Cultura y Matemáticas a la vista de todos (I)

Secretos guardados en piedra

Superficies regladas en la Sagrada Familia de Antoni Gaudí

Xavier Vilella Miró

email: xvilella@xtec.cat

Grup Vilatzara (ICE – Universitat Autònoma de Barcelona)

Formador del profesorado (ICEs Universidades y Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya)

Albert Martín López

email: albert.martin.lopez@gmail.com

Grup Vilatzara (ICE – Universitat Autònoma de Barcelona)

RESUMEN

Las matemáticas ayudan a interpretar, comprender y valorar nuestro entorno. Cualquier edificio (incluso restos arqueológicos) nos permite trabajar matemáticas próximas al alumno y contextualizadas. Mostraremos ejemplos centrados en la Sagrada Familia de Barcelona y alrededores para ilustrar cómo aprovechar un edificio singular para observar el entorno con mirada matemática y aprender matemáticas.
Hay mucha matemática en las fachadas de las catedrales. En la fachada de la Pasión de la Sagrada Familia de Barcelona aparece un cuadrado mágico de 4x4, similar al del grabado de Alberto Durero (La Melancolía) pero algo modificado. Nos preguntamos el por qué del cambio y constataremos la relación entre Cultura y Matemáticas. Por otro lado, Antoni Gaudí estudió las superficies regladas y fue pionero a la hora de utilizarlas en sus construcciones, tanto por su belleza estética como por sus propiedades físicas y facilidad de construcción. Mostramos cómo estas superficies aparecen en la Naturaleza, en el Arte, en la Arquitectura y en la Tecnología; Gaudí las utiliza en la Sagrada Familia y construimos algunos modelos.

Matemáticas, Cultura, cuadrado, mágico, superficie, reglada, hiperboloide

Materiales: los autores aportaremos los materiales necesarios.
Actividades: están explicadas en las siguientes páginas.
Necesidades técnicas: ordenador que soporte una presentación tipo PowerPoint, cañón de proyección, pizarra. Mesas para manipular los materiales (pinchos, pajitas de refresco, cartoncillos). Servirán las de aula o también las de taller.

Secretos guardados en piedra

Más allá de los arcos, y las formas matemáticas (el círculo, la parábola, la catenaria, etc.) que a menudo aparecen en los trabajos de Antoni Gaudí, en la fachada de la Pasión encontrarás un elemento matemático totalmente explícito; un cuadrado mágico. La suma de todas las filas, columnas y diagonales es la misma. Esa cantidad se acostumbra a llamar la **suma mágica**. ¿Cuál es la suma mágica de este cuadrado mágico?

Quizás el más conocido de los cuadrados mágicos que aparecen en obras de arte sea el de Albercht Durero (1471-1528). Realizó un grabado sobre madera titulado ***La melancolía***, datado en 1514 en el que puede observarse un cuadrado mágico. En él aparecen los números del uno al dieciséis en un cuadrado de 4x4 casillas. Todas las filas, columnas y diagonales suman 34.

Aquí tienes el cuadrado mágico de Durero, (izquierda) y el de la Sagrada Familia (derecha)

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Este cuadrado mágico se considera perfecto. Pero el que puedes ver en la fachada de la Pasión de la Sagrada Familia no lo es. Compáralos. ¿Podrías deducir por qué razón no lo es?

Así pues, ¿cuál es la característica que permite a un cuadrado mágico ser **perfecto**?

Podríamos **convertir** el cuadrado mágico de la Sagrada Familia en perfecto manipulando adecuadamente algunos números. ¿Eres capaz de hacerlo? ¿Cuántos números debemos modificar? ¿En qué cantidad? ¿Cuál será la suma mágica después de la modificación?

Costaba bien poco que el cuadrado mágico de la fachada de la Pasión fuera perfecto. Debe de haber alguna razón importante para que no lo sea. Ahora piensa: ¿**por qué motivo** este cuadrado mágico no es perfecto?

Tomemos el cuadrado mágico perfecto de 3x3 casillas, el más sencillo posible. Coloca los números del 1 al 9 adecuadamente:

Ahora consideremos otras posibilidades: ¿podemos **mover los números** para conseguir nuevos cuadrados mágicos que conserven su suma mágica?

Qué movimientos nos permitirían conseguir nuestro propósito? ¿Existe algún **patrón**?

Conocemos el cuadrado mágico de la fachada de la Pasión. ¿Existen otras posibilidades que conserven su suma mágica? ¿Podemos aplicar el patrón descubierto en los cuadrados de 3x3 al de 4x4?

¿Se puede construir un cuadrado mágico con **fracciones** o con **decimales**? Inténtalo con los siguientes números:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{9}{3}, \frac{10}{3}$$

¿Cuál será la suma mágica en este caso? ¿Guarda alguna relación con el cuadrado mágico más simple del que partimos anteriormente?

¿Eres capaz de **argumentar** matemáticamente por qué existe esta relación?

Superficies regladas en la Sagrada Familia de Antoni Gaudí

En este taller se presentan fotografías de diferentes situaciones del entorno donde aparecen algunas superficies curvas: Bidones y tuberías cilíndricas, torres de refrigeración, hiperbólicas, carpas con forma de paraboloide hiperbólico, escaleras de caracol helicoidales, etc. A continuación se muestran fotografías tomadas de la propia Sagrada Familia donde se reconocen, de nuevo, algunas de las superficies anteriores.

¿Qué tienen en común las superficies mostradas? Seguramente alguien habrá reconocido ya una característica común en todas ellas: Son todas superficies regladas, superficies generadas por el movimiento de una recta, llamada generatriz, a través de una o diversas curvas, llamadas directrices. ¡Lo curioso es que, aunque se generan a partir de rectas, son todas ellas superficies curvas!

¿Reconocéis en vuestro entorno (natural, arquitectónico, técnico o artístico) algunas de estas superficies regladas?¿Y en la Sagrada Familia? ¡Está repleta!

Aunque las superficies regladas ya eran conocidas en su época, Antoni Gaudí fue el primero en utilizarlas en Arquitectura. Como él mismo dice "Me ha dado mucho a pensar el que no hayan sido aplicadas antes y que deba ser yo el primero en hacerlo. Eso sería lo único que, en todo caso, me haría dudar. No obstante, creo que, convencido del perfeccionamiento que representan, tengo el deber de aplicarlas." ¿Por qué su interés por dichas superficies? La respuesta nos la da él mismo cuando afirma: "El uso de las superficies regladas es lógico por su superioridad plástica y su facilidad constructiva".

Procedamos como haría el propio Gaudí, es decir, construyendo y experimentando. Para cada superficie reglada se presentan algunas construcciones hechas con varillas de madera que nos permitirán estudiar algunas propiedades importantes. Así, por ejemplo, se verifica que el hiperboloide es, de hecho, una superficie doblemente reglada y, además, mucho más resistente que el cilindro del mismo diámetro; hecho que justifica el por qué las torres de refrigeración o algunos huesos como el fémur tienen forma de hiperboloide. Del paraboloide hiperbólico, que también es doblemente reglado, se puede destacar, por ejemplo, que es la superficie mínima capaz de unir dos rectas a diferente altura y con distinta inclinación, que todos los puntos tienen la misma tensión superficial, o que tres puntos nunca están alineados; propiedades ideales para la construcción de lonas que tengan que soportar las inclemencias del tiempo (viento, agua, ...). Las paredes en forma de conoide de las Escuelas Provisionales de la Sagrada Familia permiten hacer una estructura resistente con muy poco material constructivo y, por tanto, ahorrar dinero.

A continuación se propone la construcción efectiva del paraboloide hiperbólico con pajitas y varillas de madera; del cilindro y del hiperboloide con plantillas circulares y varillas de madera; y se dan indicaciones de como se podría construir una escalera de caracol con palillos de dientes y rollos de papel higiénico. La simple construcción de las plantillas puede ser un trabajo matemático interesante y una oportunidad para utilizar programas de geometría dinámica como Geogebra (incluso podríamos aprovechar para representar dichas superficies en tres dimensiones con su módulo 3D).

Como se ha visto, la Sagrada Familia, y en general cualquier edificio significativo, puede utilizarse para hacer y pensar las Matemáticas de una manera distinta. En este taller hemos trabajado algunas propiedades de las superficies regladas, pero todavía podríamos formular muchas más preguntas matemáticas interesantes: ¿Por dónde es más fácil subir una escalera de caracol, por la parte interior o por la parte exterior? ¿Por qué? ¿Por dónde recorremos más distancia? ¿Por qué los cilindros se utilizan con frecuencia como recipientes? ¿Qué otra propiedad tienen en común el cilindro, el cono y el hiperboloide y no comparte, por ejemplo, el paraboloide hiperbólico?

Bibliografía

Alsina i Català, C. (2004). Manual de recursos didácticos de Geometría para colaboradores del Gabinet Gaudí. Departamento de Estructuras en Arquitectura. ETS de Arquitectura de Barcelona.

Alsina i Català, C., Buxadé, C., & Margarit, J. (2002). Gaudí. La búsqueda de la forma. Barcelona: Ayuntamiento de Barcelona. Institut de Cultura.

Bonet i Armengol, J. (2000). L'últim Gaudí. PORTIC.