Análisis de errores y caminos de aprendizaje en la iniciación al álgebra para alumnos de 1º ESO

Mª Victoria Amador Saelices[1]; Jesús Montejo Gámez[2]; Mónica Ramírez García[1].

email: mvamador@ucm.es; jmontejo@ugr.es; moramire@ucm.es

Universidad Complutense de Madrid[1]; Universidad de Granada[2]

RESUMEN

La formalización matemática se cimienta sobre un conocimiento sólido del lenguaje algebraico, por lo que es esencial que en su primer contacto con el álgebra los alumnos de 1º de E.S.O. desarrollen un aprendizaje significativo sobre las expresiones algebraicas. Partiendo de la idea seminal de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (Simon, 1995), describimos a través de grafos el aprendizaje de las expresiones algebraicas en relación a las capacidades que se activan desarrollando tareas relacionadas. Los errores que los alumnos cometen al realizar estas tareas son la herramienta clave del análisis que presentamos.

Palabras clave: álgebra; trayectoria hipotética de aprendizaje; camino de aprendizaje; errores.

1. MOTIVACIÓN, PLANTEAMIENTO Y OBJETIVOS

El contexto educativo de esta comunicación es la iniciación en el lenguaje algebraico de los estudiantes de 1º de E.S.O. Buscamos analizar cómo se desarrolla el primer contacto de los alumnos con las expresiones algebraicas para así poder mejorar su aprendizaje, a través de la mejora del diseño instruccional y el desarrollo de tareas adaptadas a sus conocimientos. Debemos señalar que, a pesar del carácter introductorio que tiene el álgebra en el primer curso de educación secundaria, el currículo que establece la LOE 2/2006, de 3 de mayo, para la enseñanza de las matemáticas [6] en 1º de E.S.O. para la comunidad de Madrid (D 23/2007, de 10 de mayo [5]) confiere especial relevancia a este bloque de contenidos, de manera que el álgebra está relacionada de forma directa con los objetivos generales del área de matemáticas 1 y 3 y de forma transversal con los objetivos 2, 8, 10, 11 y 12. Además, está relacionada de manera troncal con el criterio de evaluación 9 y transversalmente con los criterios de evaluación 1,2 del área de matemáticas en el primer curso de educación secundaria.

La descripción adecuada de situaciones reales en el lenguaje matemático no solo nos permite aprovechar la potencia de las matemáticas para resolver problemas de la vida cotidiana, sino que es el primer paso que debemos dar para poder desarrollar modelos matemáticos fieles sobre fenómenos que intervienen en nuestra vida (de medicina, biología, física, meteorología, economía, etc.). El lenguaje algebraico es el lenguaje propio de las matemáticas y por tanto resulta imprescindible para los alumnos de 1º de E.S.O.

Nuestro interés por estudiar cómo es el aprendizaje de las expresiones algebraicas de estos estudiantes de secundaria ha tenido una motivación adicional. Este curso, durante el desarrollo de las prácticas del máster en formación del profesorado en el colegio Mater Purissima de la comunidad de Madrid, hemos sido testigos de los malos resultados que habían obtenido la mayoría de alumnos de 2º de E.S.O. en el examen de polinomios. Observando algunas de las preguntas de la prueba, detectamos deficiencias graves en el manejo de las expresiones algebraicas, lo que nos convenció de que se podrían aprovechar las prácticas en 1º ESO para prevenir en estos alumnos las carencias observadas en 2ºESO. Nos hacemos principalmente dos preguntas: ¿por qué los alumnos cometen determinados errores? ¿Cómo podrían evitarse estos errores?

El trabajo que desarrollamos en esta comunicación es parte de una investigación más amplia, basada en el paradigma metodológico denominado investigación de diseño ([13], [7]), concretamente en un experimento de enseñanza ([20], [16]). Para poder llevar a cabo el experimento, concebido para analizar el aprendizaje de las expresiones algebraicas, consideramos un objetivo de aprendizaje para las expresiones algebraicas (lo describimos con detalle al final de esta introducción) y estudiamos cómo los alumnos pueden desarrollar su aprendizaje sobre el objetivo propuesto. Para ello utilizamos una trayectoria hipotética de aprendizaje [23], una herramienta que describe desde una perspectiva constructivista cómo profesores, investigadores y desarrolladores del currículum pueden pensar sobre el diseño y el uso de las tareas matemáticas para promover el aprendizaje conceptual matemático. Las trayectorias hipotéticas de aprendizaje se revelan de gran utilidad tanto para la investigación como para la programación instruccional en el aula ([28], [12]). Para esta última función (la que nos interesa ahora) debemos concretar de forma apropiada nuestra trayectoria hipotética. Para ello utilizamos los denominados caminos de aprendizaje [9], que muestran una predicción del profesor acerca de cómo los alumnos van a desarrollar su aprendizaje en torno a cierta tarea. Utilizando estos caminos confeccionamos un grafo que caracteriza nuestro objetivo de aprendizaje. Este grafo proporciona el nivel de concreción adecuado para diseñar las tareas en aula, que es el aspecto que nos interesa en este trabajo.

Los grafos que caracterizan los objetivos de aprendizaje se construyen en torno a la noción de capacidad ([4], [22], [11], [9]). Los autores de [10] señalan que las capacidades están íntimamente relacionadas con los errores en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, por lo que un análisis detallado de los errores que cometen los alumnos al realizar tareas relacionadas con nuestro objetivo de aprendizaje va a ser una de las herramientas esenciales que nos va a conducir a la descripción de las capacidades y por tanto, al grafo del objetivo. Para hacer este análisis, proponemos un test elaborado a partir de la observación de clasificaciones de errores encontradas en la literatura ([14], [26]). Pasamos el test a 74 alumnos de 2º E.S.O. del colegio Mater Purissima, que han estudiado las expresiones algebraicas en 1º E.S.O., para analizar los errores que cometen y describir las capacidades necesarias para evitar dichos errores.

A continuación describimos el objetivo de aprendizaje sobre el que vamos a realizar nuestro estudio. Dado el carácter introductorio que tienen las expresiones algebraicas en el primer curso de enseñanza secundaria obligatoria y el hecho de que queremos alcanzar un nivel de concreción de aula, hemos centrado nuestro estudio en un aspecto básico: la traducción de expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico. A este respecto, el currículo de la Comunidad de Madrid establece los contenidos:

- Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Utilidad de la simbolización para representar cantidades en diferentes contextos.
- Traducción de expresiones del lenguaje natural al algebraico [...].

lo que nos ha hecho considerar el

OBJETIVO DE APRENDIZAJE: conocer el lenguaje algebraico y utilizar las expresiones algebraicas para describir relaciones numéricas y geométricas utilizando un vocabulario adecuado.

En relación a este objetivo de aprendizaje nos proponemos dos metas para nuestro trabajo:

- Describir las capacidades asociadas a nuestro objetivo de aprendizaje a partir del análisis de los errores cometidos por los alumnos de 2º de E.S.O en el test.
- Caracterizar el objetivo de aprendizaje por medio de su grafo asociado.

Dedicaremos la sección 2 para explicar el fundamento teórico de las nociones mencionadas en este apartado, comentando en particular los antecedentes sobre análisis de errores que nos han sido de utilidad para elaborar nuestro test. En la sección 3 exponemos el análisis de errores asociado a dicho test y las capacidades relacionadas con las expresiones algebraicas que extraemos. La sección 4 está dedicada al desarrollo y descripción del grafo que caracteriza el objetivo de aprendizaje. Exponemos las conclusiones que extraemos del trabajo en la sección 5 y las referencias bibliográficas consultadas en la última sección.

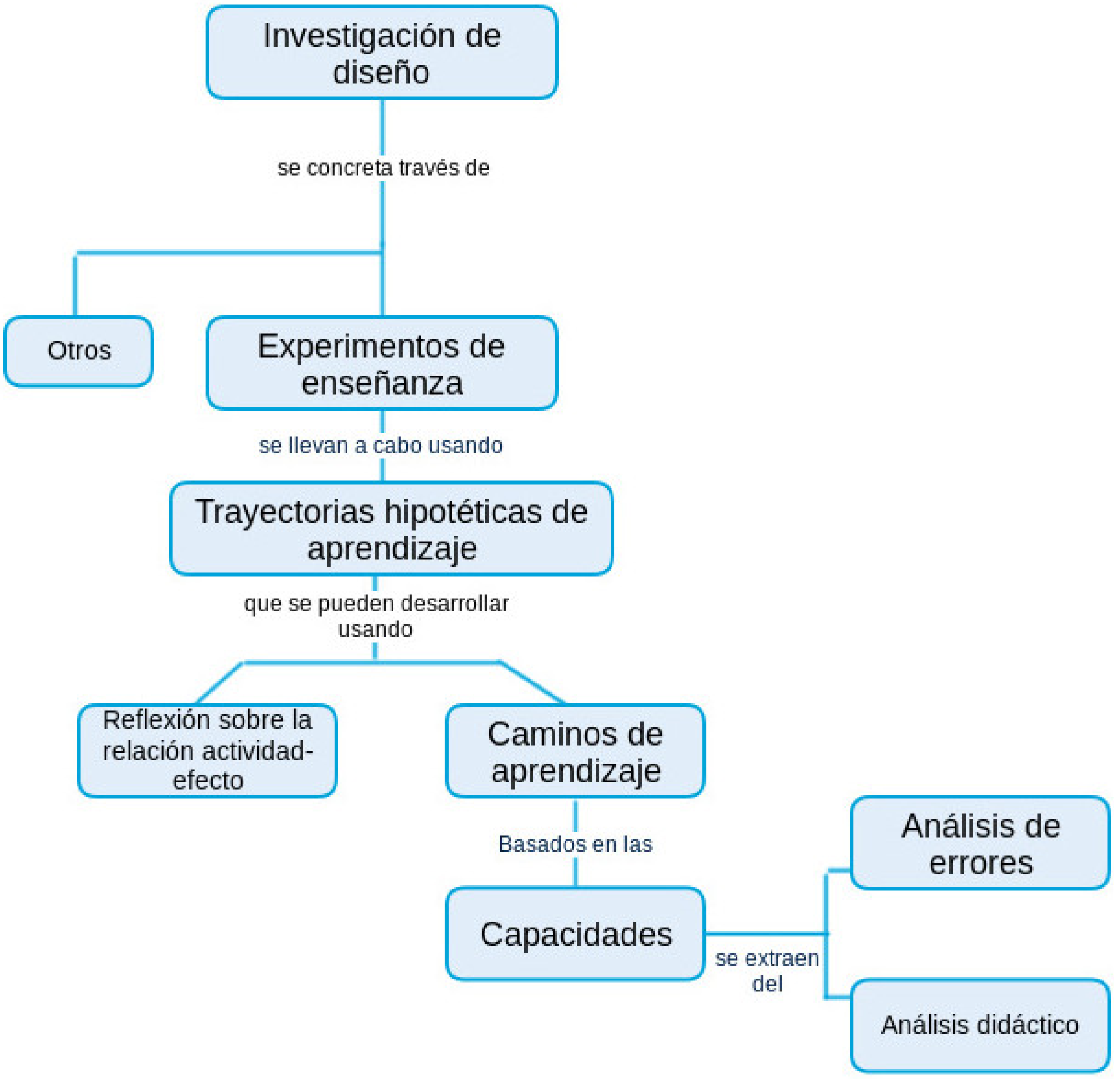

Ilustración 1: mapa conceptual sobre las ideas que sustentan nuestro fundamento teórico

2. FUNDAMENTO TEÓRICO

Este trabajo se ha realizado desde un enfoque constructivista. Bajo la perspectiva del constructivismo, aprender es un proceso de adaptación: el sujeto no "importa" los conocimientos nuevos del mundo exterior, sino que construye dichos conocimientos nuevos mediante su experiencia y utilizando como cimientos aquellos conocimientos que ya tenía.

La teoría constructivista ha tenido gran influencia en muchas investigaciones recientes sobre el aprendizaje matemático en el aula, ya que presenta gran potencial para ayudar a comprender los procesos que intervienen en dicho aprendizaje. La idea básica de construir conocimientos nuevos a partir de conocimientos previos ha impulsado el desarrollo de herramientas metodológicas constructivistas basadas en lo que ya saben los estudiantes. [23] describe los aspectos clave para planificar las clases de matemáticas a través de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje (THA). Exponemos a continuación qué son las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, sus elementos y algunas maneras de materializar dichas trayectorias. También introducimos las ideas que son útiles en el diseña de trayectorias hipotéticas de aprendizaje. Nos detenemos en el concepto de capacidad, los caminos de aprendizaje asociados a una tarea y el grafo de un objetivo de aprendizaje. Por último, comentamos algunas referencias sobre el análisis de errores, que serán (los errores) nuestra herramienta básica para describir las capacidades asociadas a las expresiones algebraicas en 1ºESO. De esta forma completamos el fundamento teórico de esta comunicación, que puede verse en la ilustración 1.

2.1. TRAYECTORIAS HIPOTÉTICAS DE APRENDIZAJE

La noción de trayectoria hipotética de aprendizaje fue introducida en [23] como respuesta a la necesidad de conjugar el enfoque tradicional, que contempla una educación basada en objetivos preestablecidos, con una metodología constructivista [13]. El propósito es establecer una predicción de cómo los alumnos pueden ir aprendiendo un contenido de matemáticas en función de sus conocimientos previos: "*Una trayectoria hipotética de aprendizaje está compuesta por los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje de los estudiantes y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes*" (Simon, 1995 [23]).

Esta herramienta se fundamenta sobre la idea (constructivista) de que planificar el aprendizaje de ciertos contenidos a través de una THA implica asumir las tareas como elemento clave del proceso de instrucción. Los objetivos son la guía del aprendizaje, mientras que las hipótesis sirven para decidir las tareas en el contexto de la interdependencia descrita.

Existen diferentes interpretaciones sobre la noción de THA. Hay investigadores que consideran las trayectorias hipotéticas de aprendizaje como herramientas para la planificación de actividades de instrucción en el día a día de un aula [24], otros consideran que son herramientas propias de la investigación ([2], [15]) mientras que algunos otros admiten la compatibilidad de estas dos interpretaciones ([28], [12]). En este trabajo interpretamos una trayectoria hipotética de aprendizaje desde el enfoque puramente instruccional. Consideramos que es la herramienta adecuada para comprender cómo aprenden los alumnos de 1º E.S.O. las expresiones algebraicas: por una parte, [24] destaca que las trayectorias hipotéticas de aprendizaje son útiles para introducir contenidos nuevos y los alumnos con los que hemos trabajado nunca han visto nada de álgebra. Por otra parte, el éxito emergente que están teniendo las trayectorias hipotéticas de aprendizaje en cursos de formación de profesores ([3], [31]), hace que sea indispensable para nosotros conocer en profundidad las posibilidades de esta herramienta [10]. Estos autores están de acuerdo con [28] en que el desarrollo de trayectorias hipotéticas de aprendizaje constituía un desafío para la Educación Matemática.

La idea de THA, en cualquier caso, debe concretarse a la hora de ser utilizada de forma práctica en relación a un contenido específico. Para ello debemos partir de los tres elementos básicos que señala [23]:

- el objetivo de aprendizaje,
- las tareas
- las hipótesis sobre cómo se desarrolla el aprendizaje.

Estos tres elementos no tienen la misma jerarquía como componentes de una trayectoria hipotética. El objetivo de aprendizaje se suele tener de antemano y marca una pauta de los otros dos elementos, mientras que la selección de las tareas y las hipótesis son interdependientes: las tareas se basan en hipótesis acerca del proceso de aprendizaje y, a su vez, las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje se basan en las tareas relacionadas [24]. Estos mismos autores, sin embargo, señalan que "*la descripción de la THA no llega a proporcionar un marco para pensar en el proceso de aprendizaje ni para diseñar o seleccionar tareas matemáticas*". Llevar una trayectoria hipotética de aprendizaje al aula requiere un nivel de concreción mayor. ¿Cómo conseguirlo?

Para responder a esta pregunta, los autores de [25] elaboraron un constructo denominado *reflexión sobre la relación actividad-efecto*, que se basa en la noción de abstracción reflexiva de Piaget. Por su parte, en [10] se argumenta que la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje debe adaptarse para profesores en formación, ya que "*no tienen experiencia docente y, en general, no tienen acceso a la práctica en el aula de matemáticas*". Para llevar a cabo dicha adaptación parten de la noción de capacidad y definen los posibles caminos de aprendizaje. La idea de trayectoria hipotética de aprendizaje ha sido desarrollado con profundidad en [9], asociada a una tarea concreta, donde se utiliza para caracterizar objetivos de aprendizaje en términos de capacidades y errores. El nivel de concreción para el aula que se puede extraer de estas ideas unido a nuestra condición de profesores en formación hacen que los caminos de aprendizaje resulten óptimos para nuestros propósitos.

2.2. CAMINOS DE APRENDIZAJE

Siguiendo el criterio descrito en [9], vamos a reconocer dos niveles de concreción acerca de los resultados esperables del aprendizaje de un tema de matemáticas por parte de los alumnos: objetivos y capacidades.

Un objetivo de aprendizaje suele ser una frase sintética cuyo significado parece evidente [17]. Sin embargo, los docentes no suelen ser conscientes de la gran cantidad de conexiones entre conocimientos que implica alcanzarlo [21]. Los autores de [9] destacan que "*un objetivo de aprendizaje expresa expectativas que involucran conexiones entre los conceptos y procedimientos del tema matemático, los sistemas de representación en que se representan y los fenómenos que organiza*" . Es necesario, por tanto, tener información más detallada sobre qué significa que el estudiante logre un objetivo de aprendizaje. Para recabar este tipo de información de forma ordenada se introduce la noción de capacidad ([19], [10], [18], [9]).

2.2.1. Noción de capacidad

Las capacidades constituyen el nivel de concreción más alto acerca de los resultados esperables del aprendizaje de un tema de matemáticas que vamos a considerar. En [4] describe el término capacidad en un ámbito general como el conjunto de condiciones necesarias para llevar a cabo una actividad concreta. En la misma línea están [22] y [11], que relacionan las capacidades con conocimientos, experiencias y habilidades necesarias para desarrollar una actividad, y [10], donde utilizan el término para referirse a la actuación de un estudiante respecto a un tipo de tarea. Más recientemente, en [9] definen una capacidad como "*una expectativa del profesor sobre el conjunto de conocimientos elementales y de procedimientos rutinarios que los estudiantes tienen que aprender sobre un tema de las matemáticas escolares*". Esta definición es más específica para la enseñanza de las matemáticas y vincula (conceptualmente) las capacidades a un tema, en lugar de a una tarea o actividad. Presenta la ventaja de que es más concreta que las anteriores y por tanto más operativa, ya que utiliza términos como "conocimientos elementales" y "procedimientos rutinarios", que son menos amplios que "condiciones", "conocimientos" o "actuación". Por último, hablar de capacidades como expectativas del profesor, en lugar de como características del alumno, ilustra cómo las capacidades pueden constituir un elemento útil en el contexto de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, idea que aprovechamos en este trabajo.

EJEMPLO:

En relación al tema "expresiones algebraicas" del primer curso de E. S. O., podemos considerar la capacidad

C3: Emplear letras para representar cantidades desconocidas,

que está relacionada con el uso de las variables. Otra capacidad asociada con el tema es

C14: Denotar la "diferencia" con la operación de restar,

que está relacionada con la identificación de las operaciones aritméticas en el lenguaje algebraico. Por último, cuando expresiones algebraicas para describir cantidades geométricas, aparecen capacidades de tipo

C25: Expresar adecuadamente la fórmula del perímetro de un cuadrado.

En la sección 3 proporcionamos la lista completa de capacidades con las que hemos trabajado

A la hora de gestionar las capacidades asociadas a un tema de matemáticas y sus relaciones se pueden utilizar herramientas de análisis didáctico ([9], [19], [10], [29]). El análisis didáctico se articula en torno a cuatro etapas: análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. En [8] se defiende que las capacidades se identifican tras el análisis del contenido. Por su parte, en [19] se organizan las capacidades en torno a siete competencias para efectuar el análisis cognitivo, cuyo objetivo es proporcionar hipótesis sobre cómo se puede desarrollar el aprendizaje de los alumnos a través de la consideración de dichas competencias, junto con las tareas y las dificultades que los escolares pueden encontrar relacionados con ese aprendizaje. A este respecto, Gómez y Lupiáñez señalan en [10] que las nociones de capacidad y de dificultad "*son las dos caras de una misma moneda. Cuando afirmamos que 'un escolar tiene la capacidad para...', estamos mirando una cara de la moneda. La otra cara corresponde a la afirmación 'el escolar tiene una dificultad al...'. Tanto la capacidad, como la dificultad se evidencian cuando el escolar aborda una tarea. Decimos que el escolar tiene una dificultad, cuando incurre en un error. Si resuelve la tarea apropiadamente, afirmamos que esto puede ser evidencia de que ha desarrollado las capacidades correspondientes*". Esta conexión entre capacidades y errores, entendiendo los errores como manifestación de las dificultades, relaciona íntimamente nuestra inquietud inicial (por qué los alumnos cometen ciertos errores y cómo pueden evitarse) con la noción nuclear (capacidades) de la herramienta metodológica que vamos a emplear (caminos de aprendizaje) para combatir dicha inquietud, lo que nos invita a utilizar el análisis de los errores para seleccionar y clasificar las capacidades asociadas al aprendizaje de las expresiones algebraicas.

2.2.2. Camino de aprendizaje para una tarea. Grafo de un objetivo de aprendizaje

La noción de camino de aprendizaje de una tarea ha sido introducida en [9] para caracterizar un objetivo de aprendizaje, analizar el grado de incidencia de una tarea sobre el aprendizaje de dicho objetivo, y evaluar la actuación de los estudiantes. Esta idea describe las predicciones del docente sobre las capacidades que pueden necesitar los alumnos y los errores que pueden cometer en relación a una tarea. Concretamente, estos autores definen un camino de aprendizaje como "*una sucesión de capacidades que el profesor prevé que sus estudiantes activarán al resolver la tarea, junto con los errores en los que pueden incurrir*"

Obsérvese que este concepto y el de trayectoria hipotética de aprendizaje de [23] están muy relacionados, ya que ambos expresan una previsión del profesor sobre el aprendizaje de los alumnos. Sin embargo existen dos diferencias fundamentales entre las trayectorias y los caminos de aprendizaje: la primera es que el nivel de concreción de los caminos de aprendizaje y su fundamentación sobre las capacidades permite realizar un análisis de las tareas [10] asociadas a un objetivo. La segunda es que un camino de aprendizaje está asociado a una tarea, mientras que la trayectoria está asociada a unos objetivos (contiene varias tareas). De hecho, nosotros , nosotros contemplamos los caminos como herramienta para desarrollar una trayectoria hipotética (esquema correspondiente). Es usual describir los caminos de aprendizaje a través de grafos que incluyen capacidades y errores [9].

EJEMPLO:

Consideramos la siguiente tarea:

"traducir la siguiente expresión del lenguaje natural al algebraico: 'un número aumentado en ocho' ".

Realizar esa tarea conlleva activar las capacidades C1, C2, C3, C4, C6, C7, C8 y se pueden cometer los errores E1.1, E1.2, E1.3, E2, E3, E6 y E7 (pueden verse en la siguiente sección los significados tanto de las capacidades como de los errores). Un camino que puede seguirse para llevar a cabo esta tarea es la sucesión que vemos en la ilustración 2

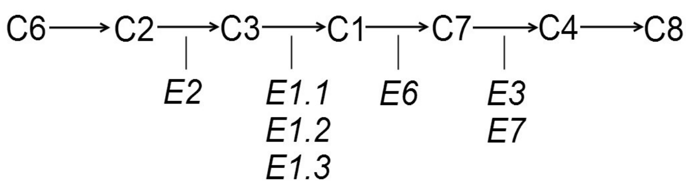

Ilustración 2: grafo que representa un camino de aprendizaje para la tarea descrita.

Los caminos de aprendizaje pueden ser demasiado complejos, dependiendo de la tarea que deseemos analizar, y en consecuencia resultar poco operativos. No obstante, es usual que al comparar diferentes caminos de aprendizaje asociados a tareas relacionadas observemos conjuntos de capacidades en dichos caminos que se activan siempre conjuntamente, constituyendo así unidades de significado dentro de los procesos de resolución de tareas. Estos conjuntos se denominan secuencias de capacidades [9] y describen un procedimiento particular dentro de la tarea concreta. Las secuencias de capacidades llevan asociados los errores propios del conocimiento al que van referidas. Conceptualmente es más interesante representar los grafos en términos de secuencias de capacidades, ya que estos informan de las subtareas que conlleva cada tarea.

EJEMPLO:

En la tarea anterior las capacidades C6, C2 y C3 se activan conjuntamente, al igual que C1 y C7 o C4 y C8. El grafo anterior, escrito en términos de secuencias de capacidades es el siguiente:

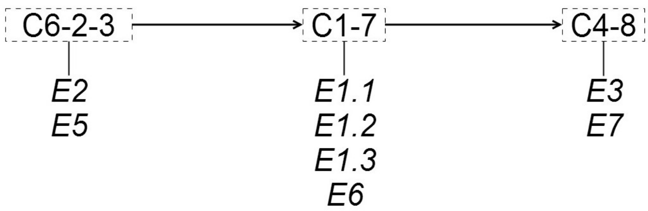

Ilustración 3: grafo que representa un camino de aprendizaje para la tarea a), escrito en términos de secuencias de capacidades y errores.

La secuencia C6-2-3 está relacionada con el conocimiento del lenguaje algebraico y el uso de letras para denotar cantidades indeterminadas. C1-7 es la secuencia encargada de interpretar la palabra “aumentar” como una suma. C4-8 está relacionada con la capacidad de escribir expresiones algebraicas sin omitir información ni necesidad de utilizar el símbolo “=”.

Las secuencias de capacidades son las unidades de significado que nos permiten describir objetivos de aprendizaje. Para ello, basta con asociar a cada objetivo un conjunto de tareas prototípicas, es decir, aquellas tales que si un estudiante las resuelve, entonces consideramos que dicho estudiante ha alcanzado el objetivo [9]. Una representación conjunta de los grafos de las tareas prototípicas muestra de forma ordenada el conjunto de procedimientos que el alumno debe exhibir para que consideremos que ha logrado el objetivo de aprendizaje propuesto.

En resumen, conocer el alcance real de un objetivo de aprendizaje en matemáticas requiere un estudio en profundidad de las capacidades que engloba dicho objetivo, las secuencias de dichas capacidades que se activan de forma conjunta y los posibles caminos de aprendizaje asociados a tareas que el profesor considera prototipo del objetivo de aprendizaje. El análisis de los errores que cometen los alumnos a la hora de realizar las tareas representativas del objetivo de aprendizaje es para nosotros la herramienta vertebradora de dicho estudio.

2.3. ANÁLISIS DE LOS ERRORES

¿Podemos aprovechar los errores de los alumnos para obtener información sobre qué y cómo han aprendido y usar esta información para prevenir los errores? “*Si el profesor entiende los* *errores específicos del alumno más como una información parcial de las dificultades del álgebra, que requiere un esfuerzo preciso, que como equivocaciones innecesarias, que con una mejor atención del alumno no se producirán, se habrá avanzado mucho en el éxito de la enseñanza-aprendizaje del álgebra*". (Socas et al. en [26]).

En [1] se indica que partir de los errores de los alumnos es un buen método para ver dónde están las dificultades. Nosotros asociamos los errores con las capacidades aprovechando la dualidad que exponen en [10] al interpretar capacidades y errores como dos caras de la misma moneda. Además, nuestra inquietud surge precisamente a causa de la observación de errores surgida en el ejercicio de la labor profesional. Por otra parte, existen autores en la literatura que estudian y clasifican errores en la iniciación al álgebra.

En [27] se propone estudiar las dificultades que tienen los alumnos con el lenguaje algebraico desde dos perspectivas: los errores con origen en un obstáculo y los errores que tienen su origen en una ausencia de significado, bien debido a la complejidad de los objetos matemáticos o dificultades asociadas a actitudes emocionales hacia el álgebra [26]. Como señala L. R. Booth: "*El álgebra es una fuente de confusión considerable y de actitudes negativas en los alumnos*". En [14] se señala que existen errores en el aprendizaje del álgebra que se repiten y se pueden clasificar. Propone tres bloques de errores con el fin de elaborar en un futuro una unidad didáctica basada en los errores analizados: el bloque 1 está referido a errores en la equivalencia entre lenguaje habitual y algebraico, el bloque 2 contiene errores en el manejo de expresiones algebraicas y el bloque 3 está relacionado con los errores en la resolución de problemas. Estos tres bloques, que se obtienen como resultado de un estudio realizado a 64 alumnos de 2ºESO de un instituto de Badajoz (puede verse el desglose detallado del estudio en [14]), nos sirven de guía para elaborar nuestro test.

3. OBTENCIÓN DE LAS CAPACIDADES A PARTIR DEL ANÁLISIS DE ERRORES

Como ya comentamos en la introducción, la motivación "origen" de este trabajo surge a causa de los errores que cometen los estudiantes. Al observar los resultados obtenidos por los alumnos de 2º E.S.O. en un examen de polinomios, nos preguntamos por qué se cometen determinados errores en el manejo de las expresiones algebraicas. Reflexionando sobre estos errores y observando que no solo existen, sino que se repiten los mismos a lo largo del tiempo en diferentes alumnos ([26], [14] y [1]), nos proponemos prevenir su aparición en los alumnos de 1º E.S.O., aprovechando que es la primera vez que estudian expresiones algebraicas y la posibilidad de impartir este bloque durante las prácticas del máster de formación de profesorado en el colegio Mater Purissima de Madrid. Lo primero que hacemos es elaborar un test con expresiones en lenguaje natural cuya traducción al lenguaje algebraico pueden acarrear errores prototípicos. Obtenemos el siguiente test:

Traducir las siguientes expresiones al lenguaje algebraico:

a) Un número aumentado en ocho.

b) Un número disminuido en siete.

c) El producto de tres y un número.

d) La edad de Juan dentro de nueve años si hoy tiene “a” años.

e) La diferencia entre siete y un número.

f) Cinco veces un número menos ocho.

g) Un número par.

h) El cubo de un número menos su cuarta parte es igual a sesenta y tres.

i) La suma de dos números consecutivos.

j) La suma de un número y su siguiente es nueve.

k) Un número más su doble más su triple es igual a doce.

l) El perímetro de un cuadrado de lado x.

m) El área de un rectángulo de base x y altura x+6.

n) El área de un rectángulo de base a+3 y altura a.

Nótese que, salvo d, todas las expresiones propuestas están en un contexto matemático. De entre ellas, las que están entre a y k se refieren a un contexto numérico, mientras que las tres últimas están en un contexto geométrico. Por otra parte, tanto d como l, m y n contienen la indeterminada en el enunciado, mientras que para las demás la elección de una letra es parte de la dificultad. Señalamos, además, que hemos concedido relevancia a la expresión de operaciones matemáticas a través del lenguaje natural, de acuerdo con [14].

3.1. ANÁLISIS DE ERRORES ENCONTRADOS

Pasamos el test a estudiantes de 2º E.S.O., ya que no podemos pasárselo a los alumnos con los que vamos a trabajar puesto que no tienen ninguna idea previa de expresiones algebraicas. (el hecho de que no las han aprendido nunca nos hace creer que podemos evitar que presenten dificultades de aprendizaje). Los errores más destacados en cada una de las cuestiones propuestas son los siguientes:

a) De 74 alumnos, 50 escriben “aumentar” con la operación de potenciación.

b) 32 alumnos no asocian “disminuir” con la operación de restar. Describen esta palabra, sobre todo, utilizando una potencia negativa o una división.

c) 24 alumnos dejan esta cuestión en blanco.

e) 19 alumnos dejan en blanco esta cuestión. De entre las demás, 17 alumnos no asocian “diferencia” con la operación de restar.

f) 50 alumnos no asocian “cinco veces” con la operación de multiplicar por cinco. De hecho, 46 de ellos lo asocian con potencias.

g) 51 alumnos dan respuesta sin utilizar letras, ofreciendo como respuesta ejemplos de números pares concretos.

h) Del total de 74 alumnos que realizaron el test, 22 dejan esta tarea en blanco, solamente 5 alumnos contestan correctamente y 29 alumnos escriben “la cuarta parte de un número” como la fracción 1/4.

i) Solamente 5 alumnos responden correctamente a este apartado, 22 alumnos no escriben correctamente “dos números consecutivos” (12 de ellos toman dos números consecutivos como dos números iguales) y otros 23 dejan este apartado en blanco.

j) Tan solo 3 alumnos dan la respuesta correcta. Otros 28 alumnos tratan de resolver la ecuación involucrada.

k) 20 alumnos no escriben el doble de manera correcta y 22 no escriben el cubo de manera correcta.

l) 16 alumnos escriben el área de un cuadrado en lugar del perímetro y 17 lo dejan en blanco.

m) 5 alumnos dan la respuesta correcta, 35 (casi la mitad) no escriben paréntesis en el producto cuando un factor es una suma.

n) Solamente 5 alumnos dan la respuesta correcta. 16 alumnos dejan esta cuestión en blanco.

El análisis más profundo de estos y otros errores encontrados nos ha permitido establecer el siguiente conjunto de errores que podrían cometer los alumnos de 1º ESO, que citamos por orden de aparición:

E1: No asocia “aumentar” con la operación de sumar.

E1.1: Asocia “aumentar” con la operación de multiplicar.

E1.2: Asocia “aumentar” con la operación de elevar a cierta potencia.

E1.1: Asocia “aumentar” con el signo + pero no con la operación de sumar.

E2: No utiliza letras para designar cantidades indeterminadas.

E3: Ignora parte de la expresión del lenguaje natural.

E4: No asocia “disminuir” con la operación de restar.

E4.1: Asocia “disminuir” con la operación de dividir.

E4.2: Asocia “disminuir” con la operación de elevar a potencias negativas.

E4.3: Asocia “disminuir” con el signo - pero no con la operación de restar.

E4.4: Asocia “disminuir” con una raíz.

E4.5: Asocia “disminuir” con elevar.

E5: Proporciona resultados numéricos.

E6: No utiliza operaciones aritméticas.

E7: Escribe cualquier expresión algebraica en forma de ecuación.

E8: No asocia “producto” con la operación de multiplicación.

E8.1: Asocia el producto con la suma.

E8.2: Asocia el producto con el cociente.

E9: Asocia “y” con la operación de sumar.

E10: No utiliza el producto como una operación binaria.

E11: No asocia “dentro de” a la operación de sumar.

E11.1: Asocia “dentro de” a la operación de multiplicar.

E11.2: Asocia “dentro de” a la operación de elevar.

E11.1: Asocia “dentro de” a la operación de restar.

E12: Añade letras que no deben estar.

E13: Cambia la letra dada por otra.

E14: No asocia “diferencia” con la operación de restar.

E14.1: Asocia “diferencia” con la operación de sumar.

E14.2: Asocia “diferencia” con el signo “menos” pero no con la operación de restar.

E14.3: Asocia “diferencia” con la operación de dividir.

E14.4: Asocia “diferencia” con la operación de multiplicar.

E14.5: Utiliza la palabra “diferencia” como equivalente a “distinto”.

E15: Cambia el orden de minuendo y sustraendo en una diferencia.

E16: No asocia “cinco veces” con multiplicar por cinco.

E16.1: Asocia “cinco veces” con potencia.

E16.2: Asocia “cinco veces” con otras operaciones.

E17: No asocia “número par” a multiplicar por dos.

E17.1: Asocia “número par” a elevar al cuadrado.

E17.2: Asocia “número par” a sumar dos.

E18: Escribe la cuarta parte de un número como 1/4.

E19: No asocia el cubo con la potencia tres.

E19.1: Asocia el cubo de un número con el cuadrado de un número.

E19.2: Asocia el cubo con otras operaciones.

E20: No asocia “la cuarta parte de un número” con dividir entre cuatro.

E20.1: Asocia “la cuarta parte” con la potencia cuarta.

E20.2: Asocia “la cuarta parte” con otras operaciones.

E21: Cambia la información dada.

E22: No escribe correctamente dos números consecutivos.

E22.1: Toma “números consecutivos” como dos números iguales.

E22.2: Toma “números consecutivos” con otras operaciones..

E23: Concatena operaciones numéricas de forma equivocada.

E24: No escribe “el doble de un número” de manera correcta.

E24.1: Identifica “el doble de un número” con el número dos.

E24.2: Identifica “el doble de un número” con el cuadrado de ese número.

E24.3: Identifica “el doble de un número” con otras operaciones.

E25: No escribe “el triple de un número” de manera correcta.

E25.1: Identifica “el triple de un número” con el número tres.

E25.2: Identifica “el triple de un número” con el cubo del número.

E25.3: Identifica “el triple de un número” con otras operaciones.

E26: Opera mal.

E27: Escribe el perímetro de un cuadrado incorrectamente.

E27.1: Multiplica los cuatro lados del cuadrado para calcular el perímetro de un cuadrado.

E27.2: Escribe el área del cuadrado para calcular el perímetro de un cuadrado.

E27.3: Escribe dos por el lado para calcular el perímetro de un cuadrado.

E27.4: Escribe otras operaciones para calcular el perímetro de un cuadrado.

E28: No escribe paréntesis en productos en los que algún factor es una suma.

E29: Escribe incorrectamente la fórmula del área de un rectángulo.

E29.1: Escribe fórmulas sin sentido aparente en lugar de la fórmula del área de un rectángulo.

E29.2: Escribe el área del triángulo en lugar de la fórmula del área de un rectángulo.

E29.3: Escribe el perímetro del rectángulo en lugar de la fórmula del área de un rectángulo.

E30: Escribe el perímetro cuando le preguntan por el área.

E31: No escribe correctamente “el siguiente de un número”.

E31.1: Toma el número y su siguiente como iguales.

E31.2: Toma “el siguiente de un número” como una variable independiente.

E31.3: Comete otros errores al escribir “el siguiente de un número”.

E32: Hace una descripción gráfica equivocada de una situación geométrica descrita en el lenguaje natural.

E33: Escribe incorrectamente el perímetro de un cuadrado a partir de su representación gráfica.

E34: Escribe incorrectamente el área de un rectángulo a partir de su representación gráfica.

Entre estos errores destacan aquellos relacionados con el vocabulario natural y las operaciones aritméticas, ya que hay gran cantidad de alumnos que no son capaces de relacionar adecuadamente expresiones habituales del lenguaje cotidiano como “diferencia” con la operación aritmética adecuada. En este sentido, además, observamos que hay variabilidad en dichos errores (los alumnos asocian “diferencia” con hasta cinco operaciones equivocadas).

3.2. CAPACIDADES ASOCIADAS A LA TRADUCCIÓN DE EXPRESIONES DEL LENGUAJE NATURAL AL LENGUAJE ALGEBRAICO

Utilizando la dualidad entre capacidades y errores ya mencionada, establecemos a continuación el listado de capacidades que tienen relación con las tareas que conforman el test.

La numeración utilizada respeta la asociación con los errores, aunque los presentamos agrupados según la tipología.

Las capacidades relacionadas con el vocabulario aritmético son las siguientes:

C1: Denotar “aumentar” con la operación de sumar.

C5: Denotar “disminuir” con la operación de restar.

C9: Denotar “producto” con la operación de multiplicar.

C10: Reconocer la función de “y” como conjunción (y no como suma).

C11: Denotar “dentro de” con la operación de sumar.

C14: Denotar la “diferencia” con la operación de restar.

C16: Denotar“n veces” con la operación de multiplicar por n.

C17: Denotar un “número par” con la operación de multiplicar por 2.

C18: Denotar “la n-ésima parte” con dividir entre n.

C19: Denotar “cubo” con una potencia de exponente 3.

C20: Escribir “números consecutivos” como aquellos cuya diferencia es 1.

C22: Denotar “el doble” con la operación de multiplicar por 2.

C23: Denotar “el triple” con la operación de multiplicar por 3.

C31: Denotar “siguiente” con sumar 1.

Las capacidades relacionadas con el vocabulario geométrico son las siguientes:

C25: Expresar adecuadamente la fórmula del perímetro de un cuadrado.

C27: Expresar adecuadamente la fórmula del área de un rectángulo.

C28: Representar gráficamente de forma adecuada una situación geométrica descrita en el lenguaje natural.

C29: Expresar adecuadamente el perímetro de un cuadrado a través de la interpretación de un gráfico.

C30: Expresar adecuadamente el área de un rectángulo a través de la interpretación de un gráfico.

Las capacidades que se refieren a la concepción y manejo de expresiones algebraicas como un lenguaje son las siguientes:

C2: Identificar cantidades desconocidas en un texto escrito en el lenguaje natural.

C3: Emplear letras para representar cantidades desconocidas.

C4: Incluir adecuadamente toda la información recibida.

C7: Emplear las operaciones aritméticas como reflejo de su denominación en el lenguaje natural.

C6: Utilizar las expresiones algebraicas como lenguaje en lugar de proporcionar resultados numéricos.

C8: Utilizar las expresiones algebraicas como lenguaje en lugar de buscar “soluciones” a través del signo “=”.

C12: Utilizar solo una letra para describir cantidades desconocidas pero relacionadas.

C13: Utilizar el mínimo número de letras necesarias al escribir las expresiones algebraicas.

Por último, las capacidades que expresan habilidades aritméticas son las siguientes

C15: Respetar las propiedades de las operaciones involucradas al expresarlas.

C26: Utilizar paréntesis para expresar productos en los que algún factor es una suma.

C24: Operar correctamente.

C21: Concatenar igualdades de forma adecuada.

Vamos a utilizar estas capacidades para caracterizar las tareas del test a través de caminos de aprendizaje que consideramos posibles, lo que nos proporcionará finalmente el grafo del objetivo.

4. GRAFO DEL OBJETIVO DE APRENDIZAJE PROPUESTO

La predicción de los posibles pasos que pueden dar los alumnos a la hora de resolver una tarea propuesta (y la descripción de dichos pasos en términos de las capacidades que deben poseer los alumnos para poder darlos) configuran un camino de aprendizaje para la tarea. Si en lugar de considerar capacidades tenemos en cuenta secuencias de capacidades y agrupamos en un grafo todos las posibilidades que ofrece una tarea, obtenemos un “mapa” de los procedimientos elementales que requiere nuestra tarea. Vamos a obtener dichos “mapas” para cada una de las tareas del test, incluyendo los errores asociados a las secuencias de capacidades que aparecen.

4.1. GRAFOS DE SECUENCIAS DE LAS TAREAS PROTOTIPO

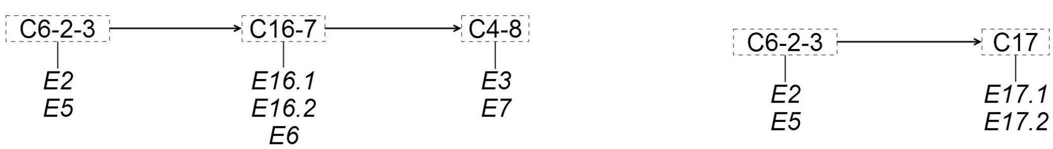

Ilustración 4: grafos de las secuencias de capacidades asociadas a las tareas b), c), d), e), f) y g). Casi todas presentan la misma estructura.

Las tareas b), c), d), e), f) y g) que vemos en la ilustración 4 son actividades muy sencillas, por lo que predecimos para ellas tan solo un camino posible. El resultado es que los grafos de todas estas tareas son muy similares, y la única diferencia significativa entre ellos es el de las capacidades asociadas al vocabulario aritmético. Por su parte, las tareas h) y k) presentan un grafo con dos caminos posibles, que dependen del orden en que los alumnos decidan formalizar los integrantes de la expresión. Por su parte, las tareas i) y j) son muy similares a las anteriores:

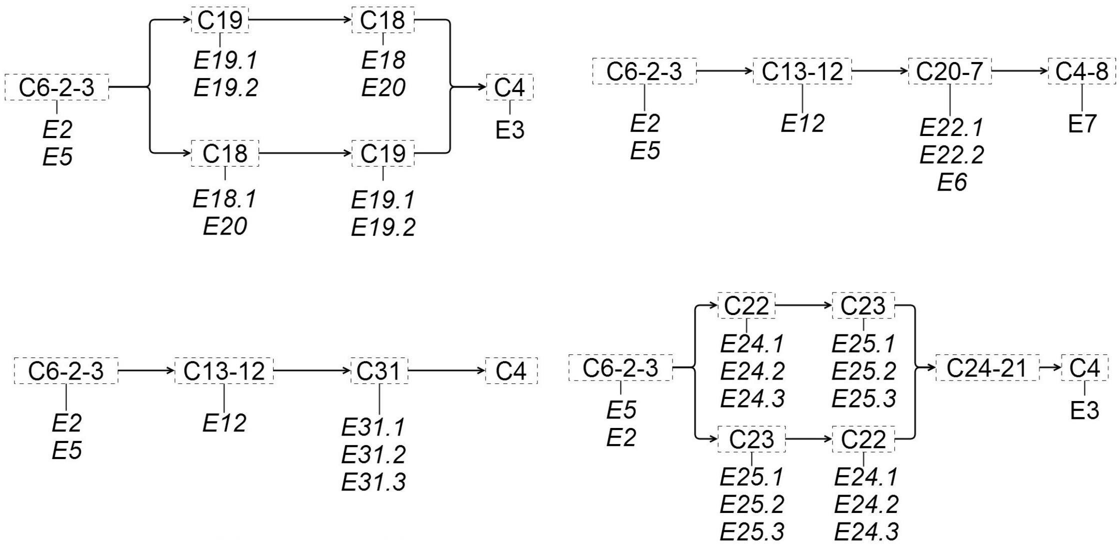

Ilustración 5: grafos de las secuencias de capacidades asociadas a las tareas h), i), j), k). Las tareas h) y k) presentan dos posibles caminos, aunque muy similares.

Las tres últimas actividades son de índole geométrica y presentan una estructura algo diferente. La posibilidad de pasar por una descripción gráfica confiere un poco de complejidad a los gráficos. Además, se utilizan otras capacidades (y surgen otros errores):

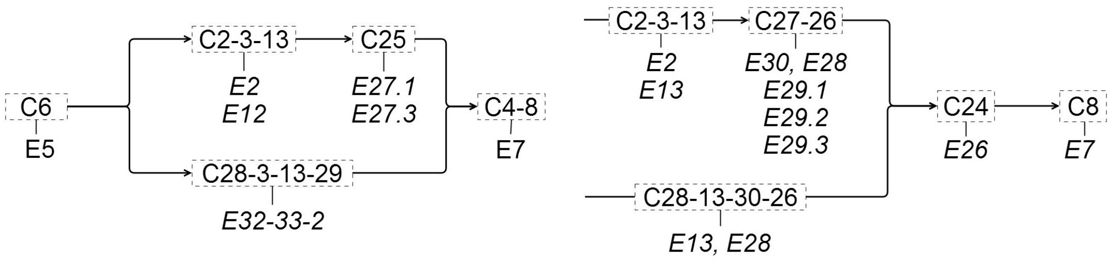

Ilustración 6: grafos de las secuencias de capacidades asociados a las tareas l) y m).

4.2. GRAFO DEL OBJETIVO

Dado que las tareas que componen el test son prototípicas del objetivo de aprendizaje marcado, la reunión de todos los grafos de secuencias asociados a las diferentes expresiones caracteriza el objetivo de aprendizaje. El resultado de dicha reunión se puede ver a continuación:

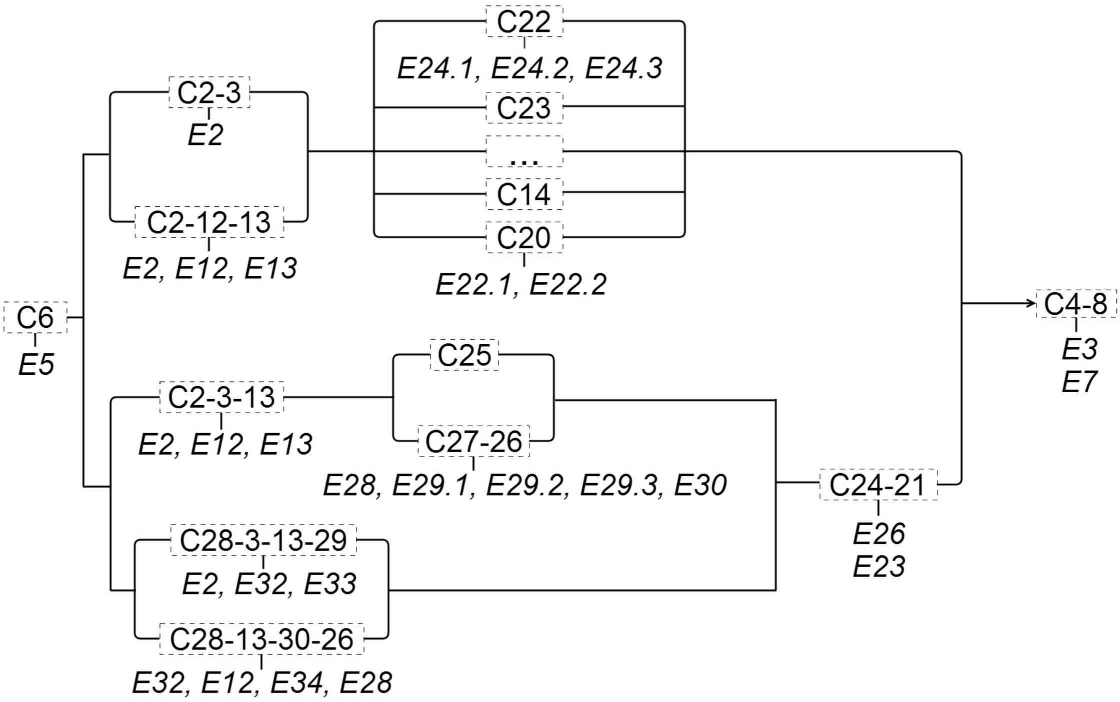

Ilustración 7: grafo de nuestro objetivo de aprendizaje

El grafo muestra las diferentes capacidades que deben activarse en un alumno cuando este es capaz de traducir expresiones del lenguaje natural al algebraico. La rama de arriba representa los contextos numéricos con una gran cantidad de variabilidad en cuanto al vocabulario, mientras que los dos caminos paralelos de abajo describen las dos posibilidades que ofrecen las tareas en contexto geométrico.

5.DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Conocer el alcance real de un objetivo de aprendizaje en matemáticas requiere un análisis de las capacidades que engloba dicho objetivo, las secuencias de dichas capacidades que se activan de forma conjunta y los posibles caminos de aprendizaje asociados a tareas que el profesor considera prototipo del objetivo de aprendizaje. En este trabajo hemos obtenido un grafo que resume toda esta información y constituye así una herramienta eficaz para mejorar el aprendizaje de las expresiones algebraicas de los alumnos de 1º ESO.

El grafo obtenido proporciona el nivel de concreción adecuado para diseñar tareas que fortalezcan los conocimientos de los alumnos y para analizar el grado de adecuación de una determinada tarea al objetivo de aprendizaje. De esta manera hemos desarrollado una THA útil como herramienta instruccional y con potencia investigadora. Actualmente estamos implementando en el aula de secundaria el diseño instruccional asociado a nuestra trayectoria hipotética de aprendizaje, con el propósito de completar no solo un único ciclo docente de los que anuncia Simon o los métodos de investigación de diseño, sino varios de ellos. Nuestro fin a medio plazo es realizar un futuro análisis retrospectivo que nos permita ahondar en las dificultades que presentan los alumnos en en su primer contacto con el álgebra. Emplazamos esta investigación para un futuro trabajo.

Deseamos destacar, por último, la valiosa información que nos ha proporcionado el análisis de los errores de los alumnos de 2º de E.S.O. acerca de los procedimientos elementales asociados a nuestro objetivo de aprendizaje. No obstante, entendemos que una combinación de este análisis de errores con el análisis del contenido [10] puede ser la herramienta óptima para conocer y describir las capacidades asociadas a un tema de matemáticas. Explorar dicha posibilidad es una posibilidad de investigación de gran interés.

6.BIBLIOGRAFÍA

[1] Barbero, C., Fuentes, I., Azcárate, A. G., & Ortiz, M. A. (1993). Ideas y actividades para enseñar álgebra. Síntesis.

[2] Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. Mathematical thinking and learning, 6(2), 81-89.

[3] Clements, D. H., Sarama, J., Spitler, M. E., Lange, A. A., & Wolfe, C. B. (2011). Mathematics learned by young children in an intervention based on learning trajectories: A large-scale cluster randomized trial. Journal for Research in Mathematics Education, 42(2), 127-166.

[4] Dorsch, F. (1985). Diccionario de psicología. Barcelona: Herder.

[5] España. Decreto 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid, 29 de mayo de 2007, núm 126, pp. 48-139

[6] España. Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado, 4 de mayo de 2006, núm 106, pp. 17158-17207.

[7] Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., & Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. Recherches en Didactiques des Mathematiques.

[8] Gómez, P. (2002). Análisis del diseño de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En Penalva , M. C.; Torregosa, G.; Valls, J. (Eds.), Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales (pp. 341-356). Alicante: Universidad de Alicante.

[9] Gómez, P., González, M. J., & Romero, I. (2014). Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación. Profesorado. Revista de Curriculum y Formación de Profesorado.

[10] Gómez, P., & Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. PNA, 1(2), 79-98.

[11] Grant, R. M. (1996). Dirección Estratégica: Conceptos. Técnicas y Aplicaciones, Editorial Civitas, Madrid (i998).

[12] Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. Mathematical thinking and learning, 6(2), 105-128.

[13] Gravemeijer, K., & van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. The Elementary School Journal, 109(5), 510-524.

[14] Hidalgo Carranza, MªJosé. (2002). Memoria del periodo de docencia e investigación del programa de doctorado “Enseñanza de las ciencias experimentales y de las matemáticas”. Universidad de Extremadura. Badajoz, 2002. Director Profesor Dr D. Lorenzo J. Blanco Nieto.

[15] Lesh, R., & Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind-in which development involves several interacting and simultaneously developing strands.Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 205-226.

[16] Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. Educación Matemática, 25(1), 31-51.

[17] Lupiáñez, J. L. (2009). Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria (Doctoral dissertation, Universidad de Granada).

[18] Lupiáñez, J. L., & Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. PNA, 3(1), 35-48.

[19] Lupiáñez, J. L., Rico, L., Gómez, P., & Marín, A. (2005). Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.

[20] Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 29(1), 75-88.

[21] Mousley, J. (2004). An aspect of mathematical understanding: The notion of “connected knowing”. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 377-384). Bergen: Bergen University College.

[22] Schulze, W. S. (1994). The two schools of thought in resource-based theory: Definitions and implications for research. Advances in strategic management, 10(1), 127-152.

[23] Simon, M.A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 114-145.

[24] Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory.Mathematical thinking and learning, 6(2), 91-104.

[25] Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K., & Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. Journal for research in mathematics education, 305-329.

[26] Socas Robayna, M., Camacho Machín, M., Palarea Medina, M., & Hernandez Dominguez, J. (1996). Iniciación al álgebra. Editorial Síntesis, Colección: Matemáticas: Cultura y Aprendizaje, Madrid, España.

[27] Socas Robayna, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria: Aportaciones de la investigación. Números, (77), 5-34.

[28] Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 129-162.

[29] Suavita, M. A. (2012). Aprendizaje de profesores sobre el organizador del currículo hipótesis de aprendizaje (Doctoral dissertation, Universidad de Granada).