Dordrecht: Springer. Doi: 10.1007/978-94-007-4978-8.

Kidron, I., & Tall, D. (2014). The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics, 88,* 183–199.

Lupiáñez, J. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 119–137). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

OCDE (2012). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias.* Madrid: Santillana.