"Agujeros" en las Matemáticas de Secundaria y Bachillerato

Luna Mª Gómez Martín; Blanca Souto Rubio

email: lunagomezmartin@gmail.com; bsoutopia@gmail.com

Colegio Nuestra Señora de las Escuelas Pías de Carabanchel,

Colegio Ágora

RESUMEN

En ocasiones se dan en el aula situaciones donde los alumnos plantean dudas razonables que no obtienen respuesta adecuada ni por parte del profesor ni del libro de texto. A este tipo de cuestiones las hemos denominado "agujeros". En esta comunicación analizamos algunos ejemplos de agujeros derivados de nuestra experiencia docente, agrupándolos en torno a tres criterios: modelos establecidos que dejan de ser válidos; falta de contemplación en los textos; falta de rigor. La profundización en los fundamentos matemáticos que rodean a cada ejemplo nos lleva a proponer actuaciones didácticas que ayuden a evitar posibles dificultades en el aula.

Conocimiento Matemático del Profesor, Pensamiento Matemático Avanzado, Aprendizaje Significativo, Visualización, Análisis Matemático, Ecuaciones.

1. Introducción

Hay momentos en el aula en los que nos encontramos con caras de perplejidad o de estupor por parte de los alumnos. A veces sucede que el profesor o la profesora está explicando algo que hasta entonces los alumnos entendían perfectamente pero que ahora, aplicado a otro contexto, ¡se hace de forma diferente! Los más atrevidos pueden preguntar extrañados: "*¿y eso por qué?*" O puede ocurrir también que a alguna alumna, más inquieta y curiosa que los demás estudiantes, se le ocurra variar ligeramente las condiciones de un problema o un ejemplo sobre el que se haya trabajado y que haga una de esas temidas preguntas del tipo, "*¿y si…?*" Otras veces nos encontramos con el alumno que lo cuestiona todo y está pendiente de cuándo cometemos algún error o decimos alguna incoherencia y, ante una hipótesis no formulada adecuadamente, puede exclamar "*¿¡y eso cuándo me lo has dicho!? Pues eso no lo pone en ningún sitio*".

Como profesores podemos encontrarnos con que dudamos al responder ante este tipo de situaciones. Más aún si, como es nuestro caso, estamos empezando nuestra trayectoria como profesoras de Secundaria y Bachillerato y tenemos a las espaldas pocos años de experiencia docente. Al buscar respuestas en los libros de texto que manejamos para preparar las clases, nos hemos encontrado a veces con poca ayuda: listas de reglas sin explicaciones, omisiones de hipótesis en propiedades de objetos matemáticos, falta de ejemplos relevantes, etc. Al intentar responder a estas cuestiones con los conocimientos adquiridos en la Universidad, nos encontramos con que muchos de los conceptos involucrados en ellas eran tan básicos para el nivel universitario que los manejábamos con mucha naturalidad pero sin reflexionar suficientemente sobre ellos para después poder explicarlos. Lo mismo ocurre en los apuntes y los manuales que utilizamos durante la carrera, a excepción de algún texto escrito expresamente con la intención de facilitar el paso del Instituto a la Universidad como la colección de Anaya editada por José Manuel Gamboa.

Antes situaciones de este estilo, las respuesta del tipo "esto es así porque sí" pueden generar mucha a los alumnos, numerosas dificultades y, sobre todo, una gran inseguridad por no sentirse ya capaces de discernir cuándo o cómo aplicar conocimientos y herramientas que ya poseían y que creían haber aprendido correctamente. Y se produce así un vacío. Un vacío de explicación que conlleva un vacío en la comprensión y la confianza de los estudiantes. De repente, las Matemáticas se presentan como una ciencia lejana en la que decidir si algo es correcto o no queda fuera de su alcance. Desde el momento en que se enfrentan a uno de estos vacíos sienten que, para avanzar, necesitan del juicio externo de un maestro que les guíe. Esto es todo lo contrario a lo que nos gustaría transmitir en nuestras clases. Defendemos que las Matemáticas son rigurosas, coherentes y bellas, pero sobre todo una ciencia en la que cualquiera puede llegar, a través de la deducción y la argumentación, a resolver situaciones matemáticas que se le planteen.

Por eso nos parece muy importante detenernos a analizar estas cuestiones matemáticas que conducen a esta combinación de perplejidad e incomprensión por parte de los alumnos y del vacío de una explicación matemática coherente y convincente por parte de los textos o del profesor. A este tipo de cuestiones las hemos denominado "*agujeros*" en las Matemáticas. ¿Y por qué en las Matemáticas y no en el conocimiento del alumno o del profesor? En primer lugar, no las consideramos agujeros en el conocimiento del alumno porque creemos que son situaciones donde las dudas que pueden plantear son razonables, y no derivadas de una falta de estudio o una incapacidad manifiesta en la comprensión de las Matemáticas. En segundo lugar, no las consideramos agujeros en el conocimiento del profesor porque suponemos que éste posee una buena base matemática derivada de su preparación universitaria y suponemos en él una buena predisposición para tratar investigar y ayudar a los alumnos pero que, por el tipo de cuestiones del que se tratan, no le resulta fácil encontrar una respuesta adecuada.

En esta comunicación presentamos nuestras reflexiones respecto a cómo hacer frente a estos agujeros y ofrecemos alguna respuesta a profesores que, quizá por estar empezando como nosotras, se pueden haber encontrado en situaciones similares a las que hemos descrito. Este es el objetivo de esta comunicación donde exponemos ejemplos de agujeros, identificados a raíz de nuestra experiencia, y que responden a tres criterios diferentes de selección. Para hacer esta exposición de ejemplos comenzamos poniendo de relieve en qué consiste el agujero, después revisamos los fundamentos matemáticos que lo rodean y, desde esta comprensión, proponemos algunas actuaciones didácticas en el aula.

2. “Ah pero, ¿que esto ya no vale?”

Los primeros ejemplos de agujeros que vamos a analizar están relacionados con modelos que les sirven a los alumnos durante un tiempo concreto, pero que al introducir un nuevo concepto dejan de ser válidos. Sin entrar a analizar qué se podía haber hecho con anterioridad para evitar que aparezcan este tipo de obstáculos, vamos a exponer, a través de algunas situaciones, cómo podemos suavizarlos o cómo podemos actuar una vez han surgido.

2.1. ¿Te falta un tornillo? Toma una tuerca

Los números enteros son un tema difícil tanto de aprender como de enseñar. De hecho es uno de los que más dificultades supone a los estudiantes en su entrada en Secundaria. Ocurre además que, si no los aprenden bien, constituyen una grave carencia que arrastran para adquirir conocimientos futuros.

Estos nuevos números, que además de los naturales y el cero involucran a los negativos, resultan en parte complicados por romper modelos y creencias fuertemente establecidas: *“¿qué es eso de que pueda restar a un número otro mayor?; ¿cómo puede ser que al sumar dos números el resultado sea menor?; ¿y que al restar se pueda obtener un número mayor que el minuendo?* “.

Los libros de texto de 1º ESO, y los profesores, hacemos un esfuerzo por dar sentido a estas cuestiones cuando las introducimos por primera vez, pero no siempre tenemos éxito y al final los alumnos acaban memorizando reglas que aplican mecánicamente y sin control, dando lugar a numerosos errores. Este es el caso de la famosa tabla que se muestra a continuación:

+ · + = +
+ · - = -
- · + = -
- · - = +

Los alumnos acaban por aplicar esta regla sin control dejando de saber hacer cosas que al principio entendieron bien:

- 2 - 2 = 4 (negativo y negativo, positivo)

Como recurso para dar sentido a estas reglas, hemos encontrado interesante el enfoque que hace Maria Antonia Canals en uno de sus dossiers [2]. A través de distintas situaciones de la vida cotidiana (ver Figura 1), muestra que es coherente eso que los alumnos repiten mecánicamente de que “menos por menos sea más” o, en su caso aplicado a la resta de negativos, que “al restar una cantidad negativa la cantidad final aumente” (p.53-54).

Si lo que decimos es…	**En realidad …**
Sí que es verdad	**Es verdad**
Sí que es mentira	**Es mentira**
No es verdad	**Es mentira**
No es mentira	**Es verdad**

Si lo que hacemos es…	**En realidad …**
Ganar puntos positivos	**Es ganar**
Perder puntos positivos	**Es perder**
Ganar puntos negativos	**Es perder**
Perder puntos negativos	**Es ganar**

Figura 1: Suma y resta de enteros y conexión con la vida cotidiana

Otro enfoque distinto para introducir los números enteros consiste en utilizar materiales manipulativos. El uso de este tipo de materiales presenta diferentes ventajas: son dinámicos y motivadores, a través de una secuencia bien estructurada permiten la construcción individual del conocimiento, etc. Para el caso de los enteros, hemos comprobado que además ofrecen al alumno la posibilidad de formarse imágenes mentales asociadas a este tipo de números. Al ser muy abstractos para ellos, los materiales se convierten en una potente herramienta con la que razonar y a la que recurrir cuando se quedan bloqueados sin saber qué hacer.

La propuesta manipulativa que hacemos para los enteros utiliza tuercas para los números negativos y tornillos para los positivos. Las tuercas y los tornillos son un material barato que posee la cualidad intrínseca de los enteros de anularse respectivamente. Igual que añadir +1 y -1 a una cantidad es no añadir nada (es decir, un positivo con su opuesto negativo se anulan) una tuerca (un negativo) se atornilla a un tornillo (un positivo) y dejan de contabilizar en la operación que estemos realizando manipulativamente. Este principio no se presenta de forma tan clara para los alumnos en otros materiales manipulativos como fichas rojas (negativos) y azules (positivos), pero es fundamental para comprender estos números y para desarrollar la noción clave de opuesto, que después jugará un papel importante en otros momentos, por ejemplo cuando comiencen con el álgebra. En la Figura 2 se muestra un ejemplo de cómo se puede utilizar este material para dar sentido a la resta de negativos.

(-2) - (-3) = (-2) + (+3)	*Transformamos la resta en suma, pues ya se ha explicado que "restar es sumar el opuesto".*
	*Si nos liamos con los signos podemos hacer o imaginar esta operación manipulativamente: "a dos tuercas le añado tres tornillos".* *"Las dos tuercas se atornillan con los dos tornillos, y sobra uno"*
(-2) - (-3) = (-2) + (+3) = -2 + 3 = 1	*El resultado es +1. Al final lo escriben numéricamente.*

Figura 2: Ejemplo de uso de tuercas y tornillos para operar con enteros.

2.2. ¿Cociente o resto?

Un ejercicio clásico del tema de trigonometría consiste en dibujar en la circunferencia ángulos mayores de *360^o* o *2π rad*. Cuando el profesor lo explica queda evidente que los ángulos mayores que *360º* o *2π rad* surgen de haber dado varias vueltas a la circunferencia y pararse en algún sitio. Hasta aquí la mayoría lo entiende. Cuando llega el momento de explicar el procedimiento para números altos es cuando podría producirse la siguiente situación:

- Profesor: *Para saber a qué ángulo de la primera vuelta es equivalente 1340^o, vamos a dividir por 360^o y el resto será el ángulo equivalente que buscamos. Hagámoslo.* (El profesor comienza a dividir)
- Juan: (Levanta la mano). *Profe, ¿por qué no tachas los ceros si da igual y es más fácil?*
- Profesor: (Dudando). *Vamos a ver qué pone en el libro de texto.*
- Juan: *Aquí pone que no pueden simplificarse los ceros pero pone por qué* (ver [1], p. 69).
- Profesor: *Bueno, si lo pone en el libro lo haremos así*.
- Juan: *Vale aunque no entiendo muy bien por qué a veces si se puede hacer y por qué otras veces no se puede…*

Este ejemplo pretende ilustrar cómo realmente no se está respondiendo a la duda en cuestión. Además, los libros de texto que hemos observado, o no ponen nada al respecto del procedimiento de reducción a la primera vuelta o ponen la observación de que no pueden simplificarse los ángulos pero no indican el motivo.

También nos permite observar claramente cómo, por variar el contexto, un procedimiento muy utilizado por los alumnos hasta ese momento deja de poderse utilizar. Con lo cual, la situación genera en el alumno la duda de cuándo es válido el procedimiento y cuándo no y deja una sensación de arbitrariedad que le hará dudar cuando tenga que utilizarlo. Además, la inseguridad hará que el alumno opte por memorizar el proceso más que por entenderlo y aplicarlo.

Veamos qué está pasando en realidad con este procedimiento:

Partimos de la regla de la división con D y d múltiplos de 10.	$D = d.c + r$
Si dividimos dividendo y divisor entre 10, nos quedaría la siguiente expresión, que no es equivalente a la que teníamos antes.	$\frac{D}{10} = \frac{dc}{10} + r$
Para que realmente fuera equivalente, tendríamos que haber dividido también el resto quedando la expresión de la siguiente manera:	$\frac{D}{10} = \frac{dc}{10} + \frac{r}{10}$
Como hemos partido del supuesto de que D y d eran múltiplos de 10, podemos simplificar obteniendo la siguiente expresión donde se observa que el cociente c es el mismo que al inicio, pero el resto r' ha quedado dividido por 10.	$D' = d'c + \frac{r}{10}$

Entonces, llegamos a la conclusión de que una división se puede simplificar si lo que nos interesa es el cociente. Sin embargo si, como en el caso de reducción de ángulos al primer cuadrante, lo que nos interesa es el resto *r*, se debe tomar una decisión entre una de las dos opciones siguientes. O bien simplificamos dividiendo entre 10 dividendo y divisor y posteriormente multiplicamos el resto por 10 para obtener el resto deseado; o bien, no simplificamos y dividimos con los ceros y por tanto el resto que obtenemos es directamente el que buscamos.

Si los alumnos entienden esto probablemente sean capaces de identificar sin problemas en qué contextos pueden aplicar lo que ya sabían y en cuáles no.

Cabe notar que esto mismo que hemos hecho con el *10*, podría hacerse con cualquier otro número. Por ejemplo, en el mismo tema, si queremos reducir el ángulo *19π rad* a la primera vuelta de la circunferencia, tendríamos que hacer *19π:2π*. Siguiendo la primera de las opciones anteriores, podemos simplificar *π*, dividir *19:2* obteniendo cociente *9* y resto *1* y por último multiplicar el resto por *π*. Así obtendríamos de un modo sencillo, que no suele aparecer en los libros, el ángulo equivalente a *19π rad* en la primera vuelta de circunferencia que en este caso es *π rad*.

2.3. Pero entonces, ¿cuándo puedo simplificar?

A lo largo de la vida de los alumnos las ecuaciones evolucionan, complicándose cada vez más. A consecuencia de esto, certezas que se habían consolidado a lo largo del tiempo, se ven cuestionadas e incluso invalidadas. Este es el caso de la simplificación de términos en la resolución de ecuaciones. A continuación mostramos los pensamientos que podría tener un alumno ante dicha evolución.

- Situación 1: "*Cuando resolvemos ecuaciones de primer grado con denominadores numéricos, lo hacemos así. Esto lo entiendo.*"

$$\frac{x+2}{4} + \frac{x-3}{3} = \frac{6-x}{6}$$

Reducimos a común denominador, mcm(3,4,6)=12

$$\frac{3(x+2)}{12} + \frac{4(x-3)}{12} = \frac{2(6-x)}{12}$$

Multiplicamos ambos miembros por 12 y simplificamos los denominadores.

$$3(x+2) + 4(x-3) = 2(6-x)$$

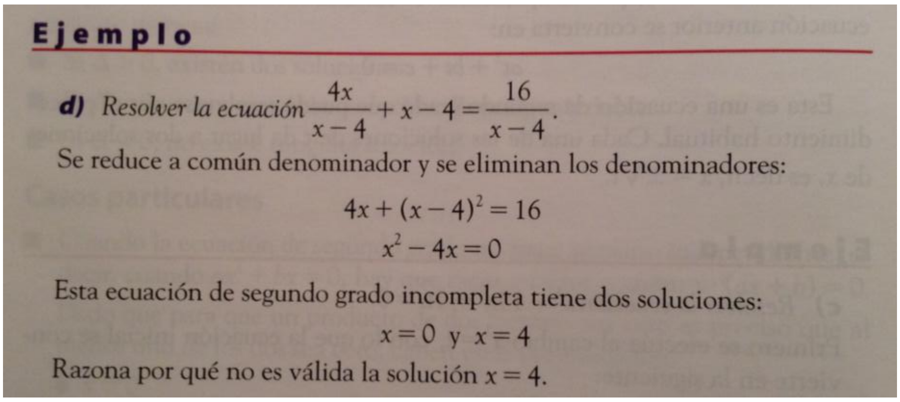
Quitamos los paréntesis aplicando la propiedad distributiva

$$3x + 6 + 4x - 12 = 12 - 2x$$

Trasponemos términos y despejamos la x.

$$9x = 12 + 6; \quad x = \frac{18}{9} = 2$$

- Situación 2: *"Sin embargo al repetir el mismo proceso con una ecuación con fracciones algebraicas, ¡dice el libro que salen soluciones no válidas! ¿Y eso por qué? Encima no me lo explica* (ver Figura 3)".



Ejemplo

d) *Resolver la ecuación* $\frac{4x}{x-4}+x-4=\frac{16}{x-4}$.

Se reduce a común denominador y se eliminan los denominadores:

$$4x+(x-4)^2=16$$
$$x^2-4x=0$$

Esta ecuación de segundo grado incompleta tiene dos soluciones:

$$x=0 \text{ y } x=4$$

Razona por qué no es válida la solución $x=4$.

Figura 3: Ejemplo de ecuación con fracciones algebraicas de un libro de texto [1] (p. 44)

- Situación 3: *"Tampoco entiendo por qué en esta ecuación no puedo simplificar sen x. ¿Por qué me dice el profesor que se pierden soluciones? Si yo me acuerdo que nos dijeron que cuando resolvíamos ecuaciones podíamos multiplicar o dividir por cualquier número ambos miembros para obtener ecuaciones más sencillas con las mismas soluciones… ¡Vaya lío!"*

$$sen\ 2x = sen\ x$$
$$2\ senx\ cosx = sen\ x$$

- Profesor: *Sustituimos cada miembro por sus expresiones equivalentes en función de seno y coseno. Y ahora debéis tener cuidado. No podríamos simplificar sen x porque estaríamos perdiendo soluciones.*

$$2\ senx\ cosx - sen\ x = 0$$
$$senx\ (2\cos x - 1) = 0$$

- Profesor: *De hecho todas las que cumplen que sen x =0. Lo mejor es pasarlo restando y sacar factor común.*

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} sen\ x = 0\ , x = 0° + 360k; k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = \frac{1}{2}; x = 60° + 360k; k \in \mathbb{Z} \\ \qquad\qquad x = 300° + 360k; k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

- Profesor: *Y ahora ya sí, al igualar cada factor a 0 se obtienen todas las soluciones de la ecuación.*

Este tipo de situaciones genera gran inseguridad en los alumnos que se preguntan perplejos: *"¿pero entonces no siempre se puede simplificar?; ¿y cómo distingo yo cuándo sí y cuándo no?"* Ante esta situación, creemos que es importante detenerse y explicitar lo máximo posible qué está ocurriendo, como se hace a continuación.

La respuesta matemática a la cuestión de cuándo se puede o no simplificar es sencilla: "siempre que no se divida por cero". Por ejemplo, en la Situación 1 se pueden simplificar los denominadores porque estamos multiplicando por *12*, un número distinto de *0*. Sin embargo, para simplificar en la Situación 2, se multiplica por *(x - 4)*, polinomio que se anula en *4*. Al hacer esto podemos introducir soluciones que no tienen sentido porque anulan los denominadores, que es lo que ocurre con *x = 4* [1]. Habría que explicar a los alumnos que la forma correcta de hacer esta simplificación sería excluyendo antes las raíces de los denominadores. Si esto les parece muy complicado, existe una segunda posibilidad, que es la que elige uno de los libros de texto consultados [1]. Podemos despreocuparnos durante todo el proceso de resolución de los valores de *x* donde la ecuación no está definida pero entonces, al final, es imprescindible "comprobar todas las soluciones" (p. 44).

Lo que ocurre en la Situación 3 es distinto, pero también está relacionado con la división entre cero. En este caso, al simplificar *sen x* se excluyen soluciones de la ecuación, ya que estamos suponiendo de forma implícita que *sen x ≠ 0*. Si quisiésemos hacer esta simplificación de forma correcta deberíamos distinguir dos casos:

- *sen x = 0*, caso que me da el primer conjunto de soluciones.
- *sen x ≠ 0*, caso en que ya puedo dividir ambos miembros por *sen x* y obtengo el segundo conjunto de soluciones: $2\, \cancel{senx}\, cosx = \cancel{sen\, x};\ \ 2\cos x = 1; \cos x = \frac{1}{2}$

De nuevo, este camino puede resultar complicado y confundir a los alumnos. En este caso lo que podemos recomendarles, como hace el profesor del ejemplo, es abstenerse de simplificar y siempre tratar de llevar todo a un miembro y sacar factor común. Para que entiendan mejor la necesidad de actuar así, podemos ofrecerles el siguiente ejemplo que les es muy familiar, por situarse en el contexto de las ecuaciones de segundo grado incompletas:

$x^2 = 2x; \quad x = 2$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0;\ x = 2 \end{cases}$

- Profesor: *Si dividimos aquí entre x, perdemos la solución x = 0. En lugar de eso, si recordáis, lo que hacíamos era buscar un polinomio igual a cero y sacar factor común. Esta es la misma idea que se usa con la ecuación anterior.*

3. "Vacíos legales" o cómo esquivar las dificultades

En algunos temas nos podemos encontrar con puntos "escabrosos" a los que en muchas ocasiones los libros de texto no hacen frente. De hacerlo, aparecerían dificultades que no siempre son fáciles de resolver. Como el tipo de cuestiones a las que nos referimos surgen de forma natural al tratar el tema y son importantes para comprender adecuadamente los conceptos que se están tratando, no plantearlas puede dejar un vacío en el aprendizaje del alumno. Esta laguna sólo será salvada si pregunta al profesor, que debe haber reflexionado previamente sobre ello para poder dar una respuesta satisfactoria. A continuación mostramos algunas de nuestras reflexiones en torno a estos agujeros o vacíos legales.

3.1. El misterioso número *e* y su indeterminación $1^{\pm\infty}$

Cuando se introduce el número *e* en Bachillerato en relación a los límites de funciones, los libros de texto hacen hincapié en que el $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1^\infty = e$.

Aquí observamos que este límite presenta primero una indeterminación que si se resuelve o gráficamente o numéricamente se ve con rapidez que su valor es e.

Sin embargo, los libros de texto no hacen ejemplos cuando $x \to -\infty$, por lo tanto, algún alumno inquieto aficionado a las preguntas hipotéticas del famoso tipo "*¿y si…?"* podría preguntarse ¿cuánto dará entonces $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1^{-\infty}$?

Al plantearle la posibilidad de que lo intentara resolver él, ante la falta de ejemplos, el alumno quizá no sabría qué hacer, y podría pensar que lo que tiene que hacer es calcular el límite y hacer el inverso. Esto fue lo que sucedió el otro día con Paula que afirmaba lo siguiente: "*como* *los exponentes negativos invierten los números, si tuviéramos $1^{-\infty}$ en este mismo ejemplo ¿el resultado sería 1/e?”*

Otro alumno de la clase intervino diciendo. Yo creo que da lo que dice Paula pero por otro motivo distinto, si hacemos: $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}}=\frac{1}{e}$

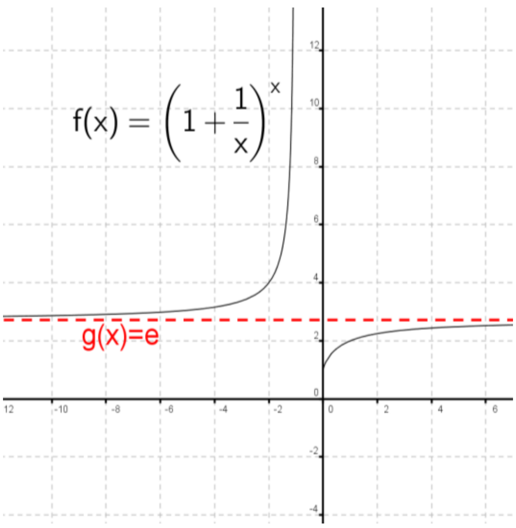
A raíz de esta intervención buscamos algún ejemplo en el libro en el que al resolver el límite de la función apareciera la indeterminación $1^{-\infty}$. Sin embargo, en el libro de texto no había ninguna explicación ni ejemplos en el que esto sucediera [1, 5]. Por tanto, podía pasar que esta cuestión quedara sin resolver adecuadamente, dando lugar a que el alumno saque sus propias conclusiones. Por ejemplo, podría pensar que la indeterminación sólo puede aparecer con +∞, cuando esto no es cierto. Es preferible que el alumno aprenda la indeterminación completa para que pueda comprobar que lo aprendido para el infinito positivo también vale para el negativo.

Veamos matemáticamente la respuesta a esta cuestión [2].

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}&=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{-z}\right)^{-z}=\lim_{z\to\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z}=\lim_{z\to\infty}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{-z}=\lim_{z\to\infty}\left(\frac{z}{z-1}\right)^{z}\\&=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{z}{z-1}-1\right)^{z}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{z-z+1}{z-1}\right)^{z}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z}\\&=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{\frac{z(z-1)}{z-1}}=\lim_{z\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{(z-1}\right]^{\frac{z}{z-1}}=e^{1}=e\end{aligned}$$

Por tanto, queda claro que la hipótesis de Paula y su compañero no era correcta.

En esta ocasión, la solución de la duda pasa por hacer una de estas tres cosas: (1) recurrir a GeoGebra donde se ve claramente hacia donde tiende la función; (2) utilizar Excel para comprobar numéricamente el límite; (3) realizar la demostración matemática que acabamos de mostrar (ver Figura 4).



X	$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$
-10	2,867971991
-100	2,731999026
-1000	2,719642216
-10000	2,718417755
-100000	2,71829542
-1000000	2,718283188
-10000000	2,718281963
-100000000	2,718281852
-1000000000	2,718281758
-10000000000	2,718282054

Figura 4: Justificación visual (a la derecha) y numérica (a la izquierda) del límite de f(x).

En la gráfica de arriba podemos observar que la hipótesis de utilizar el signo menos del exponente para invertir no es correcta. Cuando $x\to-\infty$ el resultado del límite sigue siendo e, exactamente igual que en ∞.

Este mismo resultado es el que obtenemos con la hoja de cálculo, con lo cual en principio Paula ya debería estar convencida.

Si quisiéramos que Paula no tuviera ninguna duda al respecto, podríamos hacer la demostración hecha anteriormente. Además, la idea del cambio de variable que aparece en ella, le puede servir para demostrar el siguiente caso más general:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{h(x)}\right)^{h(x)} = 1^{\pm\infty} = e \; si \; \lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \pm\infty$$

Hacemos notar que resolver esta duda es útil para entender mejor la fórmula que al final van a acabar aplicando para resolver las indeterminaciones $1^{\pm\infty}$.

$$Si \lim_{x\to x_0} f(x) = 1 \; y \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)[f(x)-1]} con \; x_0 \in \mathbb{R} \; o \; \pm\infty$$

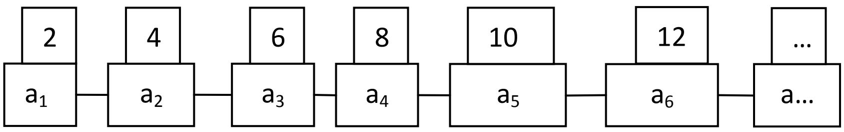
3.2. ¿Pueden dos cosas aparentemente parecidas ser diferentes? Un ejemplo: las sucesiones

Tal y como hemos visto en el ejemplo anterior, los temas de análisis son un poco escurridizos por dos motivos: primero, porque los objetos matemáticos son abstractos; segundo, porque al no estar bien definidos el alumno se siente inseguro.

En el diálogo que mostramos a continuación, aparecerán dificultades en torno a las sucesiones y cómo entendemos que pueden sortearse, aunque seguro que hay otras posibilidades igualmente interesantes.

Al empezar el tema, el profesor comienza por dar la definición de sucesión y de término general. Veamos el diálogo que se produce en este contexto:

- Profesor: *Vamos a comenzar hoy el tema de sucesiones. Conocéis muchos ejemplos de sucesiones como los números naturales, los pares, los impares… Por tanto vamos a partir hoy de la definición formal. Una sucesión es una aplicación del conjunto de los naturales en el conjunto de los reales de manera que a cada número natural le corresponde un número real* (ver [1], p. 217)*.*
- Enrique: (saliéndosele los ojos de las órbitas) *¿Cómo?, ¿pero qué dices?, ¿de dónde a dónde?*
- Profesor: *Enrique, tranquilo. Vamos a pensar en una sucesión como una lista ordenada de números reales. Mira, si nos dibujamos un tren, gracias a que el conjunto de partida son los números naturales, podemos ordenar los vagones teniendo claro siempre quién es el siguiente.*
- Enrique: *Bueno, si hacemos un tren igual me aclaro*.
- Profesor: *Tomemos por ejemplo la sucesión de los números pares. Por tanto:*

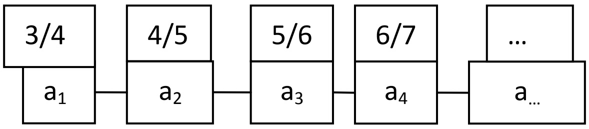


- Enrique: *¡Ah vale!, ya lo entiendo. Siempre podemos añadir vagones nuevos porque el tren sigue un patrón.*
- Profesor: *Exacto. Vamos a continuar con otra definición. El término general de una sucesión es una fórmula que relaciona cada posición con el valor que le corresponde. Por ejemplo, la expresión* $a_n = \frac{n+2}{n+3}$ *es el término general de una sucesión*.
- Enrique: *Entonces podemos también inventar fórmulas que van a ser términos generales*

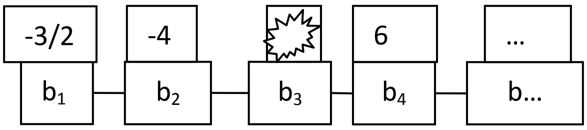
de una sucesión, como por ejemplo $b_n = \frac{n+2}{n-3}$ *que es súper parecido al tuyo puesto que sólo cambia un signo.*

- Profesor: *Vamos a ver si es cierto lo que dices. Haremos tu tren y el mío y veremos si los dos dan sucesiones o no.*

$$a_n = \frac{n+2}{n+3}$$



$$b_n = \frac{n+2}{n-3}$$



- Profesor: *Podría parecer que algo enunciado de esta manera representa el término general de una sucesión ya que se parece mucho al que había propuesto. Por lo que entiendo que os hayáis confundido con facilidad. Sin embargo, el de Enrique no representa el término general de una sucesión puesto que para n = 3 no está definido, no sabemos qué poner en el vagón, y por tanto contradice la definición de sucesión. Haremos ahora ejercicios en los que distinguiremos qué expresiones sí son términos generales y cuáles no.*

Con este diálogo hemos pretendido dos cosas. Primero, mostrar que la visualización de los objetos matemáticos en general ayuda en la comprensión del alumno. Segundo, que los contraejemplos son importantes para entender bien una definición formal. Éstos ayudan a distinguir qué es y qué no es un nuevo concepto matemático. De la misma manera que hemos encontrado bastantes ejemplos y ejercicios de qué es y qué no es una función cuando se introduce esta noción, nos parece importante extender esta práctica a las sucesiones o cualquier otro nuevo concepto que se introduzca. De lo contrario, el vacío está asegurado porque o bien no surge la duda y el concepto no se entiende en su totalidad; o bien, si surge, el alumnos carece de herramientas u otros ejemplos en los que apoyarse para darse una respuesta.

4. "¿Y eso dónde lo pone?"

Si hay algo que caracteriza a las matemáticas es que son una ciencia exacta, que no está sujeta abierta a opiniones ni a la arbitrariedad. Por supuesto, somos partidarias de las discusiones en torno a los objetos matemáticos y de hecho, creemos que una de las cosas que debería fomentarse en el aula es este tipo de diálogos. Sin embargo, las discusiones deberían tratar más sobre distintas propuestas de resolución (en relación a los métodos, los puntos de vista las diferentes representaciones) y no tanto por errores surgidos por la falta de rigor en la aplicación de condiciones o hipótesis de ciertas propiedades.

Por lo que hemos observado, en algunos libros de texto se omiten algunas condiciones necesarias para aplicar teoremas o propiedades. Entendemos que esto puede hacerse con la intención de facilitar la lectura y no desanimar al alumno, que puede verse tratando de descifrar complicados jeroglíficos escritos en lenguaje matemático. Sin embargo, estas omisiones pueden dar lugar a que el alumno aplique dichas propiedades en cualquier situación, tanto si se cumplen las condiciones necesarias para que tengan validez como si no, llevándole a diversos errores y contradicciones.

4.1. La parte negativa de los logaritmos

Uno de los ejemplos de falta de rigor por falta de hipótesis aparece cuando los alumnos aprenden ecuaciones logarítmicas.

Aquí encontramos diferencias dependiendo del libro de texto que utilicemos. En algunos libros de los que hemos consultado, aparecen las propiedades sin indicar que sólo pueden ser aplicadas si el argumento del logaritmo es positivo (ver [1], p. 23). Tampoco se advierte a los alumnos de que en las ecuaciones logarítmicas hay que comprobar las soluciones (ver [1], p. 47). En otros sí aparecen reflejadas tanto las condiciones de las propiedades (ver [5], p. 22) como las advertencias sobre las ecuaciones (ver [5], p. 44). Sin embargo, incluso en este caso, no hay una reflexión de por qué estas condiciones son importantes y los ejemplos que se escogen evitan las dificultades que pueden surgir al no aplicarlas bien. Somos partidarias, no obstante, de no eludir estas cuestiones y generar el conflicto cognitivo correspondiente para que el aprendizaje sea más significativo.

Veamos con un ejemplo la situación que podría producirse:

- Profesor: *Resolved la ecuación* $2\log(x) = \log(10\,000)$. *Acordaos de que hay que comprobar las soluciones porque a veces no son válidas.*
- Julia: *Ya lo he hecho y me da como solución x = 2.*
- Mario: *Yo también lo he hecho pero me da dos soluciones, x = 2 y x = -2. Julia creo que te has vuelto a olvidar de que cuando resolvemos ecuaciones de segundo grado, tenemos la solución positiva y negativa de las raíces.*
- Julia: *Mario, eso lo he tenido en cuenta, sin embargo al sustituir en la ecuación una de las dos soluciones no puede ser porque aparecería un logaritmo negativo. Será que te has olvidado de comprobar las soluciones.*
- Mario: *Pues no me he olvidado, porque yo también he sustituido y me salen válidas las dos soluciones.*

En principio ambos alumnos están haciendo correctamente las cosas. De hecho ambos son capaces de argumentar los posibles problemas y sin embargo no pueden detectarlos. Lo que sucede es que Julia está sustituyendo *x = - 2* y *x = 2* en la ecuación inicial que el profesor les ha dado y por tanto la solución negativa figura como incorrecta. En cambio, Mario está sustituyendo *x = - 2* y *x = 2* en la ecuación que resulta de haber aplicado las propiedades de los logaritmos: $\log(x^2) = \log(10\,000)$. Por tanto, cuando Mario sustituye es cierto que se verifican las dos soluciones obtenidas.

Aparentemente las dos ecuaciones son equivalentes, pero esto sólo es cierto si *x>0*, porque es bajo esa condición cuando puedo aplicar las propiedades de los logaritmos. Es decir, por una falta de rigor en el libro o en el proceso de solución de la ecuación, consideramos que podemos aplicar propiedades que no son aplicables en todos los números reales, con lo que aparecen este tipo de contradicciones. Si Mario hubiera tenido en cuenta esta hipótesis de las propiedades, la solución obtenida *x= -2*, se habría descartado inmediatamente, ya que el logaritmo no está ni siquiera definido en el intervalo $(-\infty, 0)$.

Una vez aclarado dónde está la aparente contradicción entre una y dos soluciones, para explicarlo, el profesor podría apoyarse en la siguiente explicación gráfica de ambas funciones.

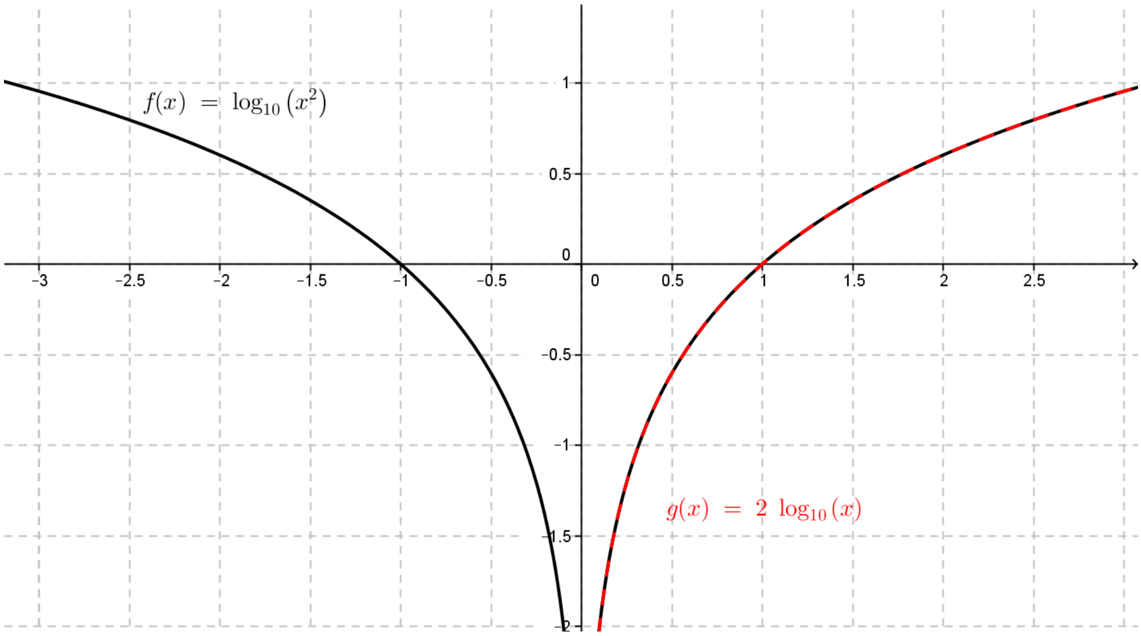


Figura 5: Visualización de las diferencias entre las dos funciones logarítmicas.

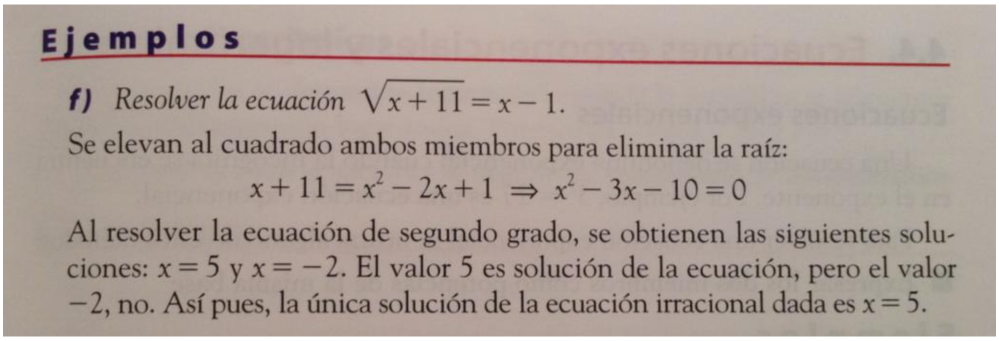
Como podemos observar en la Figura 5 ambas funciones coinciden en (0, ∞). Por tanto podemos decir que en ese intervalo, $2\log(x) = \log(10\ 000) \Leftrightarrow \log(x^2) = \log(10\ 000)$. Sin embargo, en el intervalo (- ∞,0), es evidente que ambas ecuaciones no son equivalentes, puesto que la primera ni siquiera está definida y la segunda ecuación tiene una solución válida en ese intervalo. Al no ser equivalentes, tienen distintas soluciones y por tanto no es lo mismo sustituir para comprobar en una que en otra. Habría que explicar entonces a los alumnos que siempre deben sustituir en la ecuación inicial.

Hacemos notar que lo que ocurre con este tipo de ecuaciones es similar a lo explicado en relación a las ecuaciones con fracciones algebraicas (ver 2.3) y caben los dos mismos caminos de actuación: primero, que antes de empezar a resolver la ecuación, se mire el dominio de las funciones que aparecen para ver qué valores hay que descartar; segundo, quizá más sencillo para los estudiantes, que resuelvan despreocupadamente y al final comprueben todas las soluciones. En cualquier caso, sería interesante acostumbrar a los alumnos a indicar bajo qué hipótesis están dando en cada paso de resolución de la ecuación.

De esta manera, los alumnos comprenderán mejor qué sucede realmente en las funciones logarítmicas y por tanto la resolución de ecuaciones estará dotada de significado y no será un simple proceso mecánico. Además, después de esta explicación, podrán justificar por qué sus soluciones son válidas o no con mayor rigor matemático.

4.2. La parte positiva de las raíces

Podemos considerar también falta de rigor los casos en los que el libro está dando por sabida una condición que no ha explicitado en ningún momento. Esto ocurre con las ecuaciones con raíces. Analicemos un ejemplo extraído de un libro de texto (ver Figura 6) que sirve para ilustrar lo que ocurre a menudo en otros libros (ver [5], p.43).



Ejemplos

f) *Resolver la ecuación* $\sqrt{x+11} = x - 1$.

Se elevan al cuadrado ambos miembros para eliminar la raíz:

$$x + 11 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

Al resolver la ecuación de segundo grado, se obtienen las siguientes soluciones: $x = 5$ y $x = -2$. El valor 5 es solución de la ecuación, pero el valor -2, no. Así pues, la única solución de la ecuación irracional dada es $x = 5$.

Figura 6: Ejemplo de resolución de una ecuación con radicales de un libro de texto [1], (p. 45)

Cuando un alumno lee esto podría preguntar sorprendido "*¿cómo que la solución x = -2 no es válida?*" A lo que podemos responder que con las raíces podemos estar introduciendo nuevas soluciones y por tanto siempre hay que comprobarlas, al igual que ocurría con los denominadores en las fracciones algebraicas (2.3) y con los logaritmos (4.1). Pero si vamos un poco más allá y hacemos las comprobaciones que el libro omite, observamos lo siguiente:

Primera solución, *x=5* → $\sqrt{5+11} = 5 - 1 \rightarrow \sqrt{16} = 4, verdadero$

Segunda solución, *x=-2* → $\sqrt{-2+11} = -2 - 1 \rightarrow \sqrt{9} = -3, ¿falso?$

Al realizar esta comprobación en la pizarra, un alumno reaccionó diciendo:

- *¡Si hombre! ¿Desde cuándo la* $\sqrt{9}$ *no puede ser -3? Pero si lleváis varios cursos poniéndonos ceros por no poner las dos soluciones de las raíces pares y ¿ahora resulta que -3 no es raíz de 9?*

Aquí nos surgen dos líneas de actuación. La primera, solventar con una explicación lo que consideramos una falta de rigor en los libros de texto. Si en algún momento se ha decidido que las raíces sean funciones univaluadas en las ecuaciones irracionales, deberíamos aclarárselo a los alumnos, que vienen de considerar siempre las dos raíces de las ecuaciones con índice par. Por ejemplo, en este caso, el profesor podría hacer una conexión con las funciones y aclararles:

- *Para que la expresión* $\sqrt{x+11}$ *dé lugar a una función no podemos considerar sus dos ramas. Ya que* $f(x) = \pm\sqrt{x+11}$ *no es una función (a cada valor del dominio le corresponden dos imágenes) y por eso nos quedamos sólo con la rama positiva* $f(x) = \sqrt{x+11}$. *En ese caso, efectivamente, no cabe admitir la solución x = -2.*

Sin embargo, puesto que estamos en el contexto de las ecuaciones y buscar las soluciones no es otra cosa que encontrar los valores de *x* que satisfacen cierta condición, no entendemos por qué hay que excluir la raíz negativa. Por tanto, somos más partidarias de lo que sería la segunda línea de actuación que consiste en aceptar las dos soluciones de la raíz. Desde este punto de vista, la solución *x = -2* del ejemplo se consideraría totalmente válida. Para reforzar este argumento el profesor podría apoyarse en una representación visual de la ecuación (Figura 7) y explicar:

- *En el ejemplo estamos buscando los valores de x que satisfacen la igualdad. Visualmente esto equivale a representar los valores que puede tomar cada miembro y ver cuándo se intersecan. Como la raíz puede tomar tanto valores positivos como negativos se observa que hay dos soluciones para esta ecuación.*

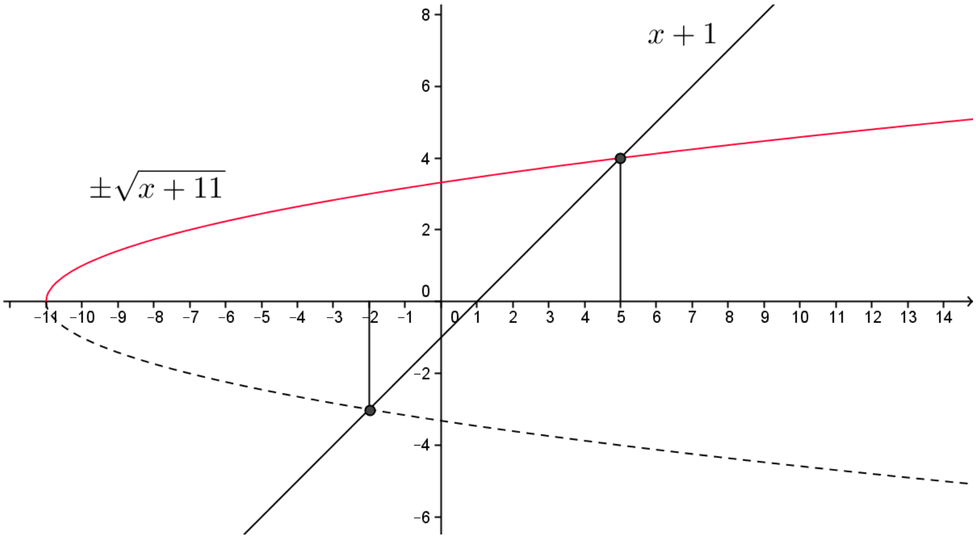


Figura 7: Representación visual de las soluciones de la ecuación irracional.

Hacemos notar que este apoyo visual también puede ser útil para justificar por qué en la primera línea de actuación se descarta la raíz *x = -2*.

4.3. ¡Esto sí que está lleno de agujeros!

Uno de los aspectos importantes del tema de funciones es el estudio de la continuidad de las mismas. En principio, no tendría que ser un punto muy delicado para los alumnos pero si no se es riguroso con las definiciones, puede ocasionar desconciertos.

Como todo el mundo sabe, estudiar la continuidad de una función tiene dos partes. Por una parte determinar si en ese punto la función es continua o no y, por otra parte, en caso de que exista discontinuidad, determinar el tipo de discontinuidad del que se trata.

Lo primero que nos surge plantearnos es el interés de determinar el tipo de discontinuidad. Es decir, cuál es la motivación o para qué sirve determinar de qué tipo es. En principio, no nos resulta tan evidente esta respuesta, aunque vemos que una posible ventaja de clasificar los tipos de discontinuidad puede ser ayudar al alumno a formarse una imagen mental de lo que está sucediendo. En cualquier caso, creemos que si damos una clasificación, ésta debe ser única y seguir unos criterios claros e inequívocos. De lo contrario, resulta un lío para los alumnos.

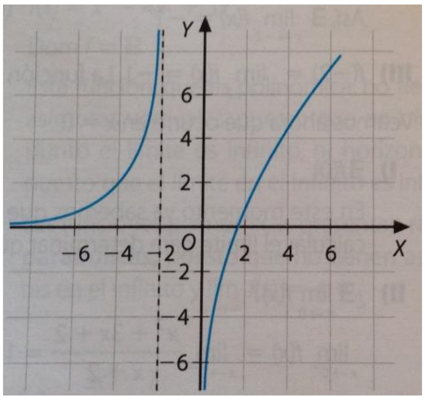


Figura 8: Ejemplo gráfico de función inclasificable según los criterios de continuidad explicados en el libro de texto [1], (p. 249)

Al observar su tratamiento en diferentes libros de texto encontramos aproximaciones diversas, algunas más completas que otras. Los tipos más comunes a los que hacen referencia son: discontinuidades de salto finito, de salto infinito y evitable. Sin embargo, en esos textos encontramos, sobre todo en representaciones gráficas de ejemplos y ejercicios, funciones como las de la Figura 8 que no encajan con ninguno de esos tres tipos.

El alumno que al ver estas gráficas se pregunta por su continuidad se sentirá perdido, ya que no sabrá la respuesta y, al buscarla en la teoría, tampoco la encontrará. Lo mismo puede ocurrir al estudiar funciones con expresiones tan habituales como las de la Figura 9.

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 9\right)$$

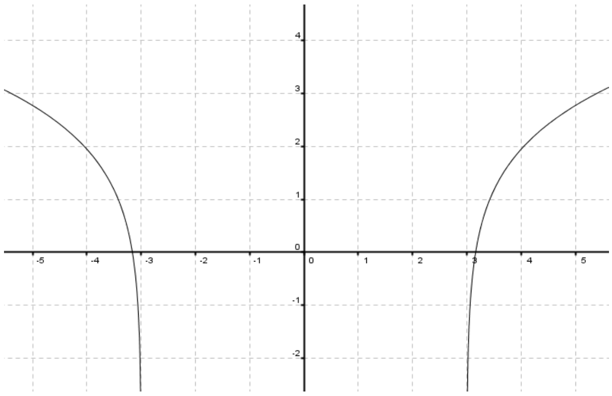


Figura 9: Un ejemplo de función no continua[3]

En un intento de ir más allá, uno de los libros realiza la siguiente advertencia en el margen: *"Otro tipo de discontinuidad aparece cuando el límite de f en un punto no existe, aun cuando la función no tiende a infinito. Esto sucede, por ejemplo, con* $\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$ (ver [5], p.198)". Este comentario no sólo no está suficientemente explicado sino que además provoca al alumno una gran inseguridad y una incertidumbre sobre cuántos tipos de discontinuidad hay, cuáles son sus nombres y cómo referirse a ellas.

$$f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$$

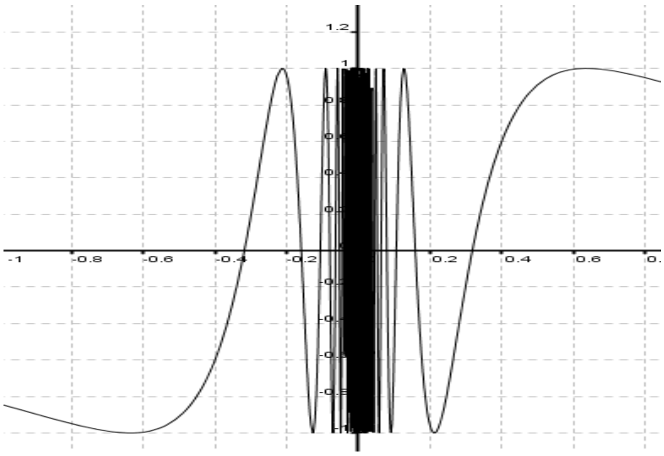


Figura 10: Representación gráfica de otra función discontinua

Probablemente el alumno cierre el libro desesperado pensando que no ha entendido nada de lo que se ha explicado en clase puesto que no es capaz de analizar bien si esta función es o no continua y, en caso de que exista discontinuidad, de qué tipo sería.

Como ya hemos indicado anteriormente, consideramos que cada vez que se incorpore un nuevo conocimiento, éste se debe afrontar con el mayor rigor y la mayor diversidad de ejemplos posibles para que el alumno alcance a comprender el concepto en su totalidad. En esta ocasión, esto se debería traducir en presentar una buena clasificación que abarque todos los casos. Para elaborarla, nos han resultado de gran ayuda algunas fuentes donde se ofrece una clasificación más completa que podríamos ofrecerles a nuestros alumnos ([3], [4]).

En estos textos, quedan catalogadas las discontinuidades que veíamos anteriormente y que quedaban sin clasificar. Tanto $\ln(x^2-9)$ como $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ presentarían en *x=+3,-3* y en *x=0* respectivamente, discontinuidades denominadas de segunda especie. Una función presenta una discontinuidad de segunda especie en un punto si alguno de los límites laterales no existe (y no es infinito). Esta no existencia puede deberse a dos razones: (1) que no está definida la función y por tanto no se puede calcular el límite, como pasaba con el logaritmo (ver Figura 9); (2) que aun existiendo función no pueda determinarse el límite, como pasaba con el seno (ver

Figura 10). Finalmente la clasificación quedaría como se muestra en la Figura 11.

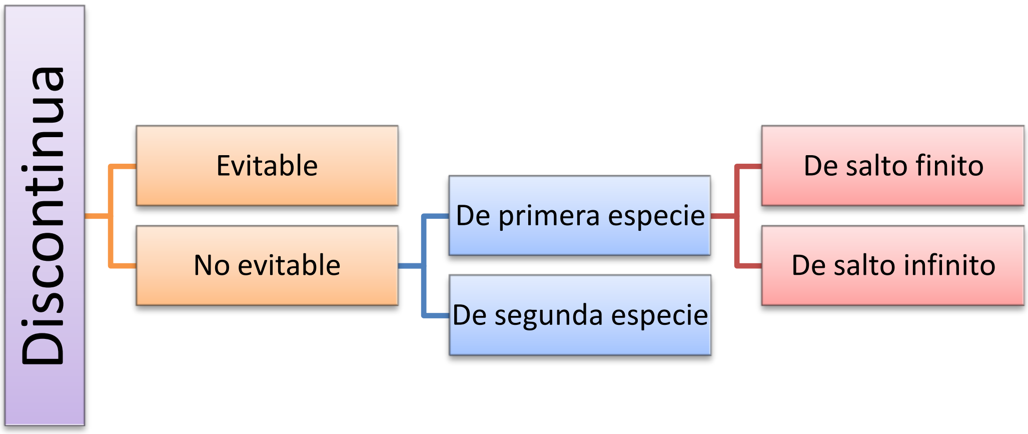


Figura 11: Clasificación de los tipos de discontinuidad

Habiendo incluido las discontinuidades de segunda especie en la clasificación inicial, creemos el alumno podría resolver el ejercicio satisfactoriamente sin que el pánico se apoderara de él y se viera forzado a tirar la toalla.

5. Conclusiones

Esta comunicación gira en torno a la idea de "agujero" en Matemáticas. Como se expuso en la Introducción, los agujeros son cuestiones matemáticas que combinan dificultades de los alumnos y un vacío de explicación, ya sea por parte del profesor o de los libros de texto. Para intentar evitar dichas dificultades y ayudar al profesor a cerrar, en la medida de lo posible, estos agujeros hemos reflexionado en torno a algunos que se han presentado en nuestra experiencia docente.

Atendiendo a la naturaleza de dichas cuestiones y las características que nos han llevado a considerarlas agujeros, las hemos agrupado en torno a tres criterios distintos:

- Agujeros producidos por un modelo establecido que deja de ser válido en otros contextos.
- Agujeros derivados de la falta de contemplación de su problemática en los textos.
- Agujeros motivados por una falta de rigor.

Entre las posibles respuestas didácticas expuestas a lo largo de las situaciones analizadas encontramos propuestas de diferente naturaleza:

- <u>Uso de materiales manipulativos</u>: como las tuercas y los tornillos empleados para dar sentido y ayudar al descubrimiento de las reglas de los enteros (ver 2.1).
- <u>Explicitación de procedimientos o realización de pequeñas demostraciones</u>: así ocurre con la regla de la división para entender cuándo se puede o no simplificar al dividir (ver 2.2) o con la demostración de que la función $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ se comporta igual en + ∞ que en - ∞ (ver 3.1).
- <u>Explicitación de las hipótesis o condiciones de aplicación de propiedades y teoremas</u>: así ocurre con la distinción de casos implícita que se hace al simplificar por algo que puede ser cero (2.3) o con las hipótesis de aplicación de las reglas de los logaritmos (ver 4.1).
- <u>Contraste de métodos similares y análisis de las diferencias:</u> así ocurría con el caso del alumno que compara la resolución de ecuaciones con denominadores numéricos y algebraicos (ver 2.3).
- <u>Establecimiento de conexiones con conocimiento previo a través de situaciones de la vida real o de ejemplos familiares para los alumnos</u>: así ocurre con las tablas de situaciones de la vida cotidiana para los enteros de Maria Antonia Canals [2] (ver 2.1) o con el caso de las

ecuaciones de segundo grado incompletas en relación a cuándo se pueden o no simplificar ecuaciones más complicadas como las trigonométricas (ver 3.1).

- <u>Exhibición de ejemplos y contraejemplos que ayudan a dar sentido a una definición</u>: así se hace a menudo con las funciones, pero no con otros conceptos como las sucesiones (ver 3.2).
- <u>Visualización a través de representaciones gráficas o diagramas</u>: como el tren que se usa para hacer más operativa la definición de sucesión (ver 3.2), o como la representación gráfica realizada con GeoGebra que se utiliza para apoyar el argumento de elección de las dos ramas en el caso de las ecuaciones con raíces (ver 4.2) o como las representaciones gráficas de funciones que sirven para pensar en los diferentes tipos de discontinuidad (ver 4.3), sin las cuales resultaría realmente difícil hacerse una idea de lo que está ocurriendo globalmente (ver 4.3).

Otro tipo de agujeros que hemos detectado, pero en los que no hemos profundizado, serían los provocados por una falta de motivación o de justificación en el currículum. Así ocurre con algunos contenidos que se explican y que despiertan en los alumnos la pregunta "¿y esto para qué sirve?". Hemos hecho referencia a este tipo de agujeros al cuestionar la utilidad de clasificar los tipos de discontinuidades (ver 4.3). Las actuaciones docentes de este tipo de agujeros creemos que deberían ir en la línea de proponer situaciones de la vida cotidiana o de las propias matemáticas que justifiquen la necesidad de definir y trabajar dichos contenidos matemáticos. En cualquier caso, haría falta reflexionar más sobre este tema.

De hecho, las conclusiones que aquí se exponen presentan muchas limitaciones. Como hemos señalado en varias ocasiones, son ejemplos extraídos de nuestra experiencia y documentados con situaciones recreadas a partir de lo que hemos vivido en el aula. Por tanto, necesitarían completarse con estudios rigurosos y en más contextos que los que nosotras hemos manejado. En este sentido nos gustaría compartir con otros profesores y otros investigadores experiencias similares a las que hemos descrito. Para ello, es necesaria una actitud crítica ante lo que se explica y una mirada atenta que dé importancia a las objeciones que presentan los alumnos. Esta actitud de alerta y apertura en el aula es la que consideramos, en realidad, la conclusión más importante de esta reflexión y esperamos haber contagiado un poco de ella a quien haya leído esta comunicación.

6. Notas

1. Hacemos notar que en este ejemplo coincide la solución excluida con las raíces del polinomio que se usa como denominador común de los términos, pero que esto no sucede en general.

2. Agradecemos a Jaime Guerrero López las ideas aportadas a esta demostración.

3. Indicamos que esta afirmación de no continuidad está ubicada en un contexto de Bachillerato, pues desde un punto de vista universitario se diría que esta función es continua en todo su dominio. Lo mismo ocurriría con el siguiente ejemplo de $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$.

7. Referencias bibliográficas

[1] Bescós i Escruela, E.; Pena i Terrén, Z. (2008). "Ciencias y Tecnología. Matemáticas I. Bachillerato". Oxford Educación. Proyecto Tesela. Madrid (España).

[2] Canals Tolosa, Mª A. (2013) "Números y operaciones II. Dossiers". Associació de Mestres Rosa Sensat y GAMAR. Los dossiers de Maria Antonia Canals, 109. Barcelona (España).

[3] Gamboa, J. M.; Rodríguez Rodríguez, Mª B. (2008) "Desarrollo del temario de las oposiciones de Secundaria. Matemáticas" Ed. Sanz y Torres. Vol. 1. 2ª Edición. Madrid (España).

[4] González García, C.; Llorente Medrano, J.; Ruiz Jiménez, MªJ. (2003) “Matemáticas 2. Ciencias de la Salud/ Tecnología. 2º Bachillerato”. Editex, Madrid (España).

[5] Vizmanos, J. R.; Hernández, J.; Alcaide, F. (2011) “Ciencias y Tecnología. Matemáticas I. Bachillerato”. Editorial SM. Madrid (España).