Modelización con el uso de sensores y datos dinámicos[1]

[ab]María Teresa Navarro Moncho; [ab]Onofre Monzó del Olmo; [b]Luis Puig

email: Teresa.Navarro-Moncho@uv.es; onofre.monzo@uv.es; luis.puig@uv.es

[a]IES Veles e Vents de Torrent, [b]Universitat de València-Estudi General

RESUMEN

Dentro de las orientaciones didácticas actuales respecto del aprendizaje por competencias, tiene especial relevancia la modelización, es decir la construcción de modelos matemáticos de objetos y de procesos reales para resolver problemas.

La calculadora gráfica CP400 dispone del menú "Trazar imagen" que permite construir modelos de regresión a partir de imágenes (fotos) o vídeos. Por otro lado, es importante el análisis de la resolución de problemas de modelización con el uso de sensores. Hay diferentes tipos de sensores (de sonido, de intensidad luminosa, de distancia/velocidad, etc.) con los cuales se pueden recoger datos reales y analizarlos con la calculadora gráfica. El objetivo del taller es estudiar el uso de esta calculadora y sensores para desarrollar en ESO y Bachillerato la competencia matemática de modelar.

Modelización, sensores, vídeo, datos reales, familias de funciones, parámetros, álgebra, calculadoras gráficas

[1]Esta investigación es parte del proyecto EDU2012-35683 subvencionado por la Dirección General de Investigación Científica y Gestión del Plan Nacional I+D+I del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

INTRODUCCIÓN

Los materiales que presentamos en este taller forman parte de un estudio que estamos desarrollando desde hace ya unos años sobre la enseñanza y el aprendizaje del proceso de modelización, y de los conceptos de familia de funciones y de parámetro, del que hemos ido dando cuenta en diversas publicaciones ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [9]).

Como ya hemos afirmado en reiteradas ocasiones, nuestra idea central es que el modelo de enseñanza produce una comprensión rica de los conceptos de familia de funciones y desarrolla la competencia en la transformación de expresiones algebraicas al darle sentido a esas transformaciones, gracias a que tiene las siguientes características generales:

1) se usa un entorno que dispone de cálculo simbólico, recogida de datos experimentales mediante vídeos o sensores, representación en tablas y gráficas cartesianas y tratamiento estadístico de datos;

2) se plantea el estudio de la forma canónica y = $af\left(\frac{x-c}{b}\right)+d$ de familias de funciones prestando especial atención al significado de los parámetros y la interrelación entre sus cambios, los de la gráfica correspondiente y los del fenómeno que modelizar;

y 3) se plantean situaciones problemáticas en las que se realizan experimentos para obtener datos reales de fenómenos que se modelizan con esas familias de funciones.

Pero además, como el proceso de modelización es un proceso de resolución de problemas, es preciso incorporar al modelo de enseñanza la necesidad de una buena gestión del proceso, e incluir en la enseñanza los procedimientos específicos que permiten realizarla. Nuestra idea es que el análisis cualitativo del fenómeno, por un lado, y, por otro, de las características de las familias de funciones y el significado de los parámetros, es un elemento crucial en la gestión del proceso de modelización por parte de los alumnos. Estos análisis cualitativos están pues explícitamente incorporados a la enseñanza.

En las publicaciones citadas anteriormente describimos con un cierto grado de detalle los fundamentos teóricos del modelo de enseñanza, y los materiales de enseñanza y algunos resultados parciales de un experimento de enseñanza en el que el entorno informático utilizado ha sido las calculadoras gráficas Classpad 300 o Classpad 330. En esta ocasión utilizaremos las calculadoras gráficas Classpad 400 que incorporan, entre sus nuevas características, el tratamiento de datos estáticos y dinámicos obtenidos a partir de imágenes y videos, respectivamente.

1. Objetivos

- Usar la calculadora para construir modelos de situaciones reales a partir de fotos y vídeos, y a partir de datos reales recogidos por medio de sensores.
- Interpretar los resultados del modelo y analizar críticamente las posibles aplicaciones y modificaciones del modelo.
- Estudiar los procesos de pensamiento relacionados con la construcción de modelos y la resolución de problemas de matemáticas (validación, implementación, generación de resultados, crítica de los resultados, generalización).

2. Contenidos

- Modelos de regresión sobre datos estáticos: fotos e imágenes con la CP400.
- Ajuste manual y automático de varios modelos funcionales con la CP400.
- Modelos de regresión sobre datos dinámicos: vídeos con la CP400.
- Obtención de datos reales con el uso de varios tipos de sensores.
- Construcción y análisis de modelos sobre los datos recogidos por medio de sensores.
- Estudio de los procesos en la resolución de problemas de modelización.

3. Metodología

La participación activa del profesorado en las diferentes actividades es la vía de consecución de los objetivos. Los asistentes trabajarán individualmente, y en grupo, la resolución de las diversas actividades de modelización propuestas. Habrá una discusión general en grupo sobre el proceso de resolución de la tarea y se reflexionará sobre su implementación en las clases de ESO y bachillerato.

4. El modelo de enseñanza

Todos los materiales que utilizaremos en este taller presentan la misma estructura, basada en las competencias necesarias en un proceso de modelización. Estas competencias están expuestas en [2], [7], [8], [9]:

1. Propiedades cualitativas de los tipos de funciones disponibles.

2. Análisis cualitativo del fenómeno que se va a observar, con respecto al mismo tipo de propiedades.

3. Formas canónicas de los tipos de funciones.

4. Significado de los parámetros en las formas canónicas.

5. Efecto de los cambios en los parámetros en las propiedades cualitativas.

6. Transformaciones algebraicas para llevar una expresión algebraica a una forma canónica.

7. Análisis cualitativo de las limitaciones del modelo.

Los puntos 1 y 2 muestran la importancia del conocimiento cualitativo tanto del fenómeno como de diversos tipos de funciones, ya que en el proceso de modelización desempeñan un papel muy importante esos conocimientos en la toma de decisiones sobre qué tipo (o tipos) de función va a ser el que se va a usar como modelo (o cuáles se van a comparar), y en la posterior adecuación de la función ya obtenida como modelo para predecir otros valores del fenómeno que no se han obtenido experimentalmente.

La elección de las preguntas antes de realizar cualquiera de los experimentos que vamos a realizar responde a lo expuesto en [2], [7], [8], [9] sobre los elementos que, de manera esquemática, podemos decir que están presentes en cualquier proceso de modelización:

1. Un fenómeno que se describe mediante algunas medidas de algunas magnitudes.

2. Una regresión entre las medidas.

3. Un tipo de función que se ajusta mediante esa regresión.

4. Una decisión sobre el tipo de función que se va a ajustar de entre un catálogo de funciones disponibles, basado en:

    4.1. Un conocimiento de propiedades cualitativas del fenómeno.

    4.2. Un conocimiento de propiedades cualitativas de los tipos de funciones disponibles.

5. La determinación de la función concreta de ese tipo, que describe los datos obtenidos de ese fenómeno concreto observado.

6. La expresión de la función en una forma canónica, elegida de manera que los parámetros expresen propiedades del fenómeno que interesa resaltar.

5. MATERIALES

Pretendemos realizar cuatro actividades en el taller:

1. Alargamiento de un muelle
2. Caída de un cuerpo
3. Enfriamiento y calentamiento de un cuerpo
4. Naturaleza del sonido

En la primera, tercera y cuarta recogeremos los datos reales mediante diferentes sensores (movimiento, temperatura y sonido, respectivamente). En la segunda, obtendremos los datos a partir de un vídeo previamente grabado y convertido, mediante *CASIO Picture Conversion Engine for ClassPad II*, para que se pueda reproducir en la calculadora.

Las actividades que proponemos se presentan de la misma manera que a los alumnos de ESO y bachillerato, y todas tienen una estructura común:

- unas preguntas previas sobre el conocimiento de las propiedades cualitativas del fenómeno que se pretende modelizar,
- una descripción detallada de los materiales necesarios para la recogida de datos del experimento y cómo se debe de realizar dicho experimento,
- elección de la familia de funciones que se ajusta al fenómeno estudiado, obtención de la función concreta y su expresión en la forma canónica antes mencionada,
- y, finalmente la formulación de algunas preguntas sobre la limitación del modelo.

Por una cuestión de espacio, solamente presentamos en este documento dos de las actividades que realizaremos en el taller. Utilizamos la primera actividad, alargamiento de un muelle, cómo material de enseñanza del proceso de modelización pero también para explicar cómo obtener los datos experimentales, es decir, cómo utilizar los sensores, cómo realizar la transmisión de datos de unas calculadoras a otras y cómo utilizar diferentes menús y aplicaciones de la calculadora para el tratamiento de los mismos. La segunda actividad que proponemos, la caída de un cuerpo, la hemos presentado en diversas ocasiones utilizando diferentes entornos tecnológicos, con la calculadora Classpad 300 o Classpad 330 y el sensor de movimiento; y con IPads y diferentes aplicaciones para los mismos. En esta ocasión, realizaremos el mismo experimento obteniendo los datos a partir de un vídeo utilizando las nuevas características y aplicaciones de la CP400. A lo largo de la actividad detallamos cómo utilizar estos nuevos elementos de la calculadora gráfica CP400.

5.1. ALARGAMIENTO DE UN MUELLE

Figura 1. Alargamiento de un muelle

En esta experiencia analizaremos la función que describe el alargamiento un muelle al aplicar una fuerza en su extremo. Utilizaremos la fuerza que proporciona la cantidad creciente de canicas que añadiremos en un recipiente situado en el extremo del muelle.

Material necesario:

- EA-200

- Motion Sensor II

- Una ClassPad 400

- Cable de conexión

- Aplicación E-ConEA200

- Un listón
- Un muelle
- Un vaso desechable
- Tres clips
- Canicas

¿Sabes cuál es el modelo que describe el alargamiento de un muelle al aplicarle una fuerza?

Antes de realizar el experimento haz un esbozo de cómo crees que debería de ser la gráfica que representa el alargamiento del muelle *y* en función de la fuerza aplicada *x*.

Desarrollo de la actividad

1. Preparamos el experimento

1.1. Colocamos el listón (utilizaremos la regla de pizarra) apoyada entre dos sillas como se muestra en la fotografía de la figura 1.

1.2. Colocamos el muelle en el centro del listón.

1.3. Abrimos los tres clips y los inserimos, lo más simétricamente posible, sobre la orilla del vaso. Después colgamos el vaso del muelle.

1.4. Situamos la EA-200 en el suelo exactamente debajo del vaso vacío de manera que se pueda medir la distancia entre el sensor y el vaso.

2. Preparamos los datos del experimento

2.1. Conectamos la EA-200 en el canal Sonic.

2.2. Ejecutamos la aplicación E-ConEA200 y seguimos las instrucciones:

Figura 2. Aplicación E-Con EA200

2.2.1. Elegimos el número de sensores y el tipo que vamos a utilizar. En este caso, solo utilizaremos uno, el de movimiento (Motion) del tipo CASIO, las unidades expresadas en metros (Meters).

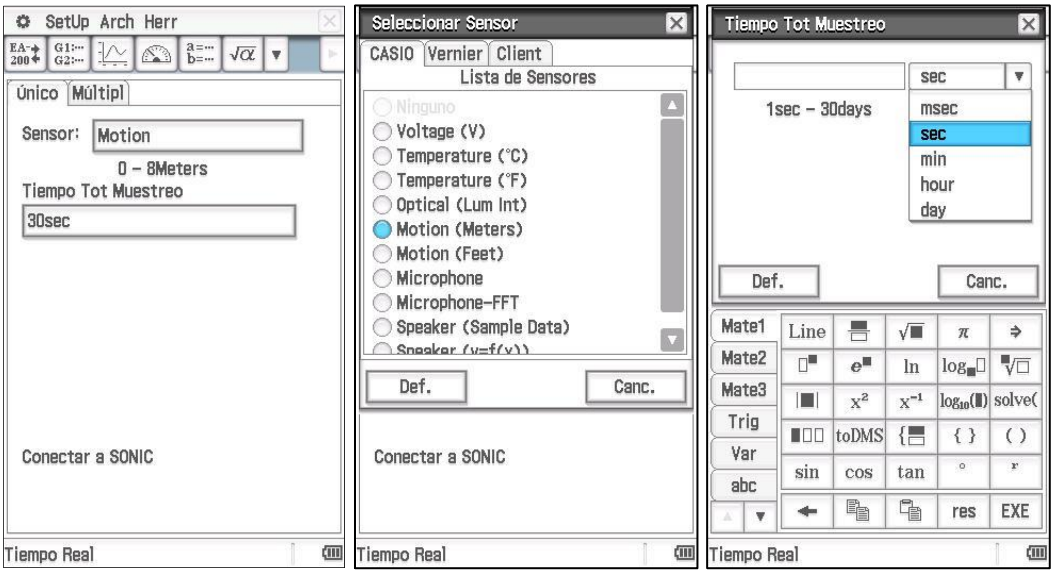


Figura 3. Selección del sensor

2.2.2. Seleccionamos la ventana Multímetro y comenzamos la toma de datos. En esta ocasión tomaremos ocho datos. Empezamos con el vaso vacío. Después aumentamos de una en una las canicas hasta realizar las ocho tomas de datos.

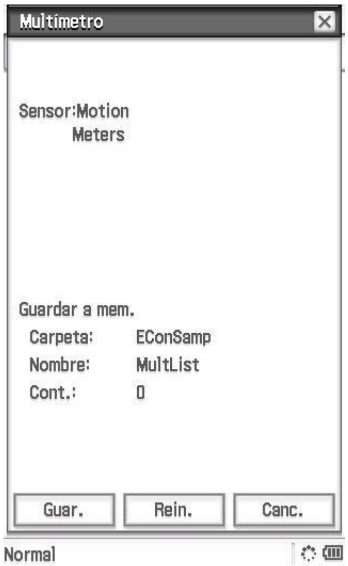


Figura 4. Ventana Multímetro

2.3. Los datos se han guardado en la lista ***MultiList*** de la carpeta ***EConSamp***.

3. Creamos listas con los datos

3.1. Regresamos al menú tocando 

en el panel de iconos y seleccionamos la aplicación de Estadística  .

3.2. Creamos una carpeta que llamaremos *muelle* y la seleccionamos como carpeta actual.

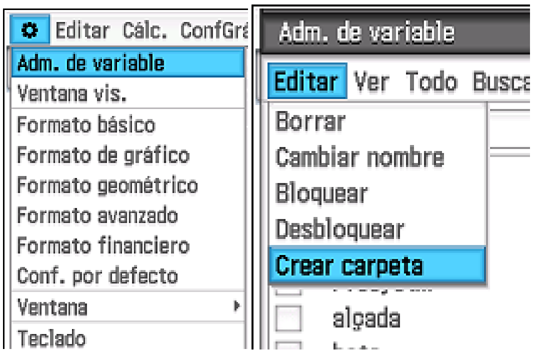


Figura 5. Creación de la carpeta *muelle*

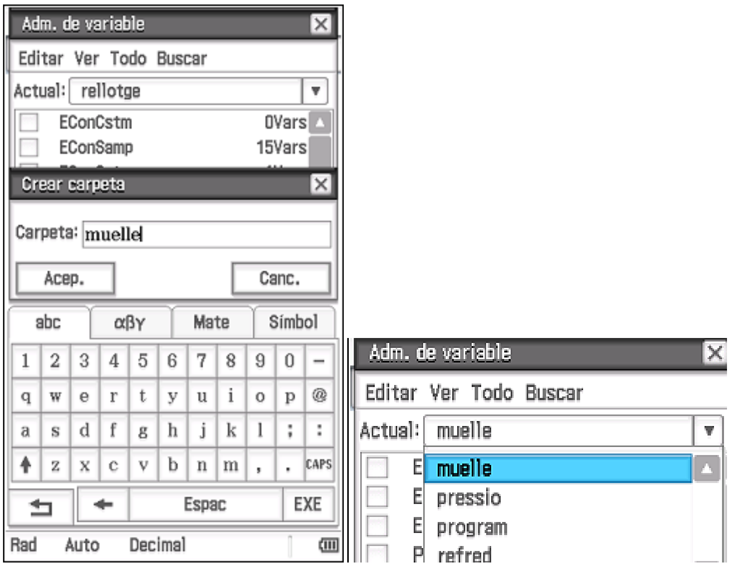


Figura 6. Elección de carpeta *muelle* como la actual

3.3. Creamos dos listas:

3.3.1. La primera, que llamaremos *canicas*, contendrá el número de canicas que vamos añadiendo.

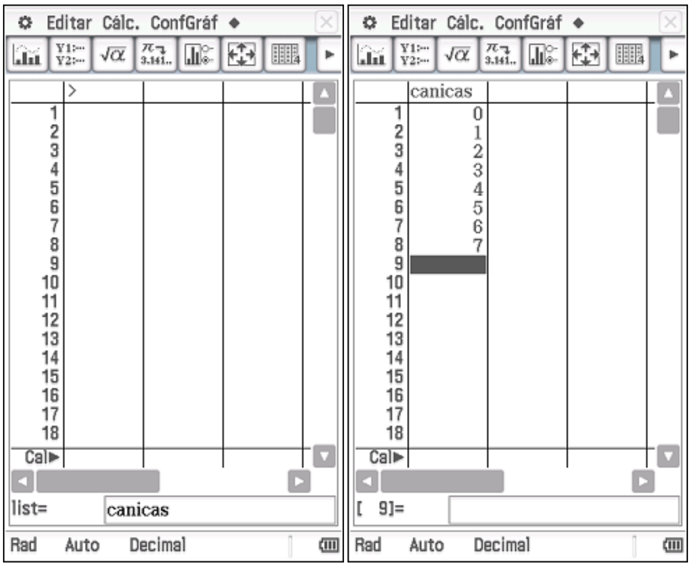


Figura 7. Número de canicas

3.3.2. La segunda, la distancia del sensor al vaso que llamaremos *dist*. Tomaremos los datos desde preferencias , ***Adm. De variables / EConSamp / Multilist***.

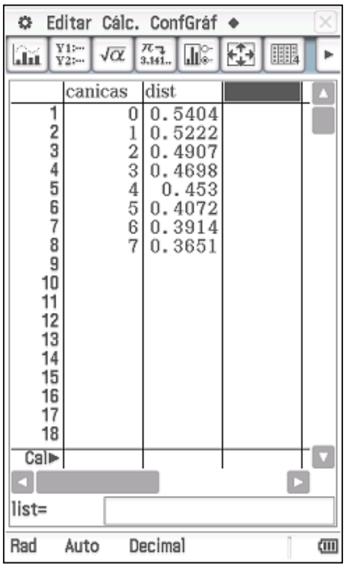


Figura 8. Distancia del sensor al vaso

De esta forma tenemos dos listas, canicas y distancia, que podemos editar y estudiar.

4. Transferimos los datos de una calculadora a otra

Para la transferencia de los datos únicamente necesitaremos el cable de conexión, que estará conectado a las dos calculadoras, y seguir una serie de pasos descritos en el manual [10].

5. Abrimos las listas *canicas* y *dist*.

5.1. Tocamos la aplicación de Estadística .

5.2. Abrimos las listas *canicas* y *dist* que tenemos guardadas en la carpeta *muelle*.

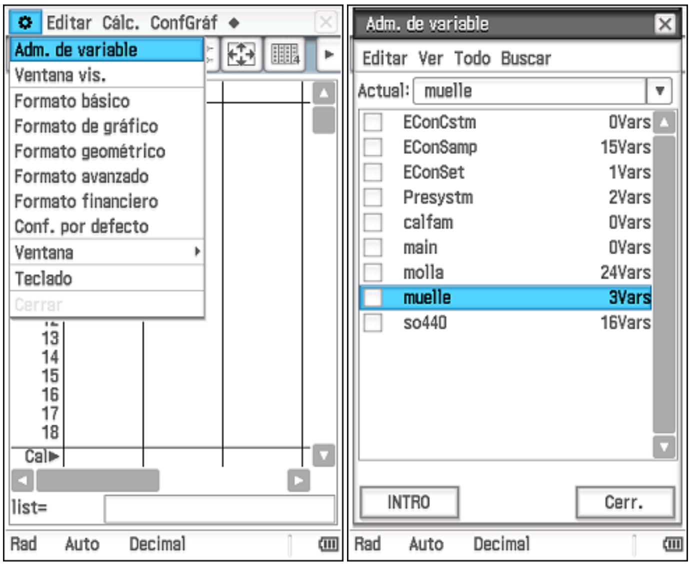


Figura 9. Abrimos la carpeta en la aplicación de Estadística

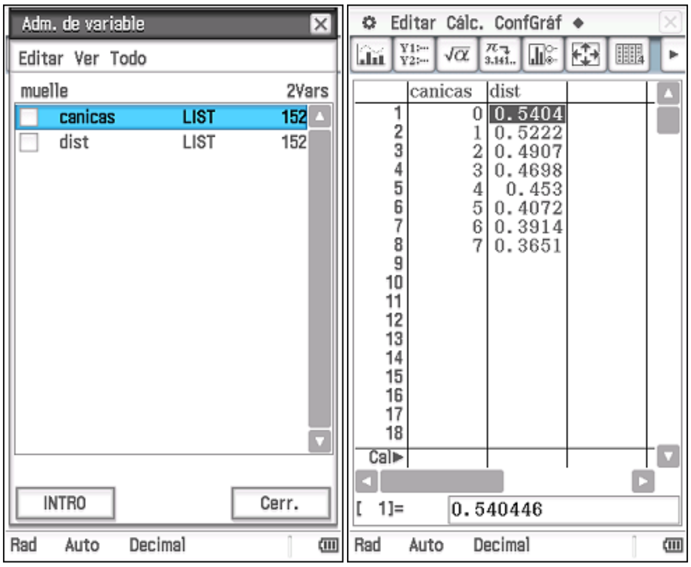


Figura 10. Abrimos las listas de la carpeta *muelle*

6. Representamos los datos.

6.1. Tocamos el cuadro de configuración de los gráficos estadísticos .

6.2. Seguimos las instrucciones y tocamos **Def**.

6.3. Tocamos dibujar el gráfico estadístico .

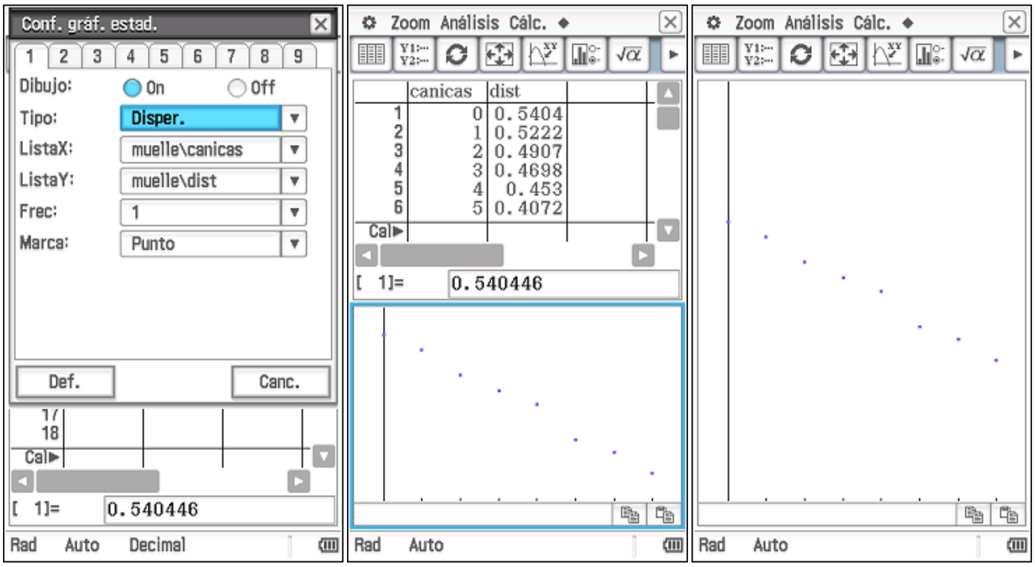


Figura 11. Nube de puntos de los datos experimentales

Antes de continuar, contesta las siguientes cuestiones:

1) ¿Cuál es la distancia del vaso al sensor cuando no contiene ninguna canica?

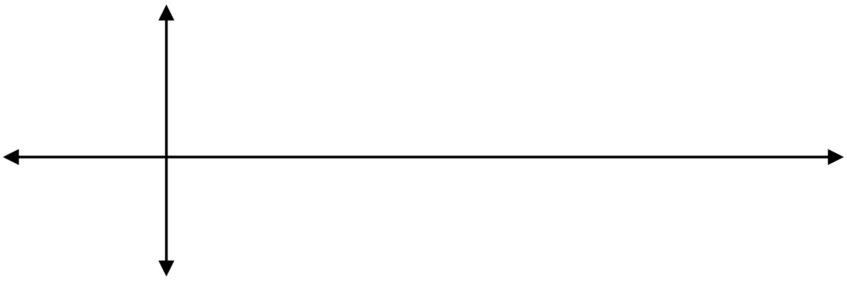
2) ¿El incremento de la longitud del muelle es proporcional al número de canicas?, es decir, ¿$\frac{\Delta\text{distancia}}{\Delta\text{canicas}}$ es constante?

3) ¿En qué tipo de funciones la variable dependiente (*y*) es proporcional a la independiente (*x*)?

4) ¿Cuál es la definición de pendiente de una recta?

5) ¿Cuál es la ordenada en el origen en una función?

6) ¿Cuál es la función que mejor se ajusta a la nube de puntos? Dibújala.



7. Obtención de la ecuación de regresión manualmente.

Utilizaremos la definición de pendiente para obtener la ecuación de la recta de regresión lineal.

7.1. Con la opción **Análisis/Trazo** nos posicionamos sobre uno de los puntos.

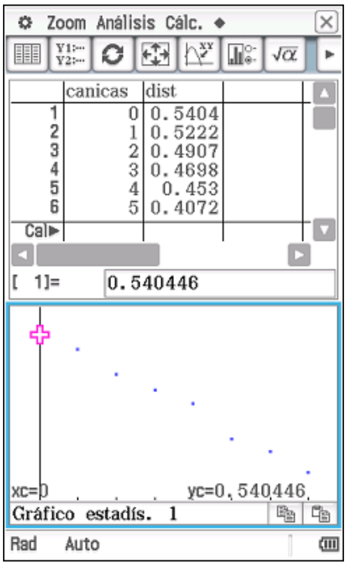


Figura 12. Selección de un punto

7.2. Seleccionamos la aplicación principal 

7.3. Tocamos Keyboard para mostrar el teclado virtual.

7.4. Seleccionamos las variables *xc* y *yc* del catálogo y las almacenamos en dos nuevas variables *A* y *B*.

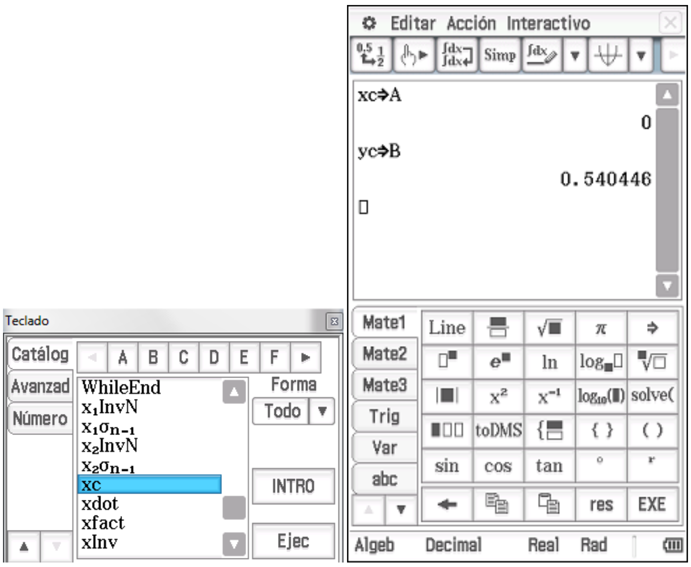


Figura 13. Variables *A* y *B*

7.5. Repetimos las acciones con otro punto y almacenamos los datos en dos nuevas variables *C* y *D*.

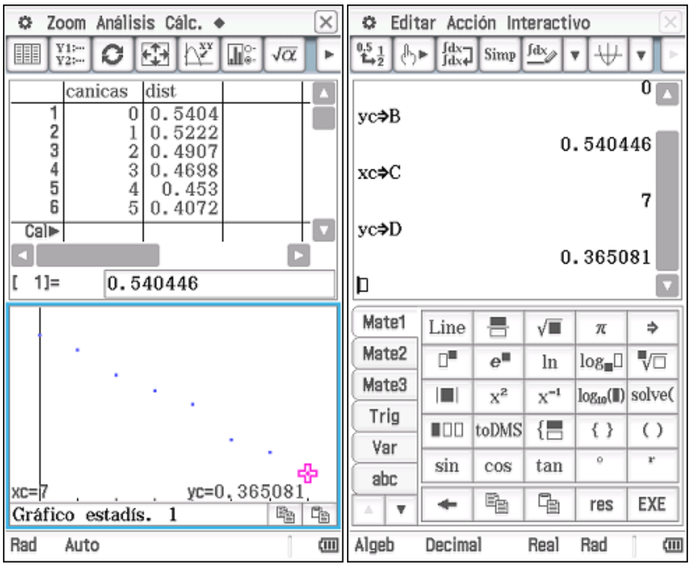


Figura 14. Variables *C* y *D*

7.6. A partir de los dos puntos de la recta que buscamos podemos calcular la pendiente:

$$\frac{D - B}{C - A}$$

y la almacenamos en la variable *M*.

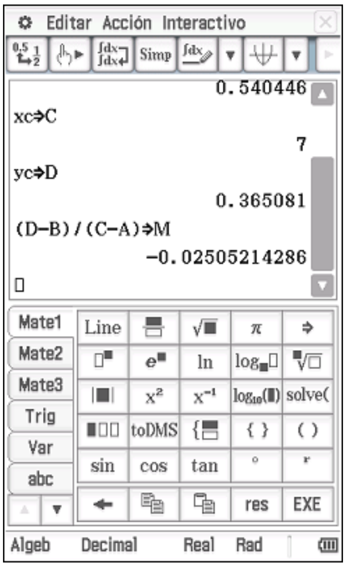


Figura 15. Variable *M*

7.7. Definimos la recta *y=Mx* y tocamos

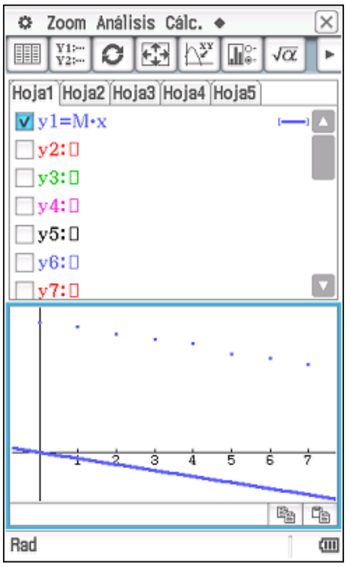


Figura 16. Representación de la recta *y=Mx*

7.8. Observamos que la recta es paralela a los datos, para acabar el problema es necesario sumarle la ordenada en el origen.

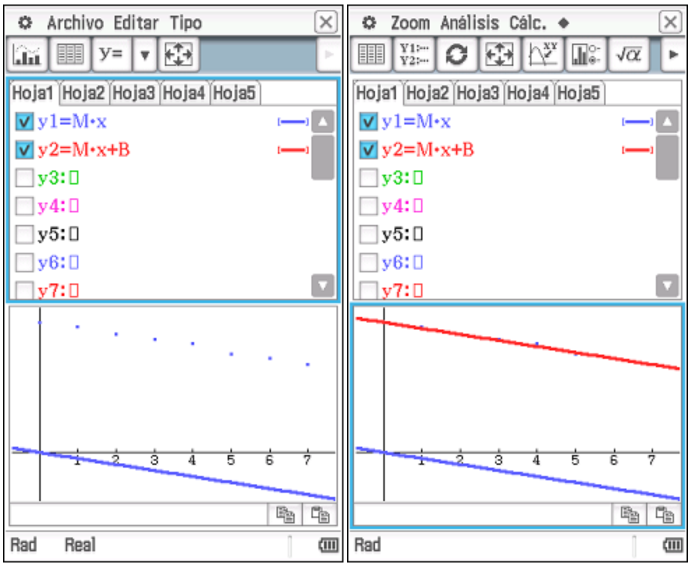


Figura 17. Gráfica de la regresión obtenida manualmente

Ahora sí que tenemos una función que se ajusta a los datos obtenidos en el experimento.

$$y = -0.025x + 0.540$$

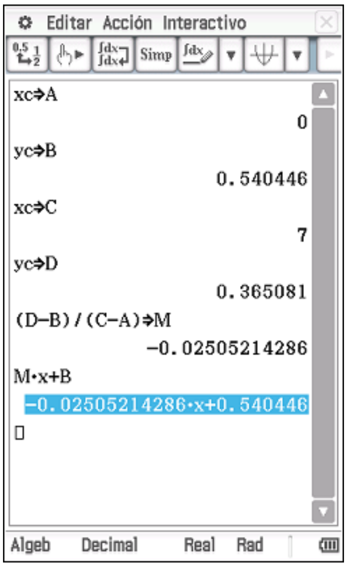


Figura 18. Ecuación de la regresión obtenida manualmente

8. Obtención de la ecuación de regresión con la aplicación de estadística de la CP400.

8.1. Desde la pantalla con las listas y la gráfica seleccionamos el submenú de cálculos (**Cálc**) y regresión lineal.

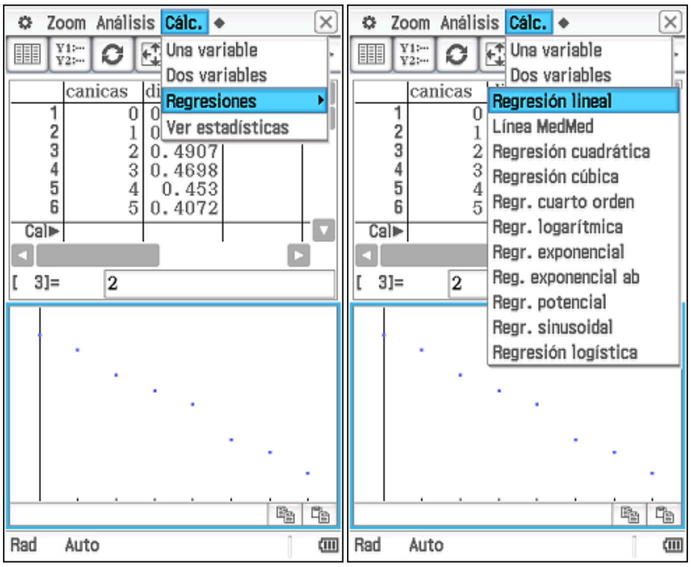


Figura 19. Elección de la regresión

8.2. Indicamos cuáles son los datos que queremos almacenar, dónde queremos que almacene la ecuación y aceptamos.

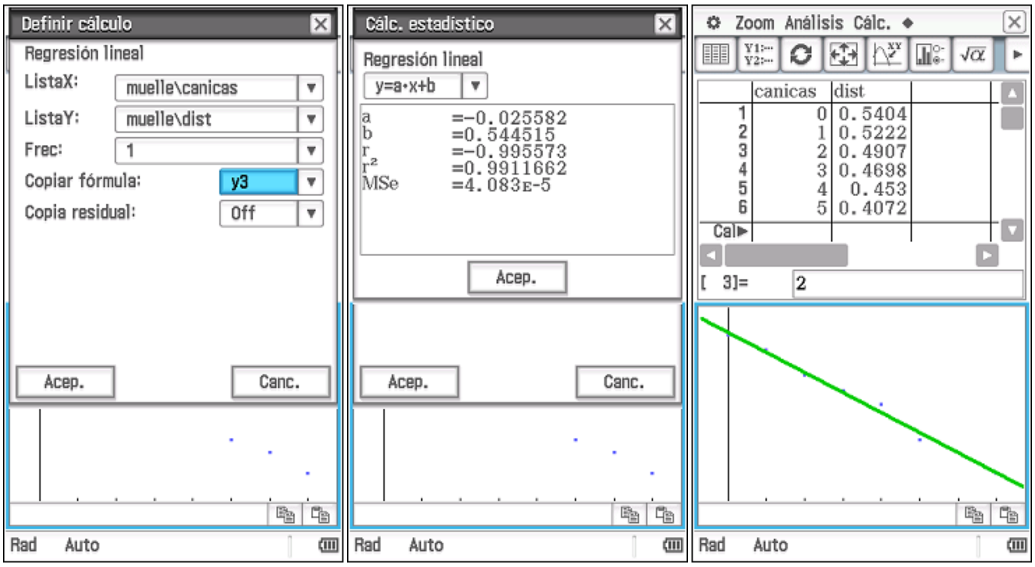


Figura 20. Regresión lineal

La recta de regresión es: $y = -0.026 \cdot x + 0.545$

Antes de continuar, contesta las siguientes cuestiones:

1) ¿Podemos utilizar estas ecuaciones para predecir cuál sería la distancia del sensor al vaso que contiene las canicas, con un número de canicas diferente de las que tenemos?

2) a) ¿Cuál es la distancia del vaso al sensor si el número de canicas es *x* = 10?

$y(10) =$ ____________________________

b) ¿Y Cuando *x* = 100?

$y(100) =$ ____________________________

c) ¿Y Cuando *x* = 2,5?

$y(2{,}5) =$ ____________________________

3) ¿Qué significa que para 100 canicas nos dé un valor negativo?

9. Estudio del alargamiento del muelle.

Hasta ahora solamente hemos analizado cómo varía la distancia del sensor al vaso en función del número de canicas. Pero, ¿cuál es el alargamiento del muelle cuando el número de canicas es *x* = 0? ¿Y cuándo *x* = 7?

¿Qué transformaciones gráficas crees que hay que hacer en los datos para analizar cómo varía el alargamiento del muelle según el número de canicas?

Dibuja cómo sería la nube de puntos.

Describe detalladamente todos los pasos que has seguido.

¿Y numérico-algebraicas? Describe detalladamente todas las transformaciones que se deberían hacer.

Con la calculadora podemos hacerlas siguiendo los pasos siguientes:

1. Volvemos a las listas tocando el menú de Estadística.

2. Creamos una nueva lista.

3. En la barra Cal 

podemos definir las operaciones correspondientes a las transformaciones numérico-algebraicas que consideremos oportunas.

Crea las listas que consideres oportunas, guárdalas en la carpeta muelle y contesta las siguientes cuestiones:

1) Representa la nueva nube de puntos y obtén la ecuación de regresión que consideres más adecuada para los nuevos datos.

$$g(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

2) ¿Cuál es el alargamiento del muelle cuando el número de canicas es *x* = 10?

$$g(10) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

b) ¿Y cuando *x* = 100?

$$g(100) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

c) ¿Y cuando *x* = 2,5?

$$g(2{,}5) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

3) ¿Hay algún dato que te sorprende? En caso afirmativo, indica cuál y por qué.

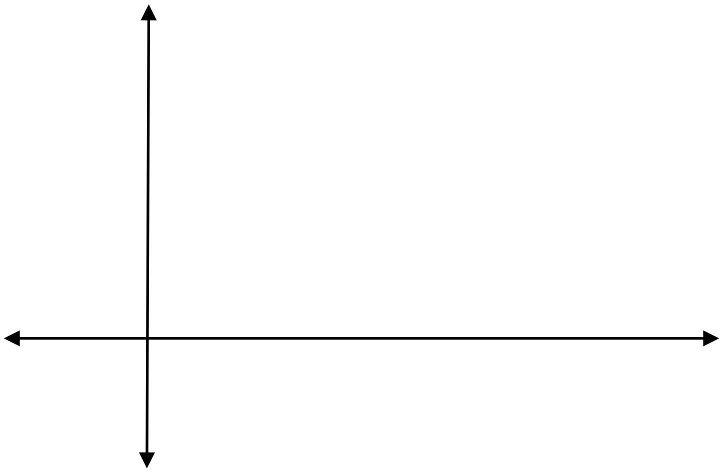
5.2. CAÍDA DE UN CUERPO

Figura 21. Bote de una pelota

Queremos estudiar el movimiento de caída libre de un cuerpo en la atmósfera. Para ello grabaremos y analizaremos los datos de la caída de una pelota desde cierta altura hasta el suelo. Grabaremos en vídeo el bote de una pelota de baloncesto y estudiaremos el movimiento desde que golpea el suelo por primera vez hasta que lo vuelve a hacer, y su modelización matemática.

Lo que analizaremos es la relación entre la altura a la que se encuentra la pelota *y* y el tiempo *x*.

1. Dibuja en el siguiente sistema de ejes la nube de puntos que piensas que obtendremos después de analizar las imágenes.



2. ¿A cuál de las siguientes familias pertenece la gráfica de una función que se ajuste bien a la nube de puntos?

   a) $y = ax + b$
   b) $y = ax^2 + bx + c$
   c) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
   d) $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$
   e) $y = a + b \cdot \ln(x)$
   f) $y = a \cdot e^{bx}$
   g) $y = a \cdot b^x$
   h) $y = a \cdot \sin(bx + c) + d$
   i) $y = \frac{c}{1 + a \cdot e^{-bx}}$

3. ¿Por qué lo crees?

4. Abre el vídeo y mueve los ejes donde consideres conveniente. Marca los puntos sobre la trayectoria de la pelota y obtén la nube de puntos de la relación entre la altura y el tiempo. En los siguientes pasos te explicamos cómo realizar estas acciones.

   4.1. Abre la aplicación **Trazar Imagen**

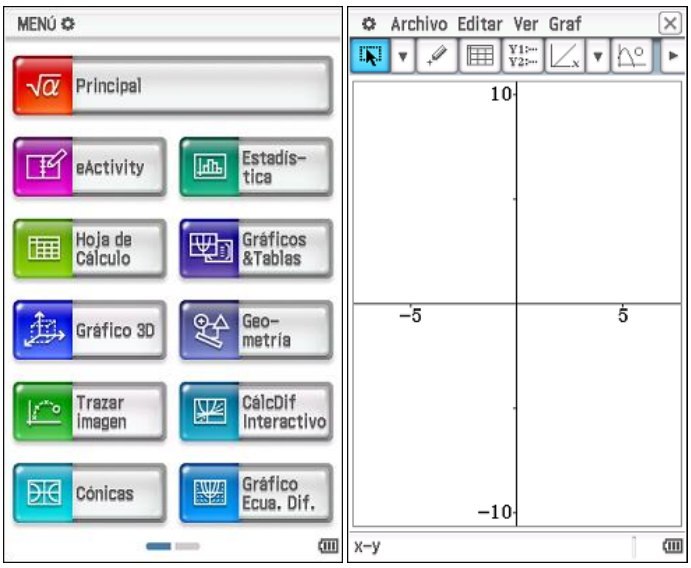


Figura 22. Aplicación Trazar Imagen

4.2. Toca **Archivo/Abrir** y selecciona el video *Bot pilota30* y pulsa abrir.

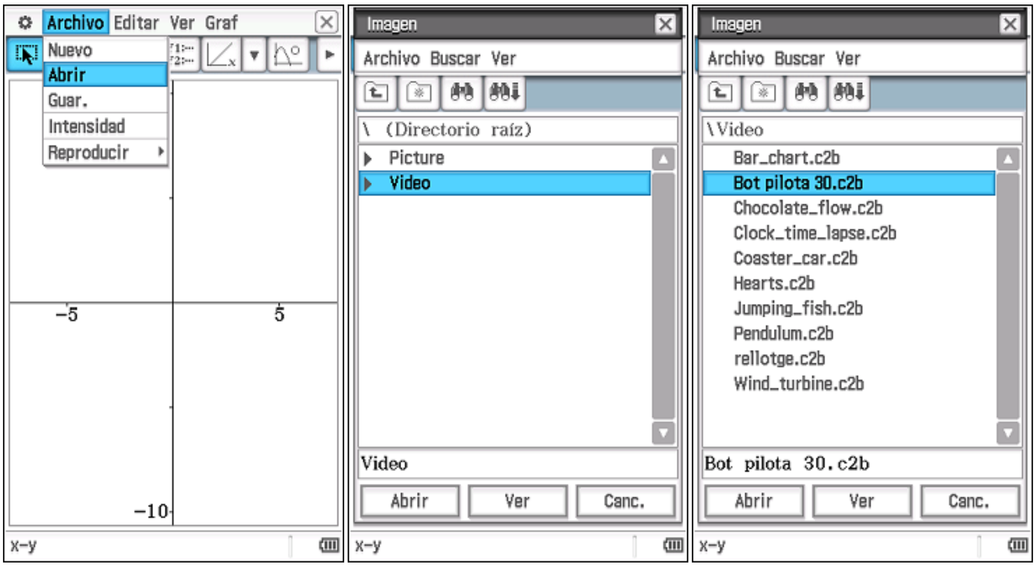


Figura 23. Apertura del vídeo

4.3. Abre el menú y selecciona mover los ejes . Sitúa los ejes donde creas conveniente para contestar a las preguntas finales.

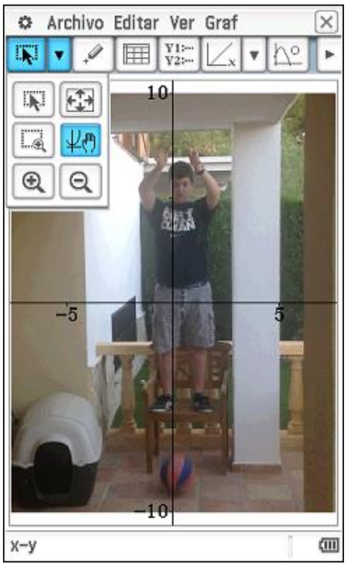


Figura 24. Selección ubicación de los ejes

4.4. Toca **Editar/Edit marc punt (anim)**, elige el icono de marcación de puntos, marca un punto sobre la pelota y pulsa , marca un punto sobre la nueva posición de la pelota y repite el proceso hasta que la pelota vuelva a golpear el suelo.

Figura 25. Marcación de puntos

4.5. Pasa el resto de fotogramas sin marcar puntos hasta que aparezca el mensaje “marcación de puntos finalizada” y toca aceptar.

Figura 26. Marcación de puntos finalizada

4.6. Las coordenadas de los puntos marcados se almacenan en una tabla que incluye los datos del tiempo. Para visualizarla toca .

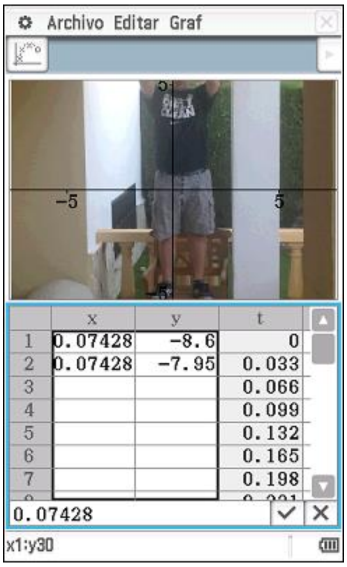


Figura 27. Tabla de datos

4.7. Toca el icono de la nube de puntos para regresar al menú anterior. La CP 400 nos permite obtener la nube de puntos de la coordenada *x* o de la coordenada *y* en función del tiempo. Pulsa ▶ para ver más opciones y selecciona la opción adecuada.

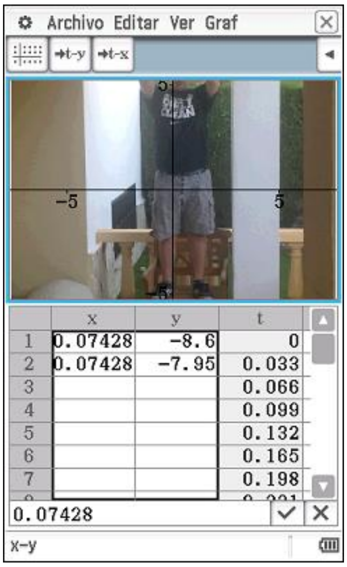


Figura 28. Elección de la nube de puntos

5. Obtén la función que mejor se ajuste a los datos obtenidos en la nube de puntos.

$y = f(x) =$ ____

6. ¿Cuál es la distancia de la pelota al suelo cuando *x*= 0,76? *f*(0,76)=_____

   ¿Y cuando *x* = 1,1? *f*(1,1)=_____

   ¿Y cuando *x* = 0,11? *f*(0,11)=_____

   ¿Y cuando *x* = 100? *f*(100)=_____

7. ¿Crees que las respuestas obtenidas muestran lo que verdaderamente ocurre?

¿Cuáles son los datos que no se ajustan a lo que esperabas? ______________________

¿Por qué?

8. ¿Para qué valores de *x* (tiempo) la pelota golpea el suelo?

9. ¿Para qué valores de *x* (tiempo) la pelota llega a su máxima altura?

4. Referencias bibliográficas

[1] Monzó, O. y Puig, L. (2007). “Modelización con la ClassPad 300, 1ª parte”. Veintidós Séptimos, núm. 24, pp. 26-29.

[2] Puig, L. y Monzó, O. (2008). “Competencias algebraicas en el proceso de modelización”. En F. Gracia, A. Monedero, J. Palomo y Mª J. Peris, (Eds.) El discret encant de les matemàtiques. Actes de les VIII Jornades d’Educació Matemática de la Comunitat Valenciana (pp. 142-158). Castellón: SEMCV.

[3] Monzó, O. y Puig, L. (2008). Modelización con calculadoras gráficas. Actas de las XIII

[4] Monzó, O. y Puig, L. (2010). “Modelización con la ClassPad 300, 2ª parte”. Veintidós Séptimos, núm. 26, pp. 4-6.

[5] Monzó, O. y Puig, L. (2011). Materials per a l’estudi de famílies de funcions. En M. Contreras, O. Monzó y L. Puig (Eds.). Actes de les IX Jornades d’Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana (vol. I, pp. 167-185).Societat d’Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana “Al-Khwārizmī”. València.

[6] Monzó, O. y Puig, L. (2012). “Familias de funciones”. En Torralbo, M. y Carrillo, A. (Eds.) Matemáticas con calculadora gráfica. Unidades didácticas (pp. 103-133). SAEM “Thales” y División didáctica CASIO-Flamagas. Sevilla.

[7] Puig, L. y Monzó, O. (2013). “Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones”. En T. Rojano (Ed.) Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas (pp. 9-35).Trillas. México.

[8] Monzó, O., Navarro, M. T. y Puig, L. (2013). Un estudio sobre el proceso de modelización en el entorno informático de las tabletas. En actas de las XVI JAEM. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Palma. Consultable en: xvi.jaem.es/actas/documentos/comunicaciones/comunicacion_148__un-estudio-sobre-el-proceso-de-modelizacion-en-el-__monza3-onofre_et_altri.pdf.

[9] Puig, L. (2013). Modelización con datos reales. En actas de las XVI JAEM. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Palma. Consultable en: xvi.jaem.es/actas/documentos/ponencia/ponencia_2a__modelizando-con-datos-reales__puig-luis.pdf.

[10] CASIO (2014). “ClassPad II fx-Cp400. Guía del usuario”. CASIO COMPUTER CO.,LTD. Tokyo. Consultable en: support.caso.com/es/manual/004/ClassPadII_UG_ES.pdf.