View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Funes

Las Conexiones Entre Las Derivadas Sucesivas De Una Función: Un Estudio Exploratorio Sobre La Existencia De Matices En La Tematización Del Esquema De La Derivada

C. Fuentealba, E. Badillo, G. Sánchez-Matamoros
Universidad Austral de Chile, Universidad Autónoma de Barcelona, Universidad de Sevilla
cfuentealba@uach.cl, Edelmira.Badillo@uab.cat, gsanchezmatamoros@us.es

Resumen

Esta comunicación es parte de un trabajo más extenso que aborda la comprensión del concepto de derivada en estudiantes universitarios con instrucción previa en cálculo diferencial. Por una parte, consideramos los elementos teóricos propuestos por la teoría APOE en relación a la tematización de un esquema y por otra, la configuración del concepto de derivada que se caracteriza por: los elementos matemáticos, las relaciones lógicas y los modos de representación que los estudiantes utilizan al resolver una tarea. Los resultados sugieren que tematizar el esquema de la derivada es difícil de lograr y que además, existen matices entre quienes lo consiguen, observándose diferencias en las conexiones entre las derivadas sucesivas de una función.

Palabras clave: derivada, esquema de derivada, tematización, derivadas sucesivas

Introducción

El concepto de derivada, es sin lugar a duda, uno de los elementos fundamentales y estructurantes de cualquier curso de cálculo o análisis matemático. Nadie discute su importancia y es por ello que está incluido en los currículos tanto de matemáticas como del área científica. Sin embargo, a pesar de la importancia del cálculo, un problema aún sin solución es cómo lograr el aprendizaje por parte de los estudiantes de la diferenciación o la integración que corresponden a los conceptos fundamentales de este curso. Según Artigue (1995) la enseñanza tradicional, en particular, la enseñanza universitaria, aunque tiene otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo evaluando en esencia las competencias adquiridas en este dominio. Este hecho ha provocado que un gran número de estudiantes prefieran utilizar dichas técnicas para resolver las tareas que se les proponen, lo cual generalmente no los lleva a un camino óptimo de resolución. De esta forma, a pesar de que el concepto de derivada posee una amplia gama de aplicaciones en distintas disciplinas científicas, su comprensión por parte de los estudiantes resulta ser un reto cognitivo.

La complejidad presente en la comprensión del concepto de derivada ha sido motivo de numerosas investigaciones que han abordado la problemática desde diversos planteamientos teóricos aportando información que ha tenido consecuencias positivas en el desarrollo del currículo de cálculo y específicamente sobre el concepto de derivada. Sin embargo, se hace necesario ahondar en la compresión que los estudiantes construyen del concepto, una vez acabado un proceso de instrucción.

Marco Teórico

Este trabajo considera los aportes teóricos planteados por la Teoría APOE (Arnon et al., 2014; Asiala et al., 1997), los cuales permiten describir tanto el camino como la construcción de las estructuras cognitivas lógico-matemáticas realizadas por un individuo durante el proceso de aprendizaje de un concepto matemático. En este marco se considera que el principal mecanismo de construcción de conocimiento matemático es la abstracción reflexiva y que la comprensión de un concepto por parte de un estudiante comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos en términos de acciones. Las acciones se interiorizan para formar procesos que se encapsulan para formar objetos. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas (Dubinsky, 1991). Los esquemas corresponden a la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas (Asiala et al., 1997). En relación a los esquemas, Piaget y García (1983, 1989) indican que estos crecen según ciertos mecanismos y se desarrollan o evolucionan pasando por tres niveles, intra-inter-trans, denominado tríada que se suceden según un orden fijo, caracterizándose por el grado de construcción de relaciones entre los elementos matemáticos constitutivos del concepto. En este sentido, Trigueros (2005) indica que cuando un sujeto se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo. Al hacerlo, pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre estos. Ante una misma situación, diferentes estudiantes, utilizan los mismos conceptos y diferentes relaciones entre ellos.

Para el objetivo de nuestro estudio consideramos los aportes de la Teoría APOE relacionados con la tematización de un esquema, la cual según Cooley, Trigueros y Baker (2007) implica la coherencia del esquema, es decir, la posibilidad de que el sujeto reconozca las relaciones que están incluidas en el esquema y sea capaz de decidir qué problema puede resolverse utilizando el esquema y cuál no. En este mismo sentido y en relación a la tematización del esquema de la derivada consideramos, por una parte, los aportes realizados por Baker, Cooley y Trigueros (2000) que indican que la tematización puede observarse cuando un estudiante es capaz de movilizar las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos a una situación nueva y, por otra, los resultados de García, Llinares y Sánchez-Matamoros (2011) que mencionan que la tematización del esquema de la derivada se evidencia en las estructuras subyacentes que se observan cuando un estudiante es capaz de transferir todas las relaciones e implicaciones que ha construido y organizado para el par (f, f') al par (f', f''), y así sucesivamente.

Metodología

Los participantes de este estudio correspondieron a 25 estudiantes universitarios, los cuales habían cursado y aprobado, por lo menos una asignatura de cálculo diferencial.

El primer instrumento aplicado correspondió a un cuestionario que estaba conformado por tres tareas sobre la comprensión del concepto de derivada, dichas tareas tenían como base estudios previos relacionados con el concepto (Baker et al., 2000; Cooley et al., 2007; García et al., 2011). La resolución de las tareas del cuestionario involucraba el uso de los elementos que configuran el concepto de derivada (Tabla 1).

Tabla 1. Descripción de los elementos necesarios para responder cada una de las tareas propuestas

Tarea 1	*Modo de representación*: analítico →gráfico *Elementos matemáticos*: Interpretación analítica de la derivada y sus implicaciones sobre la gráfica de la función (existencia de valores extremos, puntos de inflexión). Signo de la primera derivada y su relación con respecto a los intervalos de monotonía de la función. Signo de la segunda derivada y su relación con respecto a los intervalos de convexidad de la función. *Relaciones lógicas*: Conjunción, contrarrecíproco y equivalencia.
Tarea 2	*Modo de representación*: gráfico→ analítico → gráfico *Elementos matemáticos*: Interpretación geométrica y analítica de la derivada (existencia de valores extremos, puntos de inflexión, discontinuidades y picos). Intervalos de monotonía y convexidad de la función y su relación con el signo de la primera derivada o segunda derivada según sea el caso. El operador derivada (si f es una parábola entonces f' es una recta). *Relaciones lógicas:* Conjunción, contrarrecíproco y equivalencia.
Tarea 3	*Modo de representación*: gráfico → analítico → gráfico *Elementos matemáticos*: Interpretación geométrica (existencia de valores extremos, puntos de inflexión, discontinuidades y picos). Intervalos de

monotonía de la primera derivada y su relación con el signo de la segunda derivada (intervalos de convexidad de la función). Intervalos de cambio de signo de la primera derivada y su relación con respecto a la monotonía de función.

Relaciones lógicas: Conjunción, contrarrecíproco y equivalencia.

A modo de ejemplo, presentamos la primera y la tercera tarea del cuestionario propuesto a los estudiantes. Como se observa en la Figura 1, se entrega información analítica de la función f en términos de f' y f'', a partir de ello se les solicita a los estudiantes esbozar la gráfica de la función f. Uno de los objetivos de esta tarea fue observar si los estudiantes eran capaces de establecer las relaciones tanto puntuales como globales que asocian: el signo de f' en un intervalo con la monotonía de f en dicho intervalo, el signo de f'' en un intervalo con la concavidad de f en el intervalo y los ceros de f' con la posible existencia de valores extremos o puntos de inflexión. Por otra parte, se pretende observar si los estudiantes eran capaces identificar las contradicciones presentes en las condiciones analíticas entregadas y además, plantear una modificación que les permita dar una solución adecuada de la tarea mostrando de esta forma coordinación de los elementos matemáticos entregados a través de las relaciones lógicas.

Esboza la gráfica de una función f que satisface las siguientes condiciones:

a) f es continua en su dominio	b) $f(2)=0$
c) $f'(3)=f'(5)=0$	d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-4$
e) $\lim_{x\to 8^-} f(x)=-\infty$	f) $f'(x)<0$ cuando $5<x<8$
g) $f'(x)\geq 0$ cuando $x<5$	h) $f''(x)<0$ cuando $3<x<8$
i) $f''(x)>0$ cuando $x<3$	

Figura 1. Enunciado de la Tarea N°1 del cuestionario

En la tercera tarea presentada en modo gráfico (Figura 2), se les solicitó a los estudiantes, construir el gráfico de f a partir de la gráfica de f', donde la gráfica de f' muestra: variados cambios de signo, crecimiento, ceros, puntos de tangencia horizontal y un punto anguloso. El objetivo de la tarea fue observar si los estudiantes eran capaces de establecer las relaciones lógicas que vinculan: el crecimiento de f' con la convexidad de f, el signo de f' con la monotonía de f, los ceros y valores extremos de f' con los valores extremos y puntos de inflexión de f. Lo importante de la tarea se relaciona con la capacidad de los estudiantes para vincular f' con f, ya que necesariamente debe analizarse que sucede con f'', por lo tanto, debe considerarse a f' como una función y a f'' como su derivada.

La figura muestra la gráfica de la derivada de f, esboza las posibles gráficas de f.

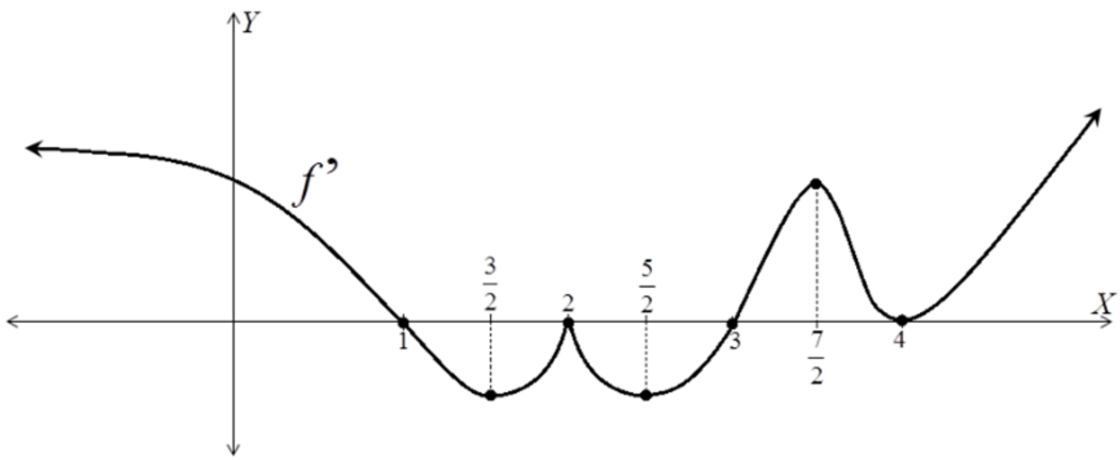

Figura 2. Enunciado de la Tarea N°3 del cuestionario

A partir del análisis de los protocolos de resolución que obtuvimos del primer instrumento y tomando en consideración la descripción de los niveles descritos por Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2006) logramos clasificar a los estudiantes en distintos niveles de comprensión del esquema de la derivada (intra-inter-trans). Por otra parte, este primer instrumento nos proporcionó información necesaria para la elaboración del segundo instrumento que fue aplicado a los estudiantes que poseían un nivel trans de comprensión del concepto y que posiblemente habían logrado tematizar el esquema. Este segundo instrumento correspondieron a entrevistas clínicas que tuvieron dos finalidades: (i) profundizar en el proceso de resolución de las tareas del cuestionario e (ii) indagar en las posibles manifestaciones y diferencias de la tematización del esquema. Estas entrevistas clínicas estaban conformadas por dos tipos de preguntas (Tabla 2), las primeras se relacionaban con modificaciones de las condiciones de las tareas propuestas en el cuestionario, con el fin de identificar si los estudiantes eran capaces de movilizar las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos a una situación nueva. Por su parte, el segundo tipo de interrogantes buscaba encontrar evidencia empírica referente a la tematización del esquema y a las relaciones que los estudiantes establecían entre las derivadas sucesivas de una función.

Tabla 2. Algunas de las preguntas planteadas en las entrevistas asociadas a cada una de las tareas propuestas en el cuestionario

Tarea	Pregunta
1	¿Existe algún cambio significativo en la gráfica de la función si eliminamos la condición c?
2	Al modificar la condición de que la gráfica dada es la de la función derivada y no la de la función ¿Qué pasa en los puntos $x = 7$, $x = 10$ y $x = 14$?
3	Explica cómo interpretas la información de x_0. ¿Qué puedes decir sobre las derivadas sucesivas derivadas sucesivas (f', f'' y f''') en $x = 1$, $x = 3$ y x_0? Justifícalo. (x_0 era un punto de inflexión de la primera derivada)

Análisis Y Resultados

Como primer paso realizamos un análisis de las respuestas de los 25 estudiantes a cada una de las tareas propuestas del cuestionario considerando como criterio de selección, la completitud de cada una de las tareas y del cuestionario en general. A partir de este análisis redujimos el número de sujetos de estudio a nueve casos los que clasificamos en los distintos niveles comprensión del esquema. Posteriormente, nos centramos en el análisis de tres estudiantes que denominamos A1, A3 y A4 los cuales fueron clasificados en un nivel de comprensión trans del esquema y manifestaban características que nos permitían inferir una posible tematización del mismo, a ellos les aplicamos las entrevistas clínicas. Con la información obtenida por medio del cuestionario y las entrevistas clínicas logramos observar que los estudiantes que habían tematizado el esquema muestran coherencia y flexibilidad del esquema al responder y argumentar correctamente a las modificaciones de las condiciones de las tareas, y además demostraban su capacidad de coordinación de los elementos matemáticos puntuales y globales entregados en la Tarea N°1, lo cual les permitió apreciar la contradicción presente en las condiciones analíticas y modificar la tarea con el propósito de resolverla correctamente. Lo anterior, es un indicador de la coordinación de los elementos matemáticos correspondientes a un segundo nivel, es decir, al par (f', f''). Esto es un elemento diferenciador de los estudiantes con el esquema tematizado, pues el coordinar solo los elementos matemáticos puntuales y globales en un primer nivel correspondiente al par (f, f') también podía llevar a la resolución correcta de la tarea, al no considerar las implicaciones geométricas de las condiciones entregadas. Para ilustrar lo anterior se presenta, a modo de ejemplo, un fragmento la tercera entrevista del estudiante A1 y otro del estudiante A4.

Fragmento de entrevista del estudiante A1

E: ¿Qué es creciente por $x<3$?

A1: La derivada primera. Es creciente por $x<3$ porque la derivada segunda es estrictamente positiva. Es estrictamente creciente. Es positiva por aquí (indicando a la izquierda de $x=3$) tiene un máximo en el tres, que estará por aquí (indicando en $x=3$)

E: ¿Quién tiene un máximo en el tres?

A1: La derivada primera tiene un máximo en el tres.

E: Ah, vale.

A1: Porque la derivada segunda cambia de signo, de positivo a negativo. Por lo tanto, pasa de crecer a decrecer.

E: ¿Y éste es el argumento que tú utilizas para decir que no puede ser cero la derivada en tres?

A1: Sí porque, por aquí es positiva y va creciendo (indicando a la izquierda de $x=3$). Por lo tanto, no puede cortar aquí, o sea no es posible.

Fragmento de entrevista del estudiante A4

A4: Es decir, el problema que tengo yo es que las condiciones “i” y “g” me están diciendo que la derivada tiene que ser creciente, pero a la vez positiva e ir a cero por otras condiciones anteriores, como la “c” creo (indicando a la izquierda de $x=3$).

E: ¿Por cuál tiene que ser positiva? Por la “g” ¿y qué significa que la derivada sea positiva? ¿cómo está su gráfico entonces?

A4: Está por encima del eje, de todos modos tiene que, la gráfica tiene que ir hacia el cero desde un punto positivo (indicando a la izquierda de $x=3$), pero a la vez tiene que ser creciente, lo cual es absolutamente imposible. Y el mismo problema está con la condición “h” y la condición “g” tiene que ser positiva, pero a la vez tiene que bajar, con lo cual, si estas en cero y tienes que ir a un punto positivo, tienes que subir, pero aquí te está diciendo que tienes que bajar, lo cual es imposible (indicando a la derecha de $x=3$). Con lo cual “i” y “h” se contradicen con la “g”.

Como se observa, tanto el estudiante A1 como el estudiante A4 establecen conexiones entre los elementos matemáticos que vinculan el signo de f'' con la monotonía y signo de f'. De esta forma, son capaces de observar la contradicción entre los elementos matemáticos globales y el puntual correspondiente a $f'(3)=0$.

Por otra parte, observamos diferencias entre los estudiantes que habían tematizado el esquema en cuanto al uso que hacían de las derivadas sucesivas mostrando diferencias en la forma de establecer y argumentar dichas relaciones, lo cual nos permitió definir tres tipos de conexiones relacionadas con las derivadas sucesivas de una función (Tabla 3), las cuales hemos denominado como conexiones: inicial, intermedia y avanzada.

Tabla 3. Conexiones entre las derivadas sucesivas de una función establecidas por estudiantes con el esquema de derivada tematizado

Conexión	Descripción
Inicial	Logra establecer conexiones entre; la función, la primera y segunda derivada.
Indirecta	Establece conexiones entre; la función, la primera, la segunda y tercera derivada haciendo uso de una función auxiliar ($F=f'$).
Directa	Establece directamente las conexiones entre; la función, la primera, la segunda y tercera derivada.

A modo de ejemplo, presentamos un fragmento de la entrevista al estudiante A4 que muestra evidencia de una conexión de tipo indirecta.

E: Ese punto x_0 que está ahí que correspondería a punto de inflexión de la primera derivada, porque estaría cambiando de concavidad, no es cierto ¿Qué cosas podrías decir sobre este punto x_0 con respecto a la segunda derivada o la tercera derivada?

A4: Ah, si cogemos la función ésta como la función normal digamos […].

E: O sea ¿cómo es eso de la función normal? Estás tomando que ésta…

A4: Sí eso es F ya no es f', le llamo F.

E: La estás llamando F, ok.

A4: Porque puedo llamarla así, básicamente. Con lo cual ahora, yo estoy hablando de un punto de inflexión normal, en la función primitiva, simplemente es un punto de inflexión. Me indica que la segunda derivada será cero.

E: ¿Pero tú segunda derivada sería…?

A4: La tercera derivada.

E: ¿Sería la tercera derivada?

A4: Sí, si yo digo que F, digamos f' la llamo F, con lo cual $f^{(n)} = F^{(n-1)}$, me voy ahí, y yo trabajo con la función que estoy acostumbrado y no cambio funciones, me es más fácil así.

Conclusiones

Hemos encontrado evidencias que los estudiantes con el esquema tematizado muestran coherencia y flexibilidad en el uso de los elementos matemáticos que conectan la función, la primera y segunda derivada, tanto en las relaciones directas como contrarias. Sin embargo, observamos diferencias en cuanto al establecimiento de estas conexiones con la tercera derivada, ya que mientras un estudiante solo logra establecer las relaciones entre la función, la primera y segunda derivadas; otro es capaz de hacer uso directo de ellas; mientras que un tercer estudiante para hacer uso de la tercera derivada, necesita referirse a una función auxiliar F que hace corresponder con f' y partir de las conexiones entre F, F' y F'' resuelve las tareas trasladando sus respuestas a f, f', f'' o f'''. Lo anterior, pone de manifiesto que el establecimiento de conexiones entre las derivadas sucesivas, en los estudiantes con el esquema tematizado, no es directo como podría inferirse e incluso se evidencia la existencia de matices entre dichas conexiones.

Finalmente, los resultados indican que lograr tematizar el esquema de la derivada, luego de finalizado un proceso de instrucción, no es fácil, lo cual queda de manifiesto en que lograron tematizar solo 3 de un total de 25 estudiantes con instrucción previa en cálculo diferencial.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M.,Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *MAA NOTES*, 37–54.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp.97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Baker, B., Cooley, L., y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 557-578.

Cooley, L., Trigueros, M., & Baker, B. (2007). Schema thematization: a framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(4), 370-392.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* 95–123.

García, M., Llinares, S., y Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International journal of science and mathematics education*, *9*(5), 1023-1045.

Piaget, J., y García, R. (1983, 1989). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México, España, Argentina, Colombia (Madrid): Siglo veintiuno editores, S.A.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de Las Ciencias*, *24*(1), 85–98.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, *17*(1), 5–31.