

Avances en Matemática Educativa. Investigación en el Aula.

## Rediseño E Implementación De Un Texto Guía De Cálculo Diferencial Para Estudiantes De Ingeniería En Chile

Elisabeth Ramos-Rodríguez, Jonathan Rojas-Valero, Betsabé González Yáñez  
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso  
elisabeth.ramos@pucv.cl, jonathan.rojas.valero@gmail.com,  
betsabe.gonzalez@pucv.cl

### Resumen

Este trabajo tiene por objetivo mostrar parte del estado del arte, el rediseño y algunos resultados de implementación -bajo el alero de la didáctica de la matemática- del primer capítulo del texto guía para futuros ingenieros, recién ingresados a la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Bajo el paradigma cualitativo, abordamos el estado del arte y el rediseño del texto actualmente empleado. Los resultados muestran una diversidad de formas en que se usa el texto, desde una simple sugerencia para el estudiante universitario, hasta un apoyo explícito, clase a clase. Por otro lado, se evidencia un empleo de textos que poseen un fuerte componente disciplinario (de la matemática), en desmedro de lo didáctico. Se presenta el rediseño de un texto que intenta impulsar la conexión entre la matemática y su didáctica como un medio que fortalezca el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática a nivel superior. Actualmente, dicho texto se encuentra en la etapa de implementación en dos cursos de cálculo diferencial de dos carreras de ingeniería. Tal aplicación ha tenido como producto el trabajo de estudiantes y profesores sobre dicho texto, evidenciando aspectos positivos de dicha implementación en base a la experiencia de los profesores a cargo de las asignaturas respectivas, quienes han dispuesto las bases para ajustar este rediseño en base a la implementación realizada.

**Palabras clave:** tareas matemáticas, texto guía, cálculo diferencial.

## Introducción

Históricamente, una herramienta empleada para favorecer el aprendizaje de los alumnos de primer año de Universidad en la asignatura de Cálculo I (cálculo diferencial para ingeniería) es el texto de apoyo diseñado hace dos décadas atrás por Arancibia y Mena (1996). Este texto se diseñó sin contar con una mirada explícita desde la didáctica de la matemática, pero el grado de profundidad con el que la matemática se trata y la gama de aplicaciones que contiene para la Ingeniería le ha otorgado a lo largo de los años, un reconocimiento tanto a nivel local (ya lleva 2 décadas siendo el texto guía en todas las Carreras de Ingeniería de nuestra Universidad) como a nivel nacional (por ejemplo, la Universidad Diego Portales lo tiene en varios de sus programas de estudios como texto de referencia) e internacional (en Universidades de extranjeras, como la Universidad Nacional de Córdoba).

Por otro lado, el docente de nuestra Institución tiende a una enseñanza tradicional y conductista. Estudios realizados (por ejemplo, Guzmán, Ramos y Mena, 2009) en nuestra Universidad, nos evidencia que, en el caso de la axiomática de los números reales (tema que pretendemos tratar en este proyecto), los profesores la presentan con una metodología expositiva, para que, finalmente no sea materia que consideren en las pruebas. Nos planteamos, pues, el fortalecimiento de la enseñanza impartida a partir de las sugerencias que se proponen en el texto guía. Este trabajo además de presentar elementos del estado del arte para desarrollar un *Experimento de Enseñanza* (Plomp, 2010) (es decir, el diseño, planificación y análisis de una unidad didáctica) avanza en el diseño del capítulo primero del texto propiamente tal, como herramienta para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de los futuros ingenieros, recién ingresados a nuestra casa de estudios. La nueva versión contempla sistemas de reforzamiento, seguimiento y evaluación, así como aspectos relativos a estrategias de aprendizaje.

Los resultados de esta experiencia nos permitirá visualizar en qué grado la

reformulación del texto guía apoya la propuesta de enseñanza basada en él y por consecuencia, aportan al proceso de inserción a la universidad de las nuevas generaciones de estudiantes. Aprovecharemos los beneficios que la didáctica de la matemática nos entrega para el rediseño de un texto que se utiliza desde ya dos décadas en una gran cantidad de estudiantes novatos, en específico de las Carreras de Ingeniería de la universidad.

### Marco de Referencia

Para la construcción del texto, en específico, para la selección de tareas matemáticas, nos basamos en la clasificación de tareas propuestas por Stein y colaboradores ((Stein, Smith, Henningsen y Silver, 2000). Una descripción de cada nivel de demanda cognitiva se ilustra en la tabla 1, sintetizada a partir del trabajo de Stein y colaboradores.

Tabla 1. Niveles de demanda cognitiva de las tareas

Nivel	Tipo	Descripción
Baja demanda cognitiva	Memorización	Tareas para el aula automáticas, sólo se requiere la memoria, sin realizar procedimientos.
	Procedimientos sin conexiones	Algoritmos que requieren uso de un procedimiento, pero no demandan establecer conexiones entre conceptos matemáticos.
Alta demanda cognitiva	Procedimientos con conexiones	Involucran varios conceptos matemáticos subyacentes, con múltiples representaciones, que ayudan a desarrollar el significado de la tarea.
	Haciendo matemáticas	Demanda un pensamiento complejo y no algorítmico, en el que se debe explorar y entender la naturaleza de los conceptos matemáticos.

Se destaca la *demanda cognitiva* puesta en juego en las tareas, distinguiendo tareas de nivel cognitivo bajo (memorísticas, procedimientos sin conexión) y alto (procedimientos con conexión y haciendo matemáticas). Este marco de tareas referente al nivel cognitivo puesto en juego en ellas, pone el énfasis en la

actuación del profesor en clase, qué se materializa en las tareas que selecciona y la forma de gestionarlas, determinará maneras en que su instrucción apoya o inhibe la participación de los estudiantes en procesos de alto nivel cognitivo, y con ello en qué grado su actuación repercute en el aprendizaje del alumno.

## **Metodología**

Con una metodología cualitativa se enmarca este trabajo descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). El estudio se encuadra bajo el enfoque de la *Investigación basada en el Diseño*, ilustrado por Plomp (2010) en tres etapas: investigación preliminar, diseño de prototipos, y, evaluación; para este trabajo detallaremos lo acontecido en la etapa 1 y en parte, la etapa 2.

Los instrumentos de recogida de información son un cuestionario, libros de apoyo a la asignatura de cálculo, de diferentes universidades chilenas y el texto guía para estudiantes de cálculo diferencial de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Además de las grabaciones de las sesiones implementadas y de las entrevistas a los docentes del curso.

Para el diseño de prototipo de enseñanza nos enfocamos en un texto que emerja del capítulo primero de la versión actual de texto guía (Arancibia y Mena, 1985). Se emplea la validación interna para el instrumento diseñado, considerando expertos tanto del área matemática como didáctica de la matemática.

## **Resultados**

Los resultados se plasman a través de la etapa 1 y 2 de la investigación basada en el diseño.

### **Investigación basada en el diseño, etapa 1: estado del arte**

El estado de arte se plasma en Ramos, Vásquez, Rojas y González (2015), donde detallamos la apreciación y uso que tiene el texto actualmente empleado por los docentes de nuestra universidad. Se observa una tendencia a considerar

el texto como elemento secundario en el proceso de enseñanza aprendizaje, otorgándole un valor relevante a su estatus matemático más que al didáctico. Bajo la consigna de mejorar los aprendizajes de los estudiantes, se hace necesaria una modificación y rediseño del texto inicial, con el objetivo de generar un instrumento que sea consistente en relación al quehacer de los docentes y las herramientas disponibles para el avance curricular y aprendizaje de los estudiantes de Ingeniería, constituyéndose el texto de esta forma, como un puente que permita lograr una transposición didáctica acorde al contexto de cada curso.

También en Ramos, Vásquez, Rojas y González (2015), estudiamos textos guía empleados en otras universidades, en donde solo uno de ellos, al dar a conocer la estructura de cuerpo, ordenado y completo, menciona la densidad de los números racionales o irracionales. Al comparar el tratamiento de los textos complementarios con los del texto guía, vemos que hay diferencias en esto, debido a que el texto guía lo hace de manera formal. La mencionada modificación al texto guía, debe contemplar sin duda, una dualidad entre los aspectos formales o matemáticas puros y modelos matemáticos aplicados en diversos contextos, lo cual permitan tanto al profesor como a los estudiantes, dar sentido a la matemática con la cual trabajan en cada una de sus clases, logrando de esta forma, un aprendizaje de los contenidos en cuestión.

### **Investigación basada en el diseño, etapa 2, reformulación del texto**

Teniendo en cuenta el estado del arte, se establecen directrices para el rediseño del capítulo 1. A continuación mostraremos algunos ejemplos de los elementos relevantes que componen este nuevo capítulo.

- **Desafío inicial.** Se diseña cada capítulo del texto considerando un desafío inicial, tomando de base la noción de situación didáctica planteada por Brousseau (1986), nos atrevemos a plantear a l inicio de cada tema un desafío que permita al alumno enfrentarse a sus conocimientos previos y a partir de ellos construir los nuevos junto al docente. En la figura 1 se

ilustra uno de los desafíos propuestos en el texto.

Dos personas salen simultáneamente de dos ciudades, A y B, una en dirección de la otra. La primera persona camina  $2 \frac{km}{h}$  más de prisa que la segunda y llega al lugar de donde partió B una hora antes de que llegue B al lugar de donde partió A. Si ambas personas distan, inicialmente,  $24km$ . ¿Cuántos  $km$  recorre cada una de ellas en una hora? (Ayuda:  $velocidad = \frac{distancia}{tiempo}$ ).

Si consideramos  $v \frac{km}{h}$  la velocidad de A, entonces la velocidad de B será de  $(v - 2) \frac{km}{h}$ .

a. Expresa, en términos de  $v$ , el tiempo  $t_1$  que demorará A.  
 b. Expresa, en términos de  $v$ , el tiempo  $t_2$  que demorará B.

Completa las siguientes tablas colocando distintos valores a “ $v$ ” cuando corresponda:

$V$										
$t_1$										

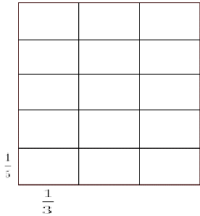
$V$										
$t_2$										

Figura 1. Ejemplo de desafío inicial del tema “axiomas de cuerpo”

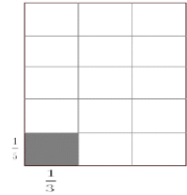
- Demostraciones. A raíz de las observaciones de los profesores encuestados en Ramos, Vásquez, rojas y González (2015) se decide concretar menos demostraciones en la nueva versión de capítulo, considerando indispensable la demostración de que  $\sqrt{2}$  es un número irracional y la que menciona que entre dos números racionales existe al menos un racional.
  - Ejemplos y ejercicios. Éstos contiene un relevante elemento didáctico, se enfoca en la tipología de tareas propuesta por Stein y colaboradores (Stein, Smith, Henningsen y Silver, 2000). Un ejemplo de tarea del tipo “procedimiento con conexiones” se ilustra en figura 2.

¿Cómo multiplicar  $\frac{1}{3}$  con  $\frac{1}{5}$  ?

Consideremos el cuadrado de lado una unidad.  
 Uno de los lados lo vamos a dividir en 3 y el otro en 5



Así se obtiene que el área de uno de los rectángulos que se forman es  $\frac{1}{15}$



Como 15 de ellos “completan” el cuadrado y  $15\left(\frac{1}{15}\right) = 1$ , se tiene que el área del rectángulo es  $\frac{1}{15}$   
 y cómo el área de un rectángulo es base por altura se tiene que  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$  es igual a  $\frac{1}{15}$ .

Figura 2. Ejemplo de tarea de tipo “procedimiento con conexiones”

Un ejemplo de tarea sin producción se presenta en la figura 3.

Para la expresión algebraica  $P(x) = \frac{2x+5}{6x+13}$ , indique cual es la restricción y cuál es el conjunto Restricción o de Definición.  
 Por la axiomática vista,  $P(x)$  tiene sentido como número real si y solo si  $6x+13 \neq 0$ , esto es  $x \neq -\frac{13}{6}$ . Por tanto el Conjunto de Definición o Restricción es  $\square - \left\{ -\frac{13}{6} \right\}$ .

Figura 3. Ejemplo de tarea del tipo “procedimientos sin conexiones”

### Investigación basada en el diseño, etapa 2, implementación del texto

La implementación del texto rediseñado se está llevando a cabo, en este semestre académico, en dos cursos de cálculo diferencial. Ambos cursos cuentan con aproximadamente treinta estudiantes de primer año de ingeniería. Tales alumnos, se encuentran cursando la asignatura por segunda vez.

En lo práctico, se ha evidenciado mediante la observación y registro de clases,

una actitud positiva por parte de los estudiantes frente a la utilización del texto diseñado, tanto en aspectos cognitivos como actitudinales, lo cual es avalado por las siguientes evidencias (figura 4).

Entrevistador: *En comparación al semestre pasado ¿qué ventajas o desventajas encuentras en el uso del texto?* (pregunta dirigida a viva voz a los alumnos, se detallan algunas respuestas)

Alumno 1: *El otro libro era de tamaño super incomodo, éste está bien para andarlo trayendo en la mochila ...además que todo está explicado en base al orden de la clase .*

Alumno 2: *Me parece muy bueno el libro por el tema de apoyo en ejercicios, la matemática que hay en ejercicios , he aprendido mucho más, agradezco mucho que hayan hecho este libro, me ha ayudado bastante. Para la próxima versión ¿vendrán más contenidos?*

Entrevistador: *si*

Alumno 2: *súper*

Figura 4. Apreciaciones de los estudiantes que están usando el texto

Se observa cómo los estudiantes valoran de manera positiva el texto, como una herramienta que favorece su proceso de aprendizaje, otorgando la importancia de la matemática presente en el texto. Además observan que es un texto que guía su aprendizaje.

Por otra parte, los profesores a cargo, han desarrollado labores de docencia en la Universidad por más de 10 años, y cuentan con vasta experiencia en la dictación del curso en cuestión, y de forma particular, han desarrollado la enseñanza de la unidad de Números Reales en variadas oportunidades. De esta forma, los profesores involucrados, han vivenciado los cambios que se han contemplado en el nuevo texto de estudio, donde, en contraste con la experiencia y conocimientos de cada docente, se han podido establecer, por



parte de ellos, algunas directrices que nos permitan complementar, fortalecer y retroalimentar el rediseño del texto, a fin de realizar las modificaciones respectivas, a fin de que respondan no solo a aspectos propios de esta investigación sino que además, a las circunstancias reales frente a las cuales el texto será utilizado.

Respecto al parecer de los docentes manifiestan diversos comentarios (figura 5, 6 y 7)

El libro se ve bastante bueno, me gusta, los alumnos están quedaron fascinados, incluso extraje la tarea para la próxima clase del libro.

Figura 5. Apreciaciones de uno de los docentes donde se implementa el texto

Cabe destacar que el docente que hace este comentario, lleva trabajando con el libro anterior más de 20 años, por lo que teníamos la inquietud de que podría tener cierto rechazo al cambio de texto. Aun así, se puede apreciar que su postura inicial fue positiva.

Profesor: *“¿sabes lo que es bueno? Que como que te “guía”, que es la idea de “texto guía”, te guía el trabajo, pero para eso necesitamos que las respuestas estén correctas*

Figura 6. Comentario de uno de los profesores de los cursos donde se implementó el texto

En este comentario el docente hace mención a la idea basal del texto: ser un texto guía para el estudiante, según su criterio el texto lo cumple. Esto nos deja satisfechos sobre la forma en que hemos presentado el tema y el cumplimiento del rol como libro.

Por otro lado, el profesor hace mención a una debilidad de esta versión, los errores en las soluciones de algunos ejercicios, aspecto que se espera solucionar rápidamente.

Profesor: *También podríamos mencionar otras cosas, como hay cosas de gusto*

Entrevistador: *¿cómo cuál?*

Profesor: *yo acá [señalando el capítulo de valor absoluto], por ejemplo, el valor absoluto*

Entrevistador: *¿no le pondrías a esto “valor Absoluto”?*

Profesor: *no, me refiero a que hubiese definido de inmediato como noción de distancia en los reales.*

Figura 7. Extracto de la entrevista a uno de los profesores de los cursos donde se implementó el texto

En esta conversación el profesor hace referencia a una cuestión de la disciplina matemática, a la formalidad de los contenidos, enfatizando la relevancia de definir el concepto de valor absoluto desde la distancia euclidiana. Esto nos pone en un escenario para reformular esta sección del libro considerando la experticia del docente de aula.

Dado que aún se está desarrollando la etapa de implementación, se continúa vigilando dicho proceso, con miras a rescatar todos los aspectos que nos permitan generar una reformulación acorde al contexto institucional.

## **Conclusiones**

Los elementos estudiados en el estado del arte –etapa 1 de la investigación basada en el diseño- referente al tema, nos permitió posicionarnos a la hora de reconstruir el texto guía, parte de la etapa 2 de la investigación basada en el diseño.

Su rediseño obedece a varios aspectos. En primer lugar a una mirada actual a las demostraciones, qué relevancia tiene en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática de nivel superior. En segundo lugar a las tareas matemáticas desarrolladas o propuestas, de qué índole deben ser y cuáles

seleccionar. La forma de introducirnos en cada tema, considerando la noción de situación didáctica planteada por Brousseau (1986) también fue un aspecto central en el rediseño.

Por otro lado, en el desarrollo de la implementación, se pueden visualizar diversos cambios frente a la utilización del texto. Este ha generado una actitud mayormente positiva por parte de los docentes y de los estudiantes, tanto en aspectos de presentación del texto como en aspectos más bien teórico-didácticos.

Se espera que el conjunto de todos estos elementos, nos abra el camino hacia la mejora de los aprendizajes de las nuevas generaciones de estudiantes de nuestra universidad.

## Referencias

Arancibia, S. y Mena, J. (1996). *Cálculo Diferencial para Ingeniería*, primera edición. Ediciones Universitarias.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches. En *Didactique des Mathématiques*. Vol 7. N° 2. 33 - 115.

Guzmán, I., Ramos, E. y Mena, A. (2009). ¿Cómo se enseña en la Universidad? El caso de los Números Reales. En Orus P., Zamora L. y Gregori P. (Ed.), *Teorías y Aplicaciones del Análisis Implicativo*. España.

Hernández, R., Fernández C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Plomp, T. (2010). Educational design research: An introduction. En T. Plomp y N. Nieveen (Eds.), *An Introduction to Educational Design Research* (pp. 9-35). Enschede, the Netherlands: SLO.

Ramos-Rodríguez, E., Vásquez, P. Rojas, J. y González, B. (2015). *Un*

*experimento de enseñanza basado en la actualización del texto guía de Cálculo Diferencial para estudiantes de Ingeniería en Chile, su estado del arte.* En XXII Congreso Internacional de Educación y Aprendizaje. España.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. y Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development.* Reston: NCTM.