ANÁLISIS DE LOS ARGUMENTOS DADOS POR DOCENTES EN FORMACIÓN A UNA TAREA SOBRE DERIVADAS

María Fernanda Vargas, José Antonio Fernández-Plaza y Juan Francisco Ruiz-Hidalgo

En este trabajo analizamos los argumentos dados por docentes en formación al justificar la veracidad de enunciados referidos a la derivabilidad de una función en un punto. Empleando una adaptación del modelo de Toulmin, nos centramos en la garantía o justificación dada y en si se presenta respaldo. Identificamos el elemento matemático en el que se basa la justificación, cómo se emplea y la forma de representar el argumento. Los resultados revelan que, para argumentar se recurre principalmente a resultados matemáticos o reglas utilizados muchas veces sin respaldo. Asimismo, detectamos argumentos no válidos, principalmente por no considerarse las condiciones necesarias para la derivabilidad.

Términos clave: Argumentación matemática; Derivada de una función; Docentes en formación; Modelo de Toulmin

Analysis of Arguments Given by Teachers in Training to a Derivative Task

In this paper, we analyse the arguments given by teachers in training by justifying the truthfulness of statements referring to the derivability of a function at one point. Using an adaptation to Toulmin's model, we focus on the guarantee or justification given and whether support is presented. We identify the mathematical structure on which the justification is based, how it is used and how the argument is represented. Findings reveal that, to argue, mathematical results or rules used are often used without backing. Likewise, we detect invalid arguments, mainly because the necessary conditions for derivability are not considered.

Keywords: Derivative; Mathematical argumentation; Teachers in training; Toulmin model

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2020). Análisis de los argumentos dados por docentes en formación a una tarea sobre derivadas. *PNA 14*(3), 173-203.

Diversas investigaciones han evidenciado la dificultad que supone comprender el concepto de derivada tanto para estudiantes como docentes (e. g., Bingolbali y Monaghan, 2008; Hähkiöniemi, 2008). En el alumnado, la comprensión de la derivada sigue siendo "uno de los mayores desafíos de la educación matemática a nivel universitario y es una constante preocupación para las instituciones educativas de nivel superior, pues repercute en bajas calificaciones, altos índices de reprobación y abandono de los cursos de Cálculo" (Fuentealba, Badillo y Sánchez-Matamoros, 2018, p. 2). En el profesorado, se ha puesto de manifiesto que la comprensión y la percepción que tengan sobre un contenido matemático influyen en la instrucción que da y, de cierta manera, en el entendimiento que adquieren sus estudiantes (Byerley y Thompson, 2017; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2013).

Como parte de una investigación más amplia en la que analizamos el significado que expresa el profesorado de matemáticas sobre el concepto de derivada, en este trabajo nos centramos en los docentes en formación, analizando cómo son los argumentos que brindan al justificar la veracidad o falsedad de cuatro enunciados sobre la derivabilidad de una función en un punto. Desde nuestra perspectiva teórica, los razonamientos son uno de los elementos que componen el significado de un contenido matemático escolar (tabla 1), y aunque un argumento escrito no manifiesta el razonamiento completo empleado, sí representa un buen resumen o aproximación de este (Lithner, 2008).

En general, se considera que los argumentos juegan un papel crucial en la construcción del conocimiento y razonamiento científico (Metaxas, Potari y Zachariades, 2016). Al estudiar los argumentos matemáticos proporcionados por sujetos, se puede tener una aproximación de la comprensión y percepción que éstos tienen sobre los contenidos matemáticos (Koleza, Metaxas y Poli, 2017), en este caso particular, sobre la derivada. Consideramos que este acercamiento a los argumentos es interesante ya que se sabe poco sobre la forma en la que concibe el profesorado de secundaria los contenidos que enseñan (Byerley y Thompson, 2017).

La importancia de la argumentación se manifiesta, por ejemplo, en que tanto el *National Council of Teachers of Mathematic* (NCTM) como el *Programme for International Student Assessment* (PISA) consideran como competencia fundamental el presentar argumentos válidos. De esta forma, creemos que los docentes deben ser capaces de analizar y validar los argumentos dados por sus estudiantes, ya que para evaluar las soluciones que estos dan es necesario que puedan seguir la argumentación que brindan (Philipp, 2018). Sin embargo, tal como aseguran Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez (2014), es una capacidad que, pese a su relevancia, se le ha otorgado poca importancia en estudios internacionales como el *Teacher Education and Development Study in Mathematics* (TEDS-M) donde se considera la argumentación como un subdominio del conocimiento pedagógico del contenido (Tatto et al., 2008).

Los argumentos se han estudiado tanto en estudiantes como en docentes (e. g., Chua, 2017; Fahse, 2017; Selden y Selden, 2003) y para su estudio se han considerado distintos esquemas y modelos (e. g., Harel y Sowder, 1998; Lithner, 2008; Walton, Reed y Macagno, 2008). En nuestro caso, y siguiendo la línea de un trabajo realizado previamente (Vargas, Fernández-Plaza y Ruiz Hidalgo, 2019), consideraremos el argumento desde la perspectiva del modelo de Toulmin (1958), que es un marco ampliamente empleado.

Abordamos así una investigación cualitativa cuyo objetivo general es describir los argumentos empleados por docentes en formación al justificar o refutar la veracidad de cuatro enunciados sobre la derivabilidad de una función en un punto. Se consideran para ello cuatro objetivos específicos:

- Determinar la validez y el respaldo de los argumentos dados por los futuros docentes.
- Identificar los aspectos matemáticos empleados como base de los argumentos dados.
- Establecer la forma lógica o la estructura de los argumentos empleados.
- Determinar el modo en el que los argumentos dados por docentes en formación son representados.

MARCO TEÓRICO

Como señalamos anteriormente, este trabajo forma parte de una investigación más amplia centrada en el significado que expresa el profesorado sobre el concepto de derivada. En este apartado describiremos brevemente el marco general en el que nos situamos y que posteriormente nos permitirá el análisis de los argumentos.

Significado de un contenido matemático escolar

El significado de un concepto en educación matemática ha sido ampliamente discutido (Skovsmose, 2005). De los enfoques propuestos al respecto, adoptamos el que plantea Frege (1996), en el que el significado de un concepto, desde una perspectiva semántica, está determinado por tres elementos: signo, sentido y referencia. Esta idea ha sido retomada y adaptada por Rico (2012, 2013) considerando que el significado de un contenido matemático escolar lo constituyen su estructura conceptual, los sistemas de representación, y los sentidos y modos de uso.

En este marco, cada uno de los tres componentes del significado se divide en un sistema de categorías y elementos que permiten su análisis y estudio (Rico, 2012, 2013), las cuales se muestran en la tabla 1. Para la caracterización de la categoría estructura conceptual, el marco del significado de un contenido matemático escolar retoma y adapta tres campos o categorías generales: campo conceptual, campo procedimental y campo actitudinal (Bell, Costello y

Küchemann, 1983; Hiebert y Lefevre, 1986), los cuales han sido objeto de estudio e interés a lo largo de los años (Castro, Prat y Gorgorió, 2016).

Tabla 1
Categorías y componentes del significado de un contenido matemático escolar

Estructura conceptual			Sistemas de representación	Sentido y modos de uso
Campo conceptual	Campo procedimental	Campo actitudinal		
Hechos Conceptos Estructuras	Destrezas Razonamientos Estrategias	Actitud emocional Aspecto moral y normativo Aspecto ético	Verbal Simbólico Numérico Gráfico Tabular	Modo de uso Contexto Situación

El foco de esta investigación está situado en la estructura conceptual, particularmente en el campo procedimental, y más específicamente en los razonamientos que utilizan los docentes en formación respecto a la derivada, es decir, cómo procesan y entienden dicha noción.

Para Lithner (2008) el razonamiento se define como la línea de pensamiento adoptada para traducir afirmaciones y llegar a conclusiones en la resolución de tareas, mencionando que esta forma de proceder no se basa necesariamente en la lógica formal, por lo que no se restringe a demostraciones formales. Además, señala que esta línea de pensamiento puede ser incluso incorrecta siempre que, para quien razona, existan razones válidas que lo respalden. Entendemos por argumento ese sustento o parte del razonamiento que apunta a convencer que el razonamiento es apropiado (Lithner, 2003).

La argumentación y su análisis

La argumentación matemática es un concepto frecuentemente relacionado con la prueba o demostración. De hecho, en algunas ocasiones son usados como sinónimos, aunque hay quienes afirman que son nociones completamente distintas (Reid y Knipping, 2010).

Duval (1990) considera que la argumentación no constituye necesariamente una prueba, sino que se trata más bien de una justificación sobre una afirmación o tesis, siendo el argumento lo que se usa para refutar o afirmar la proposición y que este puede tratarse de una definición, un teorema, un ejemplo, entre otros. De manera similar, Balacheff (2008) considera que el argumento es un recurso que se emplea para convencer sobre la posición que se tiene de algo, incluso aunque no sea cierto, mientras que una prueba matemática es más estructurada y requiere de la aceptación por parte de la comunidad matemática.

Tal como indicamos anteriormente, para el análisis asumimos un modelo ampliamente utilizado, el modelo de Toulmin (1958), en el cual se establece que en un argumento se involucran 6 elementos (ver figura 1): afirmación (*claim*), datos (*data*), garantía o justificación (*warrant*), respaldo (*backing*), cualificador modal (*modal qualifier*) y refutación (*rebuttal*). Emplearemos el modelo actualizado y específicamente adaptado para la educación matemática expuesto en Reid y Knipping (2010), en el que se contempla únicamente los cuatro primeros elementos, entendidos de la siguiente manera:

- Afirmación: conclusión, tesis o hipótesis que se defiende.
- Datos: evidencia, hechos o prueba que apoyan la afirmación.
- Garantía (justificación): regla o teoría que da paso de los datos a la afirmación.
- Respaldo: apoyo a la garantía o justificación dada, se emplea para dar fuerza a la justificación o clarificarla. Por ejemplo, el argumento dado puede ser un teorema conocido que justifica la afirmación. Pero además de esto, se puede ejemplificar o bien justificar por qué el teorema es aplicable.

La elección de este modelo se debe a que nuestro interés es la justificación dada en cada una de las tareas y el respaldo que se brinda. De esta forma, para este trabajo, los enunciados de las tareas dadas a los docentes en formación representan la afirmación que deben justificar o refutar; en la cual se brindan ciertos datos. Por lo tanto, nuestro objetivo de describir los argumentos se concreta en analizar las justificaciones dadas en cada caso y el respaldo que se brinda a la misma (ver figura 1).

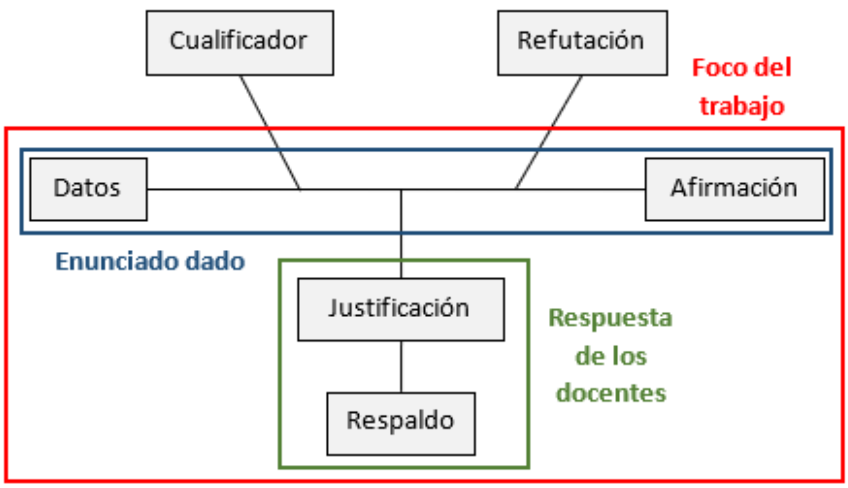


Figura 1. Modelo de Toulmin

Para el análisis de estas justificaciones, consideramos un esquema similar al de Stylianides (2007), en el que se contemplan tres componentes: elemento matemático empleado, modo de argumentar (cómo lo emplea) y el modo de representarlo. Estas componentes son descritas a continuación.

Elemento matemático empleado
Para el análisis de este primer componente, tomaremos en consideración la noción de significado de un contenido matemático escolar (Rico, 2012, 2013) antes expuesta. En ella, la estructura conceptual se entiende como esa amplia gama de conceptos, axiomas, teoremas, procedimientos y demás estructuras que se involucran dentro de un contenido matemático. De esta forma, prestaremos atención al elemento matemático en el que se basa el argumento, ya sea una definición, un axioma o un teorema, entre otros.

Modo de argumentar
Solow (2006) plantea una serie de técnicas empleadas al realizar una demostración matemática, las cuales pueden aplicarse también a argumentos. El autor asegura que las demostraciones se fundamentan en un método al que denomina *retroceder-avanzar,* ya que al demostrar una implicación de la forma $A \Longrightarrow B$, donde A es la hipótesis y B lo que queremos concluir, tenemos dos opciones. Preguntarnos ¿cómo o cuando puedo demostrar que B es verdadero? Es decir, iniciar de atrás hacia adelante (retroceder), o bien, asumir que A es verdadero y preguntarnos, ¿qué implica que A sea verdadero? Obtener de esa forma otra proposición y así sucesivamente hasta obtener B(avanzar).

En ambos casos, Solow (2006) considera que la clave está en la pregunta que nos hacemos y la respuesta que damos a la misma. Además, señala que para responder a esta podemos hacer uso de definiciones o bien de resultados ya establecidos, los cuales pueden utilizarse mediante una implicación lógica. En la tabla 2 se muestran los tipos de implicaciones que se pueden hallar. No todos los enunciados que se utilizan son verdaderos, estos son para ilustrar.

Tabla 2
Tipos de implicaciones lógicas

Implicación lógica	Escritura	Ejemplo
Directa	$A \Longrightarrow B$	Si una función es derivable en un punto, esa función es continua en dicho punto.
Recíproca	$B \Longrightarrow A$	Si una función es continua en un punto, entonces es derivable en ese punto.
Contraria	$\neg A \Longrightarrow \neg B$	Si una función no es derivable en un punto, entonces no es continua en ese punto.
Contrarrecíproca	$\neg B \Longrightarrow \neg A$	Si la función no es continua en un punto, entonces no es derivable en ese punto.

Así, prestaremos también atención a la implicación empleada al involucrar los elementos matemáticos en la justificación, esto nos permitirá analizar las distintas formas de utilizar un mismo elemento matemático y la influencia que esto pueda tener en la justificación presentada. Dado que el tipo de implicación dependerá de la que se considere como directa, en el apartado de resultados se establece la que se toma en consideración al definir las demás.

Modo de representación del argumento

Este segundo componente tiene que ver con la forma en la que el argumento es representado. Entre las distintas clasificaciones de pruebas y argumentos, en este trabajo seguimos la propuesta de Reid y Knipping (2010) quienes atienden a la clasificación hecha por otros autores y además se centran en los sistemas de representación. Los autores consideran cuatro grandes categorías de argumentos, los cuales a su vez derivan en distintas subcategorías. Por cuestión de espacio y dado que en nuestro trabajo no se detectó mucha variedad al representar los argumentos, describimos solamente algunas de ellas.

- Empíricos: son aquellos basados en un ejemplo específico y no necesariamente representativo de la situación. Se queda solo en un caso concreto. Algunas de sus subcategorías son: tipos (mostrar diferentes casos o ejemplos) y perceptual (un dibujo de un caso particular).
- Genéricos: en este caso también se recurre a ejemplos, pero aquí se trata de un caso representativo a una clase como pictórico (un dibujo representativo).
- Simbólicos: argumentos y pruebas dados utilizando palabras y simbología matemática, como narrativo (emplea principalmente palabras) o simbólicos (emplean más símbolos, aunque se apoyan también en palabras).
- Formales: son argumentos presentados de manera sintáctica, usando la menor cantidad de palabras posibles, son argumentos que constituyen una prueba, la cual se escribe mediante símbolos que fuera de un contexto matemático probablemente no significan nada.

La clasificación se basa en el uso que dan a los sistemas de representación, pero puede apreciarse cómo las categorías contemplan pruebas de menos a más formales. Así, por ejemplo, tanto los argumentos simbólicos como los formales emplean el sistema de representación simbólico, pero su nivel de formalidad es muy distinto. En los simbólicos no necesariamente se trata de una prueba formal, de hecho, puede incluir palabras como complemento, mientras que los argumentos formales se refieren a pruebas y demostraciones matemáticas que se caracterizan por ser muy sintácticas, evitando el uso de palabras. En el apartado de resultados ejemplificamos esto.

METODOLOGÍA

Abordamos una investigación cualitativa de naturaleza descriptiva, la cual se llevó a cabo con estudiantes del Máster Universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de la Universidad de Granada. Para la recolección de datos diseñamos un cuestionario semántico (Vander-Klok, 2014), este tipo de instrumento tiene por objetivo "recoger palabras, términos, símbolos, gráficas, descripciones, explicaciones y otras notas que expresan y representan un modo de apropiación por cada sujeto del concepto considerado" (Martín-Fernández, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2016, p. 56). Con el cuestionario pretendimos identificar las nociones, correctas o no, que expresan los profesores en formación respecto a la noción de derivada, ya que no era intención del estudio, ni la finalidad de los cuestionarios semánticos, realizar una valoración o evaluación del conocimiento que tienen al respecto.

Para ello, diseñamos preguntas de respuesta abierta en las que los futuros profesores evidenciaran su manera de entender los elementos básicos de la derivada, como definición, requisitos, condiciones y algunos teoremas. Para su construcción consideramos oportuno analizar la definición, interpretación, notación, principales aspectos y teoremas que abordan los libros de texto al introducir el concepto. Para ello revisamos el libro de Burgos (2007) y el de Spivak (2012), siendo estos los más sugeridos en las guías docente de los cursos de cálculo de las universidades españolas (Herrera, Velasco y Ruiz-Hidalgo, 2019). Tras el análisis y tomando en consideración los distintos componentes y elementos del significado que nos brinda nuestro marco teórico, diseñamos tres tareas o preguntas de respuesta abierta, cuyo enfoque y finalidad era el siguiente:

- Tarea 1: se les pidió a los participantes dar su definición de derivada de una función en un punto.
- Tarea 2: tarea de verdadero o falso, en la que los futuros docentes debían justificar la veracidad o falsedad de enunciados dados sobre la derivada de una función en un punto (en el apartado de resultados se muestran los enunciados).
- Tarea 3: los participantes debían mencionar aplicaciones de la derivada de una función en un punto.

En este trabajo mostramos los resultados del análisis realizado a la tarea 2. Con la intención de que el cuestionario no resultara muy extenso para los participantes, realizamos dos versiones de este, llamadas A y B. La tarea 2, de verdadero o falso, se consideró en ambas versiones del cuestionario, en cada versión se incluyeron dos enunciados distintos, por lo que en total analizamos 4 enunciados. La finalidad de dichos enunciados era ver qué aspectos del significado de la noción de derivada involucraban los docentes en formación al justificar la derivabilidad o no de una función en un punto.

La aplicación del instrumento se desarrolló en dos momentos, uno durante el curso académico 2016/2017 y otro en el 2017/2018, contándose con la participación total de 98 estudiantes para profesor, 43 respondieron al cuestionario A y 55 al B. Para el análisis de las respuestas obtenidas se empleó el método del análisis de contenido (Cohen, Manion y Morrison, 2011). Trascribimos cada una de las respuestas obtenidas, identificando a los distintos participantes por la letra

A o B, según la versión del cuestionario que respondieron, y un número del 1 al 43 o del 1 al 55 según fuera el caso.

Realizamos un análisis detallado de cada uno de los argumentos dados a los distintos enunciados. Primero identificamos cuántos habían acertado la veracidad del enunciado, es decir, cuántos afirmaban que era verdadero y cuántos decían que era falso. Seguidamente determinamos y agrupamos los argumentos para saber cuántas justificaciones distintas dieron en cada enunciado. Para diferenciarlos y referirnos a ellos utilizamos la codificación que se resume en la tabla 3.

Tabla 3

Codificación utilizada para identificar los distintos argumentos

Número de enunciado	Verdadero o falso	Número de argumento
Un número del 1 al 4 que diferencia los enunciados analizados	Colocamos una V o F según si el argumento había sido utilizado para justificar la veracidad o falsedad del enunciado	En cada enunciado se agruparon las justificaciones dadas para respaldar la veracidad o falsedad enlistándolos e identificándolos con un número

Por ejemplo, el código 2.F.3, representa al argumento 3 de lista de las justificaciones presentadas para respaldar la falsedad del enunciado 2 (ver primera columna de las tablas 4, 6, 8 y 10). Una vez hecho esto, procedimos a determinar: la validez de la justificación y el respaldo presentado en cada uno de los casos; el elemento matemático en el que se basa la justificación y su modo de uso; y el modo de representar el argumento, es decir, el tipo de argumento.

Aclaramos que nuestro foco de estudio es la estructura de la argumentación empleada por los docentes en formación, con independencia de la validez para sostener la veracidad o falsedad de cualquier enunciado, es decir, los tres aspectos estudiados los contemplamos tanto en aquellos argumentos válidos como en los que no lo son.

Resultados

A continuación, presentamos los principales resultados obtenidos de cada uno de los enunciados de forma individual.

Primer enunciado: recta tangente vertical

El primer enunciado del cuestionario A es el que se presenta en la figura 2. De los 43 participantes hubo 5 que no contestaron nada, por lo que analizamos un total de 38 respuestas.

1. ( ) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, tiene por gráfica la que se muestra en la figura 1. La recta m es tangente a la curva en $x = 1$; de esta forma es fácil asegurar que f es derivable en ese punto.

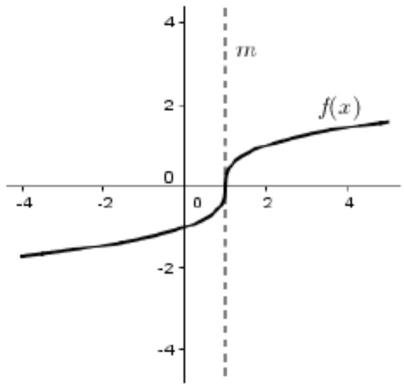


Figura 1. Gráfica de f

Figura 2. Primer enunciado del cuestionario A

En cuanto a la veracidad o falsedad, 9 participantes indicaron que el enunciado era verdadero, aunque uno no dio justificación; mientras que 29 aseguraron que era falso, 2 de los cuales no justificaron. Los argumentos dados fueron muy variados, en la tabla 4 se puede observar un resumen de las respuestas obtenidas.

Tabla 4
Argumentos dados al primer enunciado

Código*	Justificación	Frecuencia
1.V.1	Determinar algebraicamente $f´(x)$, pero algunos errores en su cálculo lo llevan a concluir que $f´(1) = 0$, afirmando entonces que la función es derivable.	3
1.V.2	Calcular los límites laterales de la función derivada, cuando x se aproxima a 1, concluyendo que al ser iguales a $+\infty$, la función es derivable.	1
1.V.3	En $x = 1, f$ cambia de signo.	1
1.V.4	Probar que la función es continua.	1
1.V.5	Al ser una función continua y tener recta tangente en ese punto.	1
1.V.6	Dado que $f´(x) = \frac{(x-1)^{\{-\frac{2}{3}\}}}{3}$, $f´(x)$ es continua.	1
1.F.1	Dado que $f´(x)$ no puede definirse en $x = 1$.	5
1.F.2	La pendiente de la recta tangente dada es infinita, lo cual hace a la función no derivable.	5

Tabla 4

Argumentos dados al primer enunciado

Código*	Justificación	Frecuencia
1.F.3	Los límites laterales de $f'(x)$ cuando x tiende a 1 no coinciden.	6
1.F.4	Aunque gráficamente sabemos que es derivable, no es fácil asegurarlo, hay que probar que los límites laterales de $f'(x)$ coinciden.	2
1.F.5	Calcular algebraicamente $f'(x)$, y por errores de cálculo obtener $f'(1) = 0$; pese a esto se concluye que es falso.	1
1.F.6	Que exista recta tangente, no implica que la función sea derivable en el punto de tangencia.	1
1.F.7	La recta dada no es la tangente en ese punto.	1
1.F.8	En este punto no es derivable al ser una raíz de la función $f(x)$.	1
1.F.9	$f'(1) = \frac{1}{0}$ por lo que tendría que hacerse un cambio de variable.	1
1.F.10	Dar un ejemplo	1
1.F.11	La definición no se cumple	1
1.F.12	f' no es continua en $x = 1$	2

Nota. El primer número del código corresponde al número de enunciado, la letra V o F depende de si fue utilizado para justificar la veracidad o falsedad, el último número del código distingue una justificación de otra.

Se puede observar que la vía de argumentación a la que más se recurre es calcular algebraicamente $f'(x)$ y a partir de ahí hacer conclusiones. Llama la atención el argumento 1.F.10 en donde para justificar que el enunciado es falso, el profesor en formación dibuja otra función con una recta tangente vertical alegando que este tipo de funciones no son derivables.

Validez y respaldo

Una vez identificados los principales argumentos, procedimos a valorar su validez dentro del contexto dado. Aclaramos que nuestro análisis se centró en si el profesor en formación elegía una vía de argumentación válida o adecuada para cada uno de los enunciados, pese a que la justificación dada no fuese del todo completa (no presente el respaldo suficiente).

Si observamos la tabla 4, apreciamos que hay varias justificaciones que no son válidas, por ejemplo: 1.V.3, 1.F.7, I.F.8 y 1.F.9, ya que se usa un argumento falso o fuera de contexto, como afirmar que la recta dada no es tangente. Del mismo modo, se detectan varios argumentos que pese a ser afirmaciones correctas, no son una justificación suficiente, por ejemplo, 1.V.4, 1.V.5, que sostienen que la continuidad de la función es suficiente para la derivabilidad, o bien 1.F.12, donde el argumento de que $f'(x)$ no es continua en $x = 1$ no es concluyente sobre la derivabilidad en el punto, al igual que 1.F.3 y 1.F.4.

Por otra parte, 1.F.1, 1.F.2, 1.F.6, 1.F.10 y 1.F.11 son justificaciones válidas, aunque sin duda algunas requerirían de más respaldo. Asimismo, consideramos que 1.V.1, 1.V.2, 1.V.6 y 1.F.5, pese a ser justificaciones en las que se eligió una vía de argumentación adecuada para el enunciado, presentan errores que las convierten en justificaciones incorrectas; por ejemplo, recurrir a la expresión algebraica de $f'(x)$ puede ser pertinente, pero errores de cálculo los hacen llegar a una conclusión errónea; o bien, calcular derivadas laterales es adecuado, pero considerar la función derivable porque ambas tienden a infinito es un error.

Así, en total se hallaron 16 participantes que dieron una justificación inválida o no concluyente; 6 que, aunque seleccionaron una vía de argumentación válida, son incorrectas por errores cometidos; y 13 respuestas que podrían considerarse válidas.

En cuanto al respaldo presentado, tanto en justificaciones válidas como en las que no, pudimos detectar que 25 de ellas presentaban algún tipo de respaldo. Un ejemplo se muestra en la figura 3, en la que para justificar la falsedad del enunciado se argumenta que "el límite no es finito" lo cual se acompaña de un cálculo algebraico que lo respalda.

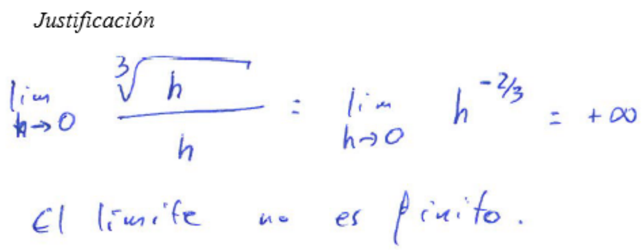
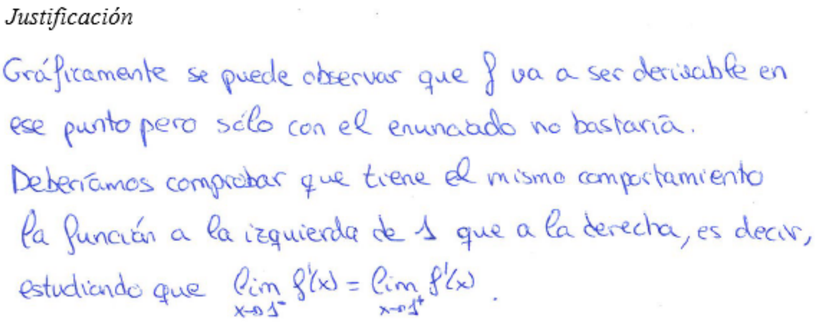


Figura 3. Respuesta dada por el participante A38 al primer enunciado

Hay que reconocer que no en todos los casos el respaldo identificado era correcto o suficiente; no obstante, en el análisis nos centrábamos en si había intención de respaldar o no la justificación. De hecho, 11 de los 25 respaldos detectados son equívocos o incurren en algún tipo de error, lo cual en la mayoría de los casos los lleva a conclusiones falsas.

Por otra parte, los 10 participantes que no sintieron necesidad de ampliar o reforzar su justificación, presentaban argumentos como el que se muestra en la figura 4, en el que para apoyar la veracidad del enunciado se escribe que debe verificarse si las derivadas laterales coinciden, pero no agrega nada más, probablemente si hubiese apoyado su justificación con el cálculo de dichos límites se habría dado cuenta que el enunciado era falso.


Justificación

Gráficamente se puede observar que f va a ser derivable en ese punto pero sólo con el enunciado no bastaría. Deberíamos comprobar que tiene el mismo comportamiento la función a la izquierda de 1 que a la derecha, es decir, estudiando que $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$.

Figura 4. Respuesta dada por el participante S7 al primer enunciado

Elemento matemático y modo de empleo

Un aspecto importante de las justificaciones presentadas tiene que ver con el elemento matemático en el que se basa y el modo en el que lo emplea. En la tabla 5 se puede observar cómo los docentes en formación, para este enunciado, optaron principalmente por un procedimiento algebraico o el uso de un resultado. En ese sentido, sobresalen dos elementos: primero, la importancia del aspecto algebraico como medio de argumentación y los errores de cálculo que se ponen de manifiesto; en segundo lugar, el uso de resultados incorrectos, empleándose en algunos casos implicaciones recíprocas o contrarias que no son verdaderas.

Tabla 5
Elemento matemático utilizado en el primer enunciado

Elemento	Base del argumento	Modo	Frecuencia
Aspecto gráfico	La recta tangente vertical en un punto implica no derivabilidad en dicho punto.	Directa	7
Procedimiento	Si se conoce la derivada en un punto, se puede calcular la recta tangente	Recíproca	2
	Calcular la expresión $f'(x)$ y evaluar en el punto	Directa	11
Definición	Si el límite, $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, existe y es finito, entonces la función es derivable en a.	Contraria	1

Tabla 5
Elemento matemático utilizado en el primer enunciado

Elemento	Base del argumento	Modo	Frecuencia
Resultado	Si una función es derivable en un punto, es continua en ese punto.	Recíproca	1
	Si f es continua en a. Si $\lim_{x \to a} f'(x)$ existe, entonces $f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$. (Si la función derivada es continua en un punto, entonces f es derivable en dicho punto)	Directa Contraria	4 7
Otros			2

En el caso de la definición, al tratarse de una implicación equivalente, decidimos explicitar la implicación directa que se asume y así poder indicar una implicación lógica utilizada, siendo conscientes de que según como se mire (la implicación directa que se considere) se trataría de una implicación recíproca o contrarrecíproca válida. En la categoría otros hemos incluido aspectos que, aunque no tienen relación alguna con la derivada (argumentos inventados), fueron utilizado de forma directa, como la respuesta "al ser una raíz de la función, no es derivable en ese punto". Este aspecto también llama la atención, pues algunos futuros docentes "inventaron" justificaciones sin sentido, en lugar de recurrir a un aspecto elemental como es la definición misma.

En la tabla 5, también señalamos el modo en el que cada uno de los elementos matemáticos fue utilizado, identificando la implicación lógica involucrada. Pese a que la mayoría de las justificaciones están escritas de la forma "Como X sucede (o no sucede), entonces Y", lo que buscamos es el uso lógico que se le da a los elementos matemáticos. Por ejemplo, quienes aseguran que el enunciado es verdadero dado que la función es continua están usando el recíproco de un resultado. En otro ejemplo se asegura que el recíproco de una afirmación no siempre es verdadero al escribir: "si una función es derivable en un punto, la derivada nos permite calcular la recta tangente en ese punto, pero que haya recta tangente no implica que podamos calcular la derivada".

De este modo, 25 elementos matemáticos fueron utilizados de manera directa, 3 haciendo uso de la implicación recíproca y 8 de la contraria.

Modo de representar el argumento

De los 35 argumentos, uno de ellos es de tipo perceptual, es decir, se limitó a un dibujo de una función que, al igual que la dada en el enunciado, presentaba una recta tangente vertical y esto la hacía no derivable. Los 34 restantes hicieron uso de símbolos y palabras para representar su argumento, aunque unos fueron más simbólicos que otros; tal como se puede ver en la figura 5, donde la respuesta dada por A29 es simbólica, mientras que la de A22 es totalmente narrativa, pese al uso de algunos símbolos matemáticos.

Justificación

$f(x) = (x-1)^{1/3}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}$

$f'(1) = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt[3]{x-1} = 0^+$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt[3]{x-1} = 0^-$

Justificación

Es verdadero aunque primero habría que comprobar que f(x) esté definida y es continua en x=1, es decir, que el límite por la derecha y por la izquierda de la función coinciden.

Figura 5. Respuestas dada por los participantes A29 y A22 al primer enunciado

De esta forma, 20 de ellos utilizaron principalmente un argumento narrativo mientras que 14 emplearon mayormente símbolos.

Segundo enunciado: función definida en dominio discreto

El segundo enunciado propuesto a los participantes en el cuestionario A es el que se muestra en la figura 6. Dos de los participantes no respondieron, por lo que en total se analizaron 41 argumentos.

2. ( ) Para la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$; tal que $f(x) = x^3 + 2x - 1$, se cumple que f es derivable en $x = 1$, y además $f'(1) = 5$.

Figura 6. Segundo enunciado del cuestionario A

Este enunciado es sin duda uno de los que más llama la atención, ya que, de las 41 respuestas obtenidas, 26 de ellas aseguran que el enunciado es verdadero y 15 que es falso. De forma general, las justificaciones dadas se sintetizan en la tabla 6, en la que nuevamente se aprecia que el argumento más empleado tiene que ver con el proceso algebraico para calcular derivadas (reglas de derivación).

Tabla 6

Argumentos presentados al segundo enunciado

Código	Justificación	Frecuencia
2.V.1	Calcular algebraicamente $f'(x)$ y evaluar	15
2.V.2	La función y su derivada son continuas en $x = 1$	6

Tabla 6
Argumentos presentados al segundo enunciado

Código	Justificación	Frecuencia
2.V.3	La función es un polinomio continuo	4
2.V.4	Al calcular el límite que define derivada se puede comprobar que la función es derivable	1
2.F.1	La función no es continua	4
2.F.2	Para que una función sea derivable en un punto es necesario que este sea de acumulación	4
2.F.3	La derivada involucra cálculo de límites, lo cual no tiene sentido en un dominio discreto	4
2.F.4	No se puede definir $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ (biyectividad)	2
2.F.5	Al derivar y evaluar $f'(1) \neq 5$	1

Nota. El primer número del código corresponde al número de enunciado, la letra V o F depende de si fue utilizado para justificar la veracidad o falsedad, el último número del código distingue una justificación de otra.

Validez y respaldo

De los argumentos dados, 2.F.2 y 2.F.3 se consideran justificaciones válidas. Precisamente la intención principal del enunciado era observar si los docentes en formación atienden a los requisitos necesarios para que pueda definirse la derivada en un punto. Un caso interesante ocurre con el argumento 2.V.4, pues una vía de argumentación válida es recurrir a la definición, el problema en este caso es que omite los requisitos y va directamente al cálculo del límite que define la derivada de una función en un punto.

Los argumentos restantes (33) no son válidos para el enunciado dado. Al tratarse de una función de dominio discreto, se considera que es una función continua en todos sus puntos del dominio (Apostol, 2002), de esta forma no tiene sentido decir que la función es discontinua. Sin embargo, dicha condición de continuidad tampoco es suficiente para hablar de derivabilidad, por lo que argumentos como 2.V.2, 2.V.3 o 2.F.1 no son válidos. Además, 2.F.4 no tiene relación con la derivabilidad, y en 2.V.1 se asume la derivabilidad, lo cual es un error.

En cuanto al respaldo que dan los docentes en formación a sus argumentos, en este enunciado la mayoría de ellos dio algún respaldo a sus justificaciones (33 de los participantes), principalmente del cálculo algebraico realizado para determinar $f'(x)$ o para "verificar" si la función era, o no, continua.

Elemento matemático y modo de empleo

Dada la naturaleza de los argumentos empleados, el elemento más utilizado fue el procedimiento algebraico (reglas de derivación) para calcular la expresión $f'(x)$, seguido del empleo de algún resultado, tal como se aprecia en la tabla 7.

Tabla 7

Elemento matemático utilizado en el segundo enunciado

Elemento	Base del argumento	Modo	Frecuencia
Definición	Si el límite, $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, existe y es finito, entonces la función es derivable en a.	Directa	1
Requisitos	La derivada de una función en un punto se define en puntos de acumulación	Contrarrecíproca	8
Procedimiento	Calcular la expresión $f'(x)$ y evaluar	Directa	16
Resultado	Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto.	Contrarrecíproca	4
		Recíproca	4
	Si f es continua en a. Si $\lim_{x \to a} f'(x)$ existe, entonces $f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$. (La derivada es continua en un punto, entonces es derivable)	Directa	6
Otros			2

Incluimos en "otros" los dos argumentos que recurrieron a la noción de función biyectiva, al no tratarse de un elemento matemático relacionado directamente con el concepto de derivada. Para este enunciado, los elementos matemáticos se emplearon haciendo uso de las distintas implicaciones lógicas. Pese a que la mayoría utiliza los elementos de manera directa, se hallaron 4 implicaciones recíprocas y 12 contrarrecíprocas.

Modo de representar el argumento

En este enunciado el tipo de argumento que predominó fue el simbólico, con un total de 25 argumentos y 16 de tipo narrativo.

Tercer enunciado: derivabilidad en un máximo local

En la figura 7 se muestra el primer enunciado del cuestionario B, el cual se le aplicó a 55 participantes, sin embargo 2 no lo respondieron, por lo que en este caso se analizaron 53 respuestas.

1. ( ) Para la función g, cuya gráfica se muestra en la figura 1

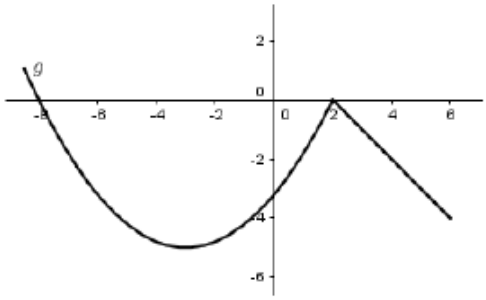


Figura 1. Gráfica de g

Se puede afirmar que como g tiene un máximo local en $x = 2$, entonces $g'(2) = 0$.

Figura 7. Primer enunciado del cuestionario B

Para este enunciado, 11 de los futuros docentes consideraron el enunciado como verdadero (3 de ellos no dieron justificación), mientras que 42 señalaron que era falso (1 de ellos sin justificar). De manera sintetizada, los argumentos utilizados se presentan en la tabla 8. Al igual que en el primer enunciado se encontró gran variedad de argumentos, sobre todo para asegurar la falsedad de este.

Tabla 8
Argumentos dados al tercer enunciado

Código	Justificación	Frecuencia
3.F.1	La función presenta un "pico" en $x = 2$	9
3.F.2	Hay un cambio brusco de monotonía	2
3.F.3	Las derivadas laterales en ese punto no coinciden	5
3.F.4	La pendiente de la recta tangente en ese punto es infinita	1
3.F.5	La función no es derivable en ese punto	10
3.F.6	Al ser una función a trozos, su derivada no es continua	3
3.F.7	Los límites laterales de $g´(x)$ no coinciden	4
3.F.8	No se puede saber, pues no se conoce la expresión algebraica	1
3.F.9	Si la función es derivable en un máximo, $f´(x) = 0$, pero no en todos los máximos la función tiene que ser derivable.	2
3.F.10	No es derivable al tratarse de un punto silla.	2
3.F.11	El punto no es un máximo	1
3.F.12	La posición de la recta tangente	1

Tabla 8
Argumentos dados al tercer enunciado

Código	Justificación	Frecuencia
3.V.1	La derivada se anula en los extremos de una función	7
3.V.2	No existe tangente, por tanto, es cero	1

Nota. El primer número del código corresponde al número de enunciado, la letra V o F depende de si fue utilizado para justificar la veracidad o falsedad, el último número del código distingue una justificación de otra.

Validez y respaldo

En cuanto a la validez del argumento consideramos que la mayoría de ellos, 35 para ser exactos, eligen una vía de argumentación válida, aunque no siempre con el suficiente respaldo. De hecho, 22 de los argumentos válidos no presentaron respaldo alguno, limitándose a indicar que la función no es derivable en el punto o simplemente afirmando que, dado que la función presenta un "pico", esta no es derivable en ese punto.

En el caso de los 14 argumentos no válidos, se tratan principalmente de justificaciones que, aunque basadas en aspectos matemáticos verdaderos (procedimiento para hallar máximos y mínimos, por ejemplo 3.V.1), son utilizados en un contexto inadecuado. O bien se trata de justificaciones sin fundamento matemático; por ejemplo, señalar que "en el punto no ocurre un máximo; o bien que no podemos asegurar nada porque no conocemos la expresión algebraica de la función". Este último llama bastante la atención, pues la importancia que se le da a la expresión algebraica se evidenció además en dos participantes que se vieron en la necesidad de determinar la expresión algebraica que define la función, para poder comprobar que las derivadas laterales no coincidían.

De estos 14 argumentos no válidos, 6 de ellos no presentaban respaldo. Entre otras cosas, subrayamos el uso de justificaciones o argumentos en contextos inadecuados y la poca necesidad manifestada de respaldar tales justificaciones. En el caso de los 21 argumentos que presentan respaldo, no siempre se trata de respaldos suficientes o correctos. En concreto, detectamos que cuatro de ellos son respaldos falsos o inventados. Además, se identificaron casos en los que se plantean aspectos no concluyentes. Sin embargo, nuestro interés en este trabajo tiene más que ver con la intención o la necesidad manifestada por los futuros docentes de respaldar la justificación.

Elemento matemático y modo de empleo

Los elementos matemáticos utilizados para este enunciado se resumen en la tabla 9. El aspecto gráfico fue lo más empleado, particularmente el punto anguloso, seguido del uso de algún resultado.

Tabla 9
Elemento matemático utilizado en los argumentos

Elemento	Base del argumento	Modo	Frecuencia
Gráfico	Una función no es derivable en los puntos en los que la gráfica presenta un "pico"	Directa	9
	Una función no es derivable en los puntos en los que se presenta un cambio brusco de monotonía	Directa	2
Definición	Si el límite, $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, existe y es finito, entonces la función es derivable en a	Contraria	1
	Si en un punto las derivadas laterales existen y son iguales, entonces la función es derivable en el punto	Contraria	5
Resultado	Dada una función derivable en a. Si f alcanza un extremo relativo en a, entonces $f'(a) = 0$	Directa Recíproca	5 2
	Si f es continua en a. Si $\lim_{x \to a} f'(x)$ existe, entonces $f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$. (La derivada es continua en un punto, entonces es derivable)	Contraria	7
Procedimiento	Para hallar máximos y mínimos de una función, se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$	Recíproca	2
Otros			6

A la lista anterior debe agregarse los 10 docentes en formación que solo indicaron que era falso ya que la función no era derivable en el punto dado. Aunque podría suponerse que el elemento matemático que emplean es el primer resultado de la tabla 9, y que se refieren a que las condiciones necesarias no se satisfacen, no podemos asegurarlo dado que no dan mayor explicación.

Ahora bien, la mayoría de los sujetos que afirmaron que el enunciado era verdadero se basaron tanto en el primer resultado mencionado en la tabla 9, como en el hecho de que "para hallar máximos y mínimos hacemos $f'(x) = 0$, por lo tanto, si en x hay un máximo, la derivada se anula en ese punto". Aunque claramente este último argumento es basado también en el resultado mencionado, decidimos separarlo, pues la forma en la que el futuro profesor lo presenta no es la misma, en esta los participantes se están basando principalmente en un procedimiento que se recuerda. En ambos casos, vemos que el error en el argumento es no considerar las condiciones necesarias para que la proposición se cumpla o bien para poder aplicar el procedimiento.

Un argumento interesante presentado fue uno en el que el participante intenta explicar que el enunciado no es cierto “pues el recíproco del teorema no siempre es verdadero”. Aquí el futuro profesor alega que “el hecho de que $f'(x) = 0$ no implica necesariamente que haya un máximo o mínimo, pues puede tratarse de un punto de inflexión”. El argumento nos muestra que el futuro profesor es consciente de que el ejemplo mostrado es un caso en el que hay un máximo o mínimo pero la derivada no se anula, pero no se da cuenta de que no se trata de que el recíproco sea o no verdadero, sino que hay una condición necesaria, la derivabilidad de la función en el punto, que no está siendo tomada en cuenta.

Por otra parte, los docentes en formación que intentaron respaldar su justificación no siempre lograban enlazar las ideas que presentaban. De este modo, hay un elemento matemático adicional que 8 de los participantes consideraron: la función es continua en el punto dado, no obstante, no lo enlazan con el resto de su justificación.

Finalmente, al igual que en los anteriores enunciados, muchos prefieren aplicar de manera directa algún resultado que les justifique de forma inmediata la validez o falsedad del enunciado. Aunque, en este caso, observamos también el uso erróneo de implicaciones contrarias o recíprocas de algunos elementos matemáticos.

Modo de representar el argumento

Al tratarse de argumentos tan específicos y puntuales, la mayoría de ellos se presentaron de forma narrativa empleando complementariamente alguna notación. No obstante, identificamos que 5 de los argumentos se presentaron principalmente de manera simbólica, determinando la expresión algebraica de la función de manera que pudieran corroborar que las derivadas laterales no coincidían, por lo que se trataba de argumentos creados a partir de una manipulación algebraica.

Cuarto enunciado: función discontinua

El segundo enunciado del cuestionario B se presenta en la figura 8. De los 55 participantes, 16 consideraron el enunciado como verdadero, pero solo 13 presentaron alguna justificación; 37 indicaron que era falso, uno de los cuales no dio justificación; y dos no contestaron nada. Por lo que analizamos en total 49 justificaciones.

2. ( ) La función $h(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & si \quad x < 0 \\ x^2 + 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ cuya gráfica se muestra en la figura 2, satisface que $\lim\limits_{x \to 0^-} h'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} h'(x) = 0$. Por lo tanto $h'(0) = 0$.

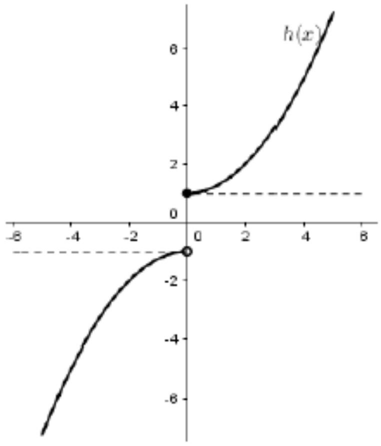


Figura 2. Gráfica de h

Figura 8. Segundo enunciado del cuestionario B

En este caso los argumentos empleados fueron menos variados que en los otros enunciados, tal como se observa en la tabla 10. En particular, tuvo más predominio el hecho de que la función no era continua, aunque la vía algebraica para argumentar sigue presentándose.

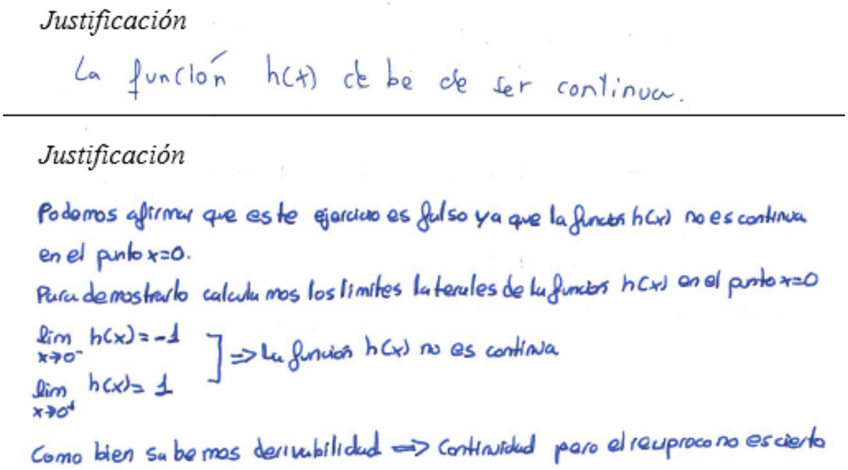
Tabla 10
Argumentos presentados al cuarto enunciado

Código	Justificación	Frecuencia
4.V.1	Derivar la función dada y evaluar en $x = 0$	8
4.V.2	Tanto a la izquierda como a la derecha la recta tangente es la misma	1
4.V.3	La función derivada es continua en $x = 0$	1
4.V.4	Los límites laterales de $h'(x)$ coinciden	2
4.V.5	Por definición	1
4.F.1	La función no es continua	34
4.F.2	La definición de derivada no se satisface	1
4.F.3	No es derivable al ser una función a trozos	1

Validez y respaldo
De los 49 argumentos analizados en este enunciado, nos damos cuenta de que precisamente las 13 justificaciones que apelan la veracidad del enunciado no son válidas, aunque destaca que todas ellas contaban con algún respaldo

(principalmente el cálculo realizado al utilizar el argumento 4.V.1). Así, pese a ser una vía de argumentación incorrecta, el respaldo presentado era correcto. También se considera el enunciado 4.F.3 como una justificación no válida, pues no es un hecho concluyente para la no derivabilidad.

De los 35 argumentos válidos (básicamente los que justificaban la falsedad del enunciado), solo 8 de ellos presentaron algún respaldo a su justificación. Un ejemplo de esto se aprecia en la figura 9, donde el argumento más empleado (el hecho de que la función no era continua) fue utilizado sin dar respaldo, como la respuesta de B18, o bien, respaldando la justificación haciendo alusión al teorema y además probando algebraicamente que la función no era continua, como se muestra en la respuesta de B19.


Justificación

La función h(x) debe de ser continua.

Justificación

Podemos afirmar que este ejercicio es falso ya que la función h(x) no es continua en el punto x=0.

Para demostrarlo calculamos los límites laterales de la función h(x) en el punto x=0

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-} h(x) = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} h(x) = 1\end{array}\right] \Rightarrow$ La función h(x) no es continua

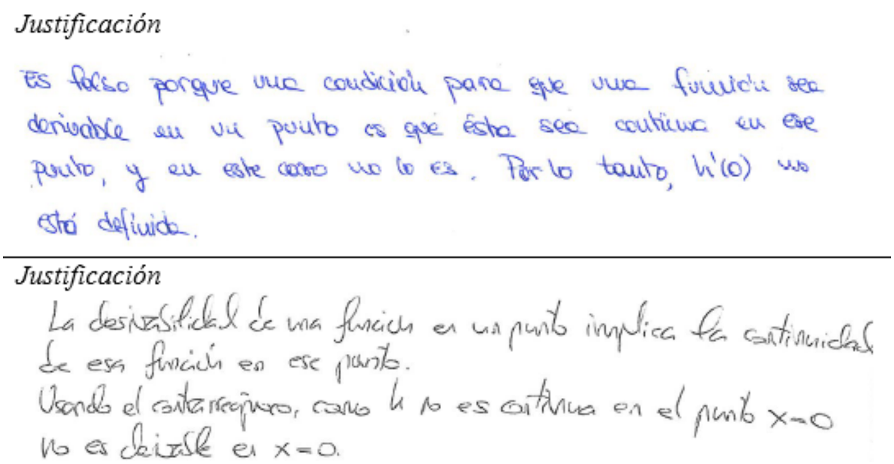
Como bien sabemos derivabilidad $\Rightarrow$ Continuidad pero el recíproco no es cierto

Figura 9. Respuestas dadas al cuarto enunciado por los participantes B18 y B19 respectivamente

En total se tienen 21 justificaciones con respaldo (correcto), mientras que 28 docentes no sintieron la necesidad de presentar respaldo alguno.

Elemento matemático y modo de uso

Al prestar atención al elemento matemático empleado nos damos cuenta de que argumentos similares hacían alusión a elementos matemáticos distintos, por ejemplo, en la figura 10 se pueden ver dos justificaciones basadas en la continuidad de la función. Sin embargo, una emplea la continuidad como condición necesaria (respuesta de B5), mientras que otra hace referencia al contrarrecíproco de un teorema o resultado (respuesta de B28).


Justificación

Es falso porque una condición para que una función sea derivable en un punto es que ésta sea continua en ese punto, y en este caso no lo es. Por lo tanto, h'(0) no está definida.

Justificación

La derivabilidad de una función en un punto implica la continuidad de esa función en ese punto.
Usando el contrarrecíproco, como h no es continua en el punto x=0 no es derivable en x=0.

Figura 10. Respuestas dadas por los participantes B5 y B28 al cuarto enunciado

De esta forma, en la tabla 11 se muestran los elementos matemáticos utilizados en el cuarto enunciado.

Tabla 11
Elemento matemático utilizado en el cuarto enunciado

Elemento	Base del argumento	Modo	Frecuencia
Gráfico	Posición de la recta tangente	Directa	1
Definición	Si el límite, $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, existe y es finito, entonces la función es derivable en a.	Directa	1
		Contraria	1
Requisitos	La función debe ser continua para poder ser derivable	Contraria	10
Procedimiento	Calcular la expresión $f'(x)$ y evaluar	Directa	8
Resultado o relación	Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto.	Contrarrecíproca	24
	Si f es continua en a. Si $\lim_{x \to a} f'(x)$ existe, entonces $f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$. (Si la función derivada es continua en un punto, entonces f es derivable en dicho punto)	Directa	3
Otros			1

No sorprende que los elementos más empleados hayan sido el álgebra de derivadas y los que tienen que ver con la continuidad de la función. Lo que sí nos sorprende es el poco uso de la definición de derivada, quienes la emplearon solo afirmaron que la definición no se satisface, pero no lo respaldan (no llevan a cabo el cálculo del límite). En cuanto al modo del argumento, en este enunciado predominó el uso de la implicación contrarrecíproca, dado que el elemento matemático más empleado fue el resultado sobre la relación de la derivabilidad y la continuidad.

Modo de representar el argumento

Para este último enunciado, se identificaron 39 argumentos narrativos. Aunque muchos de estos se apoyaron en símbolos al presentar su respaldo, los incluimos como narrativos al ser las palabras el principal sistema de representación. Los 10 argumentos restantes se consideran meramente simbólicos.

Discusión y conclusión

En este trabajo nos plateamos como objetivo analizar los argumentos que dan los docentes en formación al justificar la veracidad o falsedad de un enunciado sobre la derivabilidad de una función en un punto. Los resultados obtenidos para algunos de los aspectos analizados se resumen en la tabla 12.

Tabla 12

Resumen de los resultados obtenidos para cada uno de los enunciados

Enunciado	Veracidad o falsedad	Validez	Respaldo	Elemento matemático	Modo
1	V (9) F (29)	Válidos (19) No válidos (16)	Sin respaldo (10) Con respaldo (25)	Procedimiento Resultado	Narrativo
2	V (26) F (15)	Válidos (3) No válidos (33)	Sin respaldo (3) Con respaldo (33)	Procedimiento Resultado	Simbólico
3	V (11) F (42)	Válidos (35) No válidos (14)	Sin respaldo (28) Con respaldo (21)	Resultado Gráfico	Narrativo
4	V (16) F (37)	Válidos (35) No válidos (14)	Sin respaldo (28) Con respaldo (21)	Resultado Requisito	Narrativo

El análisis permitió la consecución de los cuatro objetivos específicos establecidos. En cuanto al primer objetivo específico, identificamos argumentos que no tienen validez dentro del contexto dado, y pese a que podría creerse que se trataba de los argumentos de los participantes que consideraron como verdadero alguno de los enunciados cuando en realidad no lo eran, los resultados nos muestran que la validez no se limitó a esto, pues en todos los casos hubo más argumentos no válidos que respuestas que consideraban el enunciado como verdadero. Otro aspecto interesante es que muchos "resultados" (no siempre verdaderos) o propiedades son aplicados sin necesidad de respaldo o mayor justificación. En los cuatro enunciados se identificaron argumentos sin respaldo tanto en aquellos considerados válidos como en los que no. Incluso, tal como se detalló en los resultados, el respaldo presentado no siempre era suficiente o adecuado.

En cuanto al segundo objetivo específico sobre el elemento matemático empleado, se aprecia el escaso uso que se le da a la definición de derivada, teniendo mayor protagonismo el proceso algebraico del cálculo de la función derivada y diversas propiedades o resultados. Esto nos parece relevante, pues manifiesta una tendencia por parte de los docentes en formación a "buscar una regla", cuya aplicación de forma directa justifique su posición. Vemos como al igual que los estudiantes, los docentes en formación suelen reducir los argumentos a una sentencia única (Ortiz-May, 2018).

El tercer objetivo consistía en analizar la influencia o el papel de las distintas implicaciones lógicas en el uso de los elementos matemáticos. Al comparar los resultados obtenidos en cada uno de los enunciados, pudimos detectar, por ejemplo, que la no validez de los argumentos tiene principalmente dos orígenes: uso de resultados inventados por los participantes (sin sentido) o el considerar como verdaderas implicaciones contrarias o recíprocas de algunos procedimientos o resultados.

Finalmente, para conseguir el cuarto objetivo específico, se determinó el modo de representación de los argumentos, destacando los narrativos y simbólicos, aunque como se aprecia en el apartado resultados solo un futuro docente recurrió a un tipo de argumento distinto: el perceptual (dibujo).

Un aspecto de interés, aunque no era foco de este trabajo, son los errores cometidos en tareas escolares sobre la derivabilidad de una función. Principalmente en el enunciado 2, donde la mayoría pasa por alto un requisito indispensable para poder definir la derivada en un punto. O en el cuarto enunciado, donde el aspecto algebraico pareciera tener más fuerza que la definición misma. Coincidimos con Boesen, Lithner y Palm (2010) en que las principales dificultades se deben a que los estudiantes, en nuestro caso docentes en formación, se enfocan en aspectos superficiales. Fuentealba, Badillo, Sánchez-Matamoros y Cárcamo (2019) ya han mostrado las distintas dificultades que se ponen de manifiesto al resolver problemas no rutinarios y que requieren de comprender el concepto de derivada. Sin embargo, en nuestro caso, hemos evidenciado cómo estos problemas se presentan también en la justificación de tareas básicas.

Algunos autores consideran que una raíz del problema tiene que ver con darle prioridad a lo analítico, limitando el aprendizaje a una comprensión parcial e instrumental del concepto (e. g., Fuentealba et al., 2018), lo que también predomina en los libros de texto escolares (Vargas, Fernández-Plaza y Ruiz-Hidalgo, en prensa). Esta visión procedimental de la matemática, tal como señalan Selden y Selden (1987), basada en la simple reproducción y aplicación de propiedades, repercute negativamente en las habilidades de razonamiento. De ahí la importancia de reforzar el aprendizaje conceptual más allá de la parte algorítmica, complementando con los sistemas de representación y los sentidos y modos de uso, lo que desde nuestro marco permitiría significados más ricos.

Finalmente, caracterizar los argumentos dados por docentes en formación nos permite vislumbrar parte del significado que estos le dan al concepto de derivada. Los razonamientos, como parte de la estructura conceptual, son parte del significado del concepto matemático. El análisis aquí presentado nos permite ampliar los hallazgos obtenidos en Vargas (2017), donde se identificaron 5 perfiles o significados dados a la derivada por docentes en formación:

Geométrico-variacional: quienes consideraban la derivada mediante interpretación geométrica y como un límite, haciendo además alguna mención de sus condiciones y resultados.

Geométrico-elemental: destacando solo la interpretación geométrica de la derivada y sus respectivos resultados y condiciones.

Geométrico-algebraico: define la derivada mediante su interpretación geométrica y da relevancia al trabajo algebraico como herramienta para argumentar.

Formalista: el único basado únicamente en la definición y los requisitos implícitos.

Simbólico-elemental: referido a casos específicos en los que se identificaron muy pocos elementos de la derivada.

Los resultados aquí descritos nos reafirman lo que destaca de esos perfiles: los docentes en formación recurren principalmente a aspectos algebraicos para argumentar y a elementos y resultados básicos que puedan utilizar de manera directa, lo que los sitúa principalmente en los perfiles geométrico-elementales (definir la derivada recurriendo a su interpretación geométrica y fundamentar los argumentos de manera directa mediante condiciones o teoremas) y geométrico-algebraico (definir la derivada mediante su interpretación geométrica, destacando el trabajo algebraico como herramienta para argumentar).

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología de España en el marco del Proyecto I+D+I PCG2018-095765-B-100; y por el Grupo FQM-193 del III Plan Andaluz de Investigación (PAIDI). También agradecemos a la Universidad de Costa Rica por la beca otorgada a la autora Vargas, lo que le permitió trabajar en esta investigación.

Referencias

Apostol, T. (2002). *Análisis matemático* (2ª ed.). Barcelona, España: Reverté.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM*, *40*, 501-512. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0103-2

Bell, A. W., Costello, J. y Küchemann, D. (1983). *A review of research in mathematical education. Reserch on learning and teaching*. Oxford, Inglaterra: NFER-NELSON.

Bingolbali, E. y Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(1), 19-35.

Boesen, J., Lithner, J. y Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics*, *75*, 89-105.

Burgos, J. (2007). *Cálculo infinitesimal de una variable* (2ª ed.). Madrid, España: McGraw Hill.

Byerley, C. y Thompson, P. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *Journal of Mathematical Behavior*, *48*, 168-193.

Castro, A., Prat, M. y Gorgorió, N. (2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: Su evolución tras décadas de investigación. *Revista de Educación, 374*, 43-68. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2016-374-325

Chua, B. L. (2017). A framework for classifying mathematical justification tasks. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the tenth congress of the european society for research in mathematics education* (pp. 115-122). Dublín, Irlanda: DCU Institute of Education and ERME.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Londres, Reino Unido: Routledge.

Duval, R. (1990). Pour une approche cognitive de l`argumentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *3*, 195-221.

Fahse, C. (2017). Issues of a quasi-longitudinal study on different types of argumentation in the context of division by zero. En T. Dooley y G. Gueudent (Eds.), *Proceedings of the tenth congress of the european society for research in mathematics education* (pp. 147-154). Dublín, Irlanda: DCU Institute of Education and ERME.

Frege, G. (1996). Sobre sentido y referencia. En G. Frege (Ed.), *Escritos filosóficos.* Madrid, España: Tecnos.

Fuentealba, C., Badillo, E. y Sánchez-Matamoros, G. (2018). Puntos de no-derivabilidad de una función y su importancia en la comprensión del concepto de derivada. *Educação e Pesquisa, 44*(4), online http://dx.doi.org/10.1590/S1678-4634201844181974

Fuentealba, C., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G. y Cárcamo, A. (2019). The Understanding of the Derivative Concept in Higher Education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(2), online. https://doi.org/10.29333/ejmste/100640

Gómez, P. y Gutiérrez-Gutiérrez, A. (2014). Conocimiento matemático y conocimiento didáctico del futuro profesor español de primaria. Resultados del estudio TEDS-M. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en educación matemática XVIII* (pp. 99-114). Salamanca, España: SEIEM.

Hähkiöniemi, M. (2008). Durability and meaningfulness of mathematical knowledge–the case of the derivative concept. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the joint meeting of PME 32 and PME-NA 30* (Vol. 3, pp. 113-120). Morelia, México: Cinvestav/UMSNH.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students´ proof schemes: Results from exploratory studies. En A. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Herrera, M., Velasco, M. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2017). Comparando textos de cálculo: el caso de la derivada, *PNA, 11*(4), 280-306.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-23). Abingdon, Inglaterra: Routledge.

Koleza, E., Metaxas, N. y Poli, K. (2017). Primary and secondary students’ argumentation competence: A case study. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the tenth congress of the european society for research in mathematics education* (pp. 179-186). Dublín, Irlanda: DCU Institute of Education and ERME.

Lithner, J. (2003). Students´ mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 29–55.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*, 225-276.

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de Las Ciencias, 34*(3), 51-71.

Metaxas, N., Potari, D. y Zachariades, T. (2016). Analysis of a teacher’s pedagogical arguments using Toulmin’s model and argumentation schemes. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(3), 383-397.

Ortiz-May, D. (2018). Comparaciones entre argumentos formales e informales. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García-García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 437-446). Gijón, España: SEIEM.

Philipp, K. (2018). Diagnostic competences of mathematics teachers with a view to processes and knowledge resources. En T. Leuders, K. Philipp y J. Leuders (Eds.), *Diagnostic competence of mathematics teachers* (pp. 109-128). Cham, Suiza: Springer International Publishing.

Reid, D. y Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education*. Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *AIEM*, *1*, 39-63.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *UNIÓN*, *33*, 11-27.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2013). Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función. *Bolema*, *27*(45), 281-302.

Selden, A. y Selden, J. (1987). Errors and misconceptions in college level theorem proving. En J. Novak (Ed.), *Proceedings of the second international seminar on misconceptions and educational strategies in science and mathematics*: *Vol. III* (pp. 456-471). Ithaca, NY: Crornell University.

Selden, A. y Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(1), 4-36.

Skovmose, O. (2005). Meaning in mathematics education. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 83-100). Nueva York, NY: Springer.

Solow, D. (2006). *Introducción al razonamiento matemático* (2ª ed.). Ciudad de México, México: Limusa.

Spivak, M. (2008). *Calculus* (3th edition). Texas, TX: Publish or perish, Inc.

Stylianides, A. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R. y Rowley, G. (2008). *Teacher education and development study in mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge, Reino Unido: Cambrige University Press.

Vander-Klok, J. (2014). On the use of questionnaires in semantic fieldwork: A case study in modality. En A. Belkadi, K. Chatsiou y K. Rowan (Eds.), *Proceedings of conference on language documentation and linguistic theory* (Vol. 4, pp. 1-11). Londres, Reino Unido: SOAS.

Vargas, M. F. (2017). *Significado que le atribuyen los futuros profesores al concepto de derivada de una función en un punto* (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, España.

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2019). Caracterización de los argumentos dados por profesores en formación a una tarea sobre derivada. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 591-600). Valladolid, España: SEIEM.

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (en prensa). *Análisis de tareas sobre derivadas propuestas en los libros de texto. AIEM.*

Walton, D., Reed, C. y Macagno, F. (2008). *Argumentation schemes*. Cambridge, Reino Unido: Cambrige University Press.

María Fernanda Vargas
Universidad de Costa Rica
maria.vargas_g@hotmail.es

José Antonio Fernández-Plaza
Universidad de Granada
joseanfplaza@ugr.es

Juan Francisco Ruiz-Hidalgo
Universidad de Granada
jfruiz@ugr.es

Recibido: 22/01/2020. Aceptado: 17/04/2020
doi: 10.30827/pna.v14i3.12229
ISSN: 1887-3987