



Competencia metarrepresentacional en los primeros grados: representaciones externas de datos y sus componentes

Metarepresentational competence in early grades: external representations of data and their components

Soledad Estrella, Raimundo Olfos
Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.
soledad.estrella@pucv.cl, raimundo.olfos@pucv.cl

Patricia Estrella
OMEPE-Chile.
pestrellar@gmail.com

Pedro Vidal-Szabó, Sergio Morales
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
pedro.vidal_s@umce.cl, sergio.morales.candia@gmail.com

RESUMEN • Este artículo presenta un estudio cualitativo sobre la competencia metarrepresentacional en 30 estudiantes de primero a cuarto grado (6 a 9 años). Por medio de entrevistas clínicas y sin instrucción previa, los estudiantes construyeron 192 representaciones de datos y explicaron sus componentes. Cuatro componentes invariantes fueron identificadas en las representaciones y en las explicaciones de los estudiantes: variable, frecuencia, base-lineal y linealidad-gráfica. Los resultados muestran que en la diversidad de representaciones se identifican componentes invariantes y se evidencian los aspectos de invención, crítica, funcionalidad y aprendizaje de la competencia metarrepresentacional. De este modo, aportamos a un cuerpo de literatura sobre la competencia para representar, y a un enfoque que valora la variedad de representaciones que dan sentido a descubrir, comunicar y razonar las relaciones entre datos desde los primeros grados.

PALABRAS CLAVE: competencia metarrepresentacional; representaciones; educación primaria; organización de datos; estadística temprana.

ABSTRACT • The paper discusses a qualitative study on metarepresentational competence in 30 students of grade 1 to 4 (aged 6 to 9). Through clinical interviews and without prior instruction, students constructed 192 representations of data and explained their components. Four invariant components were identified in the representations and explanations of the students: variable, frequency, base-linear, and linearity-graph.

Within the diversity of representations, the results show the invariant components and the aspects of invention, functioning, critique, and learning of the metarepresentational competence.

In this way, we contribute to a body of literature on competence to represent, ensuing an approach that values the variety of representations that give meaning to discovering, communicating, and reasoning about the relationships in data in the first years of schooling.

KEYWORDS: metarepresentational competence; representations; primary education; data organization; early statistics.

Recepción: abril 2018 • Aceptación: abril 2018 • Publicación: junio 2018

Estrella, S., Olfos, R., Vidal-Szabó, P., Morales, S., & Estrella, P. (2018). Competencia metarrepresentacional en los primeros grados: representaciones externas de datos y sus componentes. *Enseñanza de las ciencias*, 36(2), 143-163

INTRODUCCIÓN

Existe un amplio rango de representaciones externas, aquellas observables por otros y no solo privadas y mentales (Carraher, Schliemann y Schwartz, 2008). Estas representaciones son esenciales para la construcción del conocimiento, para refinarlo, modificarlo, compartirlo y apropiarse de él, como los gestos, el lenguaje oral, la escritura, las representaciones gráficas y muchos otros sistemas (Pérez-Echeverría y Scheuer, 2009). Investigaciones sobre el desarrollo cognitivo de estudiantes remarcan la importancia de las representaciones externas, y sugieren su tratamiento desde edades tempranas, cuestión que ha orientado varias propuestas curriculares (Common Core State Standards [CCSS], 2012; Franklin *et al.*, 2007; Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2012; Papic, Mulligan y Mitchelmore, 2011).

Asimismo, hay estudios en educación de la primera infancia enfocados en la actividad del estudiante que proporcionan marcos para favorecer tempranamente la educación matemática, por ejemplo los proyectos *Building Blocks* (Sarama y Clements, 2009) y *Big Maths for Little Kids* (Ginsburg, Lee y Boyd, 2008). Estudios sobre representaciones matemáticas en los primeros grados han encontrado que estudiantes con rendimiento bajo producen consistentemente representaciones débilmente organizadas y carentes de estructuras, mientras que estudiantes de alto rendimiento utilizan notaciones abstractas con estructuras más desarrolladas (Mulligan, 2015; Mulligan, English, Mitchelmore y Crevensten, 2013).

Por su parte, DiSessa (2004) indagó en la capacidad de los sujetos para inventar, criticar y comparar una variedad de representaciones, e incluso diseñar nuevas creaciones explicándolas y comprendiendo el papel que estas desempeñan. Esta capacidad es reconocida como la competencia metarrepresentacional, término originalmente utilizado por DiSessa, Hammer, Sherin y Kolakowski (1991).

Escasas investigaciones exploran la interacción de los estudiantes con diversas representaciones (Martí, 2009; Pérez-Echeverría y Scheurer, 2009; entre otras). La falta de atención en cómo trabajar las representaciones en la escuela podría limitar el aprendizaje de los estudiantes sobre sus representaciones (DiSessa, 2004). Tippett (2016) señaló que la interpretación y construcción de representaciones pueden conducir a una mejor comprensión de los conceptos, e indicó la carencia de estudios en el aula escolar de ciencias sobre el aprendizaje con representaciones.

Mulligan *et al.* (2013) han encontrado que los estudiantes con una buena comprensión de la recta numérica y de la estructura de red rectangular poseen la capacidad de adquirir habilidades gráficas más rápidamente que otros; y consideran como fundamental el seguimiento, descripción, clasificación de los modelos y representaciones de los estudiantes, y las explicaciones de sus ideas matemáticas.

En especial, Earnest (2015) advirtió que hay poca investigación sistemática acerca del razonamiento de los estudiantes sobre cómo los objetos matemáticos median la conversación y actúan mediante las representaciones. Paralelamente, son pocos los estudios que abordan el papel de algunos de los signos como componentes en la representación construida por los estudiantes (por ejemplo, Earnest, 2015; English, 2012; Martí, 2009). Por tanto, una contribución al área sería evidenciar tales componentes de las representaciones de datos y, a su vez, dar cuenta de las explicaciones verbalizadas de estudiantes de primaria respecto a tales componentes.

La presente investigación aborda los recursos cognitivos utilizados por estudiantes de primaria, de 6 a 9 años de edad, al construir representaciones de datos; y tiene por objetivos caracterizar las componentes de las representaciones e indagar su relación con la competencia metarrepresentacional en contextos de organización de datos y en las explicaciones sostenidas por los estudiantes sobre tales componentes.

MARCO CONCEPTUAL

En esta sección describimos los conceptos que sustentan el trabajo, entre ellos, la competencia metarrepresentacional, algunos tipos de representaciones y sus componentes.

Competencia metarrepresentacional

La competencia metarrepresentacional, CMR, describe la completa gama de capacidades que los sujetos tienen para construir y usar las representaciones externas (DiSessa, 2004; DiSessa y Sherin, 2000) –en adelante solo representaciones–. Esta competencia incluye la habilidad para seleccionar, elaborar y usar productivamente representaciones, y también las habilidades de criticar y modificar, comprender y explicar, incluyendo diseñar nuevas representaciones (véase tabla 1).

El término competencia metarrepresentacional contiene el prefijo *meta* para no limitar el término a representaciones típicas o aquellas enseñadas según los modos escolares de reproducción, como es el caso del término competencia representacional, usado genéricamente (DiSessa y Sherin, 2000).

Tabla 1.

Aspectos de la competencia metarrepresentacional (resumidos desde DiSessa y Sherin, 2000: 388)

Aspectos de la CMR	Foco
Invencción	Las ideas y habilidades que poseen los estudiantes que les permiten inventar o diseñar nuevas representaciones
Crítica	Los conocimientos de los estudiantes que les permiten juzgar y comparar la calidad de las representaciones en cuanto a una buena representación
Funcionalidad	El razonamiento de los estudiantes para comprender el propósito y el uso de diferentes tipos de representaciones
Aprendizaje	El aprendizaje y reflexión que revela la toma de conciencia de los estudiantes acerca de su propia comprensión de las representaciones y de los vacíos en su conocimiento

Se destaca que DiSessa y Sherin (2000) afirmaban que los estudiantes poseen una comprensión de las representaciones «profunda, rica y generadora», que parece existir antes e independientemente de la enseñanza formal. La CMR abarca la competencia nativa de los estudiantes para crear sus propias formas de representación, competencia que se desarrolla gradualmente a través de prácticas culturales dentro y fuera de la escuela. Además, DiSessa (2004) identificó dos grandes categorías de la competencia nativa de los estudiantes, por una parte, un amplio rango de recursos para diseñar representaciones que incluyen los atributos perceptuales, como longitud, tamaño, numerosidad, color, entre otras; y también, el juicio sobre la representación.

Representaciones

Entre las variadas representaciones, en este estudio atendemos a las categorías representacionales, textos lineales, listas, tablas, propuestas por Martí (2009), y a los gráficos con y sin eje Y.

Los *textos lineales* son considerados como escritos breves con datos presentados en forma lineal organizados en líneas sucesivas, que integran herramientas gramaticales inherentes a un texto descriptivo, como el sujeto y el predicado. Las *listas* de datos contemplan una estructura que separa un conjunto de datos discretos organizados sucesivamente en una dimensión (horizontal o vertical), se caracterizan por una sucesión de datos (icónico o textual) uno tras otro, desplegados en una sola dirección y separados

por espacios y/o puntuación (Estrella, Mena y Olfos, 2017). En contraste con los textos lineales, las listas están constituidas por unidades escritas más breves que las frases.

Asimismo, las *tablas* simples de datos son consideradas como aquellas que poseen dos dimensiones (filas y columnas) para almacenar unidades de datos. Estrella (2014) especificó que en la representación tabular, la variable cualitativa está claramente separada de la variable cuantitativa, y eventualmente puede presentar el trazado de filas y columnas. Además, considera que los datos de cada fila o columna son una clase de datos, cuyo nombre de la clase suele aparecer explícito, mediante una rotulación verbal, gráfica o simbólica específica en los encabezados de las filas o columnas.

Por último, hemos caracterizado el *gráfico* de datos como un tipo de representación en el espacio físico bidimensional que sirve para mostrar alguna relación entre las variables; y como representación externa, el gráfico puede presentar o no el eje Y graduado.

Tiene sentido considerar que la invención y construcción de representaciones de datos permite coordinar las estructuras numéricas y geométricas asociadas a la organización de datos, que están construidas sobre habilidades matemáticas básicas de aparición temprana en el desarrollo de los estudiantes. Estas habilidades, por ejemplo, la subitización¹ y el conteo, que devienen en el cardinal de un conjunto, se consideran precursoras de otras más complejas. Otras habilidades de sentido geométrico, como posición y dirección, podrían llegar a cimentar el concepto de colinealidad. La competencia de representar requiere coordinaciones entre unidades geométricas y numéricas de cantidades (Duval, 2014; Earnest, 2015). En una representación de datos, es necesaria la comprensión del principio de cardinalidad, pues desde esa comprensión los estudiantes pueden relacionar conjuntos de tamaños diferentes en función de su cantidad.

Componentes de las representaciones

Como estructura lógica, reconocemos la transversalidad del concepto *variable* en las representaciones de datos, entendida como cualquier característica medible de un conjunto de individuos que puede tomar distintos valores (Moore, 2009).

En la estructura numérica, consideramos la *frecuencia* como el cardinal correspondiente a cada categoría de la variable, que al componer una representación, están alineadas entre sí de manera vertical u horizontal, y separadas de la variable cualitativa. Por tanto, en la determinación de la frecuencia absoluta es necesaria la obtención del cardinal del conjunto que, a la vez, involucra estrategias de conteo.

En Estrella (2018) y Estrella *et al.* (2017) se precisaron algunas componentes de naturaleza geométrica en una representación gráfica de datos: base-lineal y linealidad-gráfica. La primera permite establecer una base sobre la cual localizar y empezar a construir la representación, y la segunda permite comparar alturas o distribuir ordenadamente en el espacio físico. Específicamente, se denominó *base-lineal* aquella base cuyo origen es una línea (explícita o implícita) horizontal, vertical o diagonal, en la cual se inicia la organización de datos del gráfico construido; y *linealidad-gráfica* como aquella linealidad característica de una organización de datos en columnas o filas, y en que se respeta la conservación del espacio entre cada unidad de datos representados. Estas componentes permiten la comparación y visualización de las relaciones entre los datos.

Para estudiar los recursos que exhiben los estudiantes a partir de las representaciones creadas por ellos, nos preguntamos, ¿qué aspectos de la competencia metarrepresentacional demuestran? Y ¿qué

1. Kaufman, Lord, Reese y Volkmann (1949) propusieron el término *subitización* para referirse a la determinación de manera rápida, precisa y confiada de la cantidad de elementos de un grupo de seis o menos elementos presentados simultáneamente. Kaufman *et al.* (*op. cit.*) consideran la estimación como un juicio de cantidad sobre un conjunto de hasta seis elementos sin realizar un conteo de estos.

componentes evidencian en sus representaciones? Con el fin de responder a estas preguntas, hemos llevado a cabo un estudio empírico transversal desde el grado 1 al 4.

METODOLOGÍA

Sujetos

En el estudio participaron un total de 224 estudiantes distribuidos en los grados 1 a 4 cuyas edades fluctuaban entre 6 y 9 años, de dos escuelas chilenas, una ubicada en la ciudad de Valparaíso con un puntaje en un test nacional de matemática² de 257, y otra ubicada en la ciudad de Viña del Mar con un puntaje de 263, respecto del promedio nacional de 250 puntos del citado test. El estudio además contó con el consentimiento escrito de los directores de ambos establecimientos, de los profesores, apoderados y estudiantes.

Los estudiantes participantes del estudio experimentaron una lección previa de organización de datos con final abierto sin instrucción, diseñada por profesores de su escuela, producto de un estudio de clase realizado en cada establecimiento educacional. Posterior a esa lección, se seleccionaron 30 estudiantes para ser entrevistados, 17 eran niñas y 13 eran niños; de estos, siete pertenecían al grado 1, ocho al grado 2, nueve al grado 3 y seis al grado 4.

El criterio de selección de los estudiantes a entrevistar consideró las producciones que realizaron durante la implementación de la lección previa. Respecto a dichas producciones, se observó la diversidad de representaciones que elaboraron y el grado de participación que tuvieron en el momento de expresar sus ideas en dicha lección. Así, y como último refinamiento, se propuso a la profesora de cada curso, una lista de estudiantes para entrevistar. De esta manera, los 30 estudiantes entrevistados fueron aquellos que estaban disponibles (presentes en el día de la entrevista), dispuestos (querer ser entrevistados) y que habían manifestado mayor habilidad de expresión oral.

Recogida de datos

Preparación de instrumentos

Se diseñó un protocolo de entrevista clínica semiestructurada (véase «Anexo 1») que buscaba identificar y caracterizar las representaciones construidas por los estudiantes. El protocolo estaba compuesto por tres tareas para los estudiantes entrevistados.

La primera fue una tarea de organización de datos categóricos, en la que se presentaban nueve fichas de tres colores (4 azules, 3 verdes y 2 rojas) para que las organizaran libremente sobre una superficie rectangular (tarea a.1), luego se les ofrecía usar un lápiz para agregar lo que estimasen conveniente en su representación (tarea a.2).

La segunda tarea evaluaba la presencia de componentes comunes identificados en las producciones de la lección previa, esto es, examinar la estabilidad de las componentes asociadas a la estructura geométrica por medio de una representación propuesta en el protocolo, preguntando al entrevistado si estaba o no de acuerdo con los cambios siguientes: primeramente se le cambiaba la posición de una ficha alterando la base-lineal (tarea b.1), y posteriormente se le alteraba la linealidad-gráfica curvando una de las columnas de fichas (tarea b.2).

La tercera tarea de lápiz-y-papel consistía en representar datos (con lápiz de un único color); a medida que el estudiante creaba una representación, el entrevistador le solicitaba diseñar otra más, pero

2. Prueba SIMCE (Sistema de Medición de la Calidad de la Educación) del grado 4, año 2014.

cada vez utilizando un papel de menor dimensión (tarea c), con el fin de estimular la diversificación de las posibles representaciones y verificar algunas componentes en su representación.

Como se especifica en la tabla 2, las distintas tareas del protocolo de entrevista estaban dirigidas a determinar la identificación de las componentes de la representación y los diferentes aspectos de la CMR considerados en este estudio.

Tabla 2.
Tareas del protocolo de entrevista según componentes y aspectos de la CMR

<i>Aspectos</i>	<i>variable</i>	<i>frecuencia</i>	<i>base-lineal</i>	<i>linealidad-gráfica</i>	<i>todas las componentes</i>
Invencción	Tarea a.1				Tarea c
Crítica			Tarea b.1	Tarea b.2	
Funcionalidad		Tarea a.2			Tarea c
Aprendizaje					Tarea c

Aplicación de instrumentos

Las entrevistas fueron realizadas individualmente según protocolo y videograbadas en las dependencias de cada escuela con una duración promedio de 30 minutos. Cada estudiante fue entrevistado por dos investigadores, uno actuaba como entrevistador y otro como investigador observante, el cual eventualmente proveía de preguntas adicionales y realizaba notas de campo.

Análisis

Las fuentes de datos fueron las videograbaciones de las entrevistas clínicas semiestructuradas, en que los estudiantes responden a una tarea abierta de organización de datos (tareas a y b), las representaciones producidas por los estudiantes con lápiz-y-papel (tarea c) y la transcripción de las entrevistas videograbadas.

Al efectuar el análisis de los datos, se clasificaron las producciones en categorías representacionales, tres de las cuales han sido reportadas por Martí (2009), estas son, texto lineal, lista y tabla; además se consideró una cuarta categoría representacional que emergió desde las producciones de los estudiantes, gráfico con y sin eje Y. En cada producción se identificó la existencia de las componentes: variable, frecuencia, base-lineal y linealidad-gráfica.

Recogidos los datos, el análisis se llevó a cabo en tres fases: (I) identificación, clasificación y secuenciación de las producciones de cada estudiante por categorías representacionales según el grado; (II) identificación y emergencia de las componentes en las representaciones según el grado, y (III) interpretación y estructuración de las explicaciones de algunos estudiantes respecto a las componentes de las representaciones.

La triangulación de datos se realizó entre el análisis de la videograbación del proceso de construcción del estudiante, las transcripciones de las entrevistas individuales videograbadas, las producciones en papel de los estudiantes y las notas de campo de los investigadores.

Fase I: identificación, clasificación y secuenciación de las producciones de cada estudiante por categorías representacionales según el grado

A partir de la videograbación y las producciones en papel de las entrevistas, se construyó y completó una tabla con las categorías representacionales en la que separadamente los cuatro investigadores registraron la ausencia (0) o presencia (1) de estas por cada estudiante según grado. Posteriormente los investigadores contrastaron su identificación y clasificación preservando las coincidencias, y en caso de desacuerdos los investigadores volvieron a analizar, esta vez conjuntamente, la videograbación de la entrevista respectiva hasta llegar a un consenso. En el caso de representaciones fuera de las categorías representacionales previstas, estas se clasificaron en una nueva categoría, denominada *Otras-representaciones*.

Para rescatar la secuencia en la construcción de las producciones se capturaron las imágenes en la videograbación de todas las representaciones construidas por cada sujeto, que fueron identificadas y registradas por orden de aparición. Dicha secuenciación de aparición fue validada conjuntamente por los investigadores (véase «Anexo 2»).

Fase II: identificación y emergencia de las componentes en las representaciones según el grado

A partir de la transcripción, las producciones de representaciones originales en papel y las notas de campo de aparición de la componente, se construyó y completó una tabla con las componentes levantadas: variable, frecuencia, base-lineal y linealidad-gráfica. Separadamente los cuatro investigadores registraron la ausencia (0) o presencia (1) de las componentes por cada estudiante. Con posterioridad, la identificación de las componentes fue consensuada en conjunto por los investigadores.

Fase III: interpretación y estructuración de las explicaciones de algunos estudiantes respecto a las componentes de las representaciones

A partir de la observación de las videograbaciones de las entrevistas y sus transcripciones, uno de los investigadores interpretó las explicaciones dadas por cuatro estudiantes, identificando la existencia de las componentes: variable, frecuencia, base-lineal y linealidad-gráfica. A su vez, desde las transcripciones, las explicaciones fueron seccionadas conjuntamente por los investigadores en: las *conclusiones* de los estudiantes respecto a dichas componentes, los *datos* que sustentaban esas conclusiones y las *garantías* que permitían justificar el paso desde los datos a la conclusión. Este seccionamiento, permitió evidenciar los fundamentos que emplearon los estudiantes para justificar el uso de las componentes presentes en sus representaciones.

Finalmente, al describir y analizar los datos recogidos, atendemos a la CMR desde las representaciones categorizadas y desde las componentes que emergieron en dichas representaciones, integrando el análisis de las explicaciones de algunos estudiantes al justificar las componentes de sus representaciones.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN**Interpretación de las explicaciones respecto a las componentes de las representaciones.**

A continuación se examinan las componentes explicadas por cuatro de los 30 estudiantes entrevistados, por ser representativos para cada componente.

Caso estudiante E09, sobre la componente variable en Tarea c

El estudiante E09 de grado 2 (hombre, 8 años y 5 meses) identificó la variable color como una característica que le permitió clasificar los datos, y nombró cada color con una única palabra manuscrita. La garantía que suponemos respaldó el nombre de las categorías de la variable, derivó de la clasificación realizada a las fichas en tres filas y que dibujó sin color (figura 1).

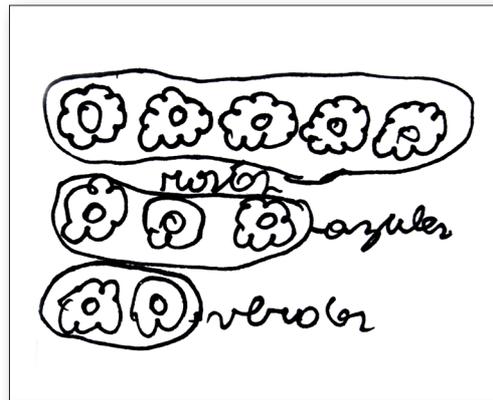


Fig. 1. Representación de estudiante E09 de grado 2.

Así, E09 reconoció la componente variable al usar la característica color para clasificar los datos, ya que en la construcción de su representación (gráfico sin eje Y) agrupó los datos, distinguió por categoría de la variable color y explicó señalando «ahí tengo dibujos y [acá] letras». Además, al encerrar los datos de una misma categoría y etiquetarla por color, se evidencia un cierto aspecto de invención, lo cual releva el aspecto funcionalidad de la CMR, pues responde correctamente a la tarea diferenciando los datos de las categorías en la representación.

Caso estudiante E23, sobre la componente frecuencia en Tarea a.2

La estudiante E23 del grado 3 (mujer, 9 años y 7 meses) afirmó que era necesario llevar un registro del número de fichas según color, esta idea subyace al hecho de que las fichas fueron organizadas por ella en filas de un color cada una, cuya garantía tiene sentido pues cada fila de un color tiene un cardinal de fichas asociado.



Fig. 2. Representación con la frecuencia por color de la estudiante E23 de grado 3.

E23 dio evidencia de que usaba la frecuencia en la representación construida (tabla con iconos y frecuencias), pues los números correspondientes a cada fila de color fueron escritos en forma alineada entre sí en una columna. La estudiante E23 utilizó el concepto de frecuencia, ya que al escribir el cardinal frente a cada categoría de la variable de su representación, y solicitarle el significado de este, explicó que «es el número de las fichas que están por color» (figura 2). El aspecto de funcionalidad de la CMR le permitió identificar la frecuencia con los números alineados respecto a cada fila de fichas, que contiene la categoría de la variable, conceptualizando la frecuencia no solo como una cantidad vinculada al contexto sino como una nueva variable numérica, separando lo cualitativo de lo cuantitativo.

Caso estudiante E07, sobre la componente base-lineal en Tarea b.1

El estudiante E07 de grado 1 (hombre, 6 años) estuvo en desacuerdo en que se inicie en posiciones distintas para cada columna, por lo tanto, concluyó que debe trasladar la ficha al inicio de la base de las columnas. Lo anterior tiene como respaldo que la base es un punto de partida común para posicionar objetos.

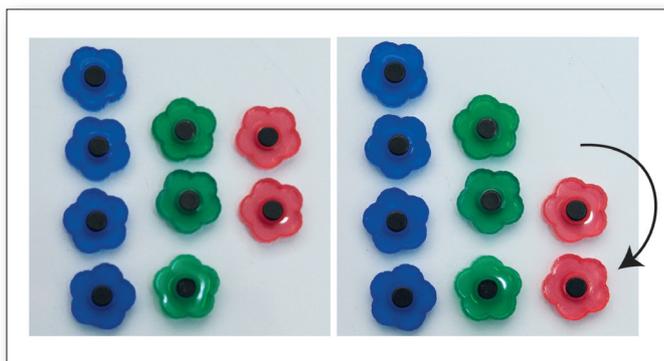


Fig. 3. Secuencia del movimiento desde la deconstrucción realizada por el entrevistador hacia la reconstrucción de la base-lineal por el estudiante E07 de grado 1.

E07 mostró conocimiento de la componente base-lineal al estar en desacuerdo con que cada columna se inicie en posiciones distintas, explicando que «esta [ficha] debería estar acá, para que toque más el suelo» y movió la ficha a un punto de partida común (figura 3). Este estudiante evidenció dos aspectos de la CMR: al juzgar la modificación sugerida (crítica) y al reflexionar asociando su experiencia concreta con cierta horizontalidad del suelo (aprendizaje).

Caso estudiante E13, sobre la componente linealidad-gráfica en Tarea b.2

El estudiante E13 de grado 2 (hombre, 7 años y 1 mes) afirmó que la columna azul está mal porque está curvada, por lo tanto reordenó la columna alineando las fichas (figura 4). Lo anterior tiene por respaldo que las fichas deben estar organizadas siguiendo líneas rectas y paralelas entre sí.

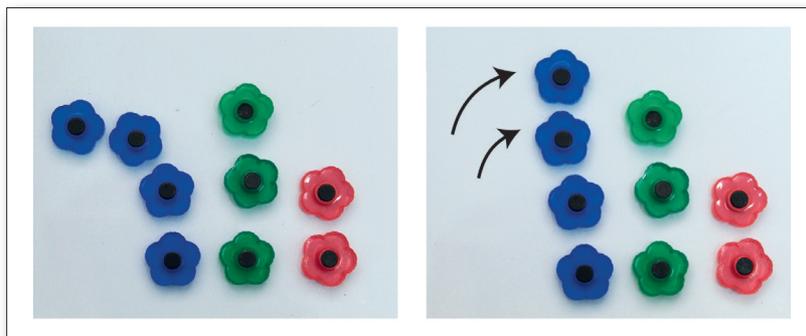


Fig. 4. Secuencia del movimiento desde la deconstrucción realizada por el entrevistador hacia la reconstrucción de la linealidad-gráfica por el estudiante E13 de grado 2.

E13 reconoce la linealidad-gráfica, pues al observar la única columna curva, explicó «está un poco mal, un poco doblada, y estas están derechas [...] entonces no estaría en la meta, entonces está mal arreglado». Al proponerle la posibilidad de comparar entre las columnas de fichas, explicó respecto a la columna curva «Sí, puedo usarla [para comparar], el problema es que está un poco chueca, si la arreglamos podemos [comparar]». Al parecer el estudiante E13 respaldó su afirmación al considerar la meta de una pista recta, en el sentido que hemos denominado linealidad-gráfica. Este estudiante evidencia dos aspectos de la CMR: al objetar la modificación propuesta (crítica) y al reflexionar asociando el paralelismo a las pistas (aprendizaje).

El análisis de las explicaciones de los casos presentados ha permitido constatar el aspecto de funcionalidad de cada componente, en tanto comprensión expresada por los estudiantes del propósito y el uso de sus representaciones, y de las componentes de las representaciones. Además, se ha evidenciado el aspecto de crítica y de aprendizaje de la CMR al confrontarlos a cambios en la base-lineal y la linealidad-gráfica, pues los estudiantes debieron comparar el estado inicial con el final de sus representaciones, y por tanto juzgar la calidad de las representaciones en cuanto a una buena representación.

Identificación de las producciones por categorías representacionales según grado

En las entrevistas clínicas los estudiantes construyeron 192 representaciones de datos, que fueron identificadas, clasificadas y secuenciadas según las categorías representacionales. De estas, 148 fueron clasificadas bajo las categorías previstas y 44 en la categoría *Otras-representaciones*.

Tabla 3.
Distribución de las 148 representaciones de datos que construyen 30 estudiantes, según grado

Categorías Representacionales	Grado 1	Grado 2	Grado 3	Grado 4	Total (148)
Texto Lineal	2	5	6	0	8,8 % (13)
Lista	7	17	2	1	18,2 % (27)
Tabla	2	5	19	13	26,4 % (39)
Gráfico sin eje Y	19	18	11	16	43,2 % (64)
Gráfico con eje Y	0	0	2	3	3,4 % (5)

En la tabla 3 se observa que el texto lineal y la tabla fueron construidos solo por dos estudiantes del grado 1, probablemente debido a su naciente habilidad de escribir y leer. El formato tabla fue construido mayoritariamente en los grados 3 y 4, y los gráficos sin eje Y se presentan en todos los grados. No obstante, los cinco gráficos con eje Y fueron construidos por estudiantes de los grados 3 y 4.

De las 148 representaciones, los estudiantes de los grados 1 y 2 construyeron 75 (51 %) de ellas, la mayoría de las cuales son lista y gráfico sin eje Y. Mientras que las representaciones construidas por los estudiantes en los grados 3 y 4 fueron la mayor parte tablas y gráficos sin eje Y. Cabe indicar que la lista aparece más en los grados 1 y 2, y la tabla en los grados 3 y 4, lo cual corrobora lo señalado en el estudio epistemológico del formato tabular de Estrella, Mena y Olfos (2017), en tanto que la lista es la unidad básica constitutiva e inicial de la representación tabular.

En cuanto a la cantidad de representaciones construidas por cada estudiante (véase «Anexo 2»), en los grados 1 y 2, el 40 % de los estudiantes (12) construyeron 6 o más representaciones, aunque el 43 % de los estudiantes (13) construyeron como mucho dos tipos de representaciones, siendo 8 de estos estudiantes de los grados 3 y 4.

Al agrupar los dos primeros grados, 1 y 2 (figura 5), se observa una mayor variabilidad en el número de representaciones construidas, en que el 75 % de los estudiantes de estos grados creó hasta 8 representaciones, con un caso que creó 17 representaciones; mientras que los grados 3 y 4 presentan menor variabilidad.

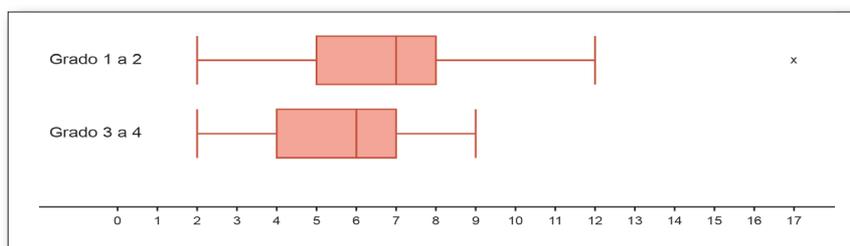


Fig. 5. Cantidad de representaciones construidas por estudiantes agrupados por grados 1-2 y grados 3-4.

Tanto los diferentes tipos de representaciones que emergieron (tabla 3), como las 44 representaciones clasificadas como *Otras-representaciones* surgidas fuera de las categorías previstas, y la cantidad de representaciones (véase las distribuciones de los datos agrupados por grado en la figura 5), evidencian el aspecto de invención de la CMR de estos estudiantes, puesto que han diseñado nuevas y variadas representaciones.

Identificación y emergencia de componentes de las representaciones según el grado

La entrevista permitió aproximarse a la CMR de los estudiantes, pues al verbalizar sus experiencias han aportado información acerca de los recursos a los que ellos acuden espontáneamente al representar datos. Con el fin de comprender aspectos de las representaciones creadas por ellos, los 30 estudiantes seleccionados dieron cuenta de cómo han organizado los datos (fichas), y han aportado explicaciones al ser cuestionados sobre ciertos componentes de la representación de datos que han construido. Durante la entrevista se trató de constatar si el estudiante reconocía la variable categórica en juego (color de las fichas), y cómo relacionaba los datos y el sentido dado al cardinal obtenido tras el conteo de cada categoría de la variable. Además, se le confrontó a dos cambios en un gráfico sin eje Y como parte del protocolo de la entrevista (Tareas b.1 y b.2), solicitándole su postura respecto a tales cambios realizados sobre la representación construida por él.

Identificamos como componentes a los diferentes elementos que en un rápido reconocimiento visual son significativos en una representación. En esta perspectiva, en la entrevista se pusieron a prueba algunas componentes para reconocer si los estudiantes comprenden lo significativo de ellas en la representación construida.

Tabla 4.
Presencia de componentes de las representaciones construidas
por 30 estudiantes de grado 1 a 4 (estudiantes de cada grado) constatadas en entrevista

Componentes	Grado 1 (7)	Grado 2 (8)	Grado 3 (9)	Grado 4 (6)	Total (30)
Variable	5	8	9	6	28
Frecuencia	2	4	8	6	20
Base-lineal	6	5	7	6	24
Linealidad-gráfica	5	4	8	6	23

La tabla 4 muestra que la mayoría de los estudiantes, 28 de 30, pudieron explicitar la componente variable, color de las fichas, con independencia del grado que cursan. Solo dos estudiantes de grado 1 no presentaban este concepto en su desempeño. La componente frecuencia se observó en 20 de 30 estudiantes, sin embargo, se destaca que todos los estudiantes del grado 4 presentaban esta componente, en contraste con solo dos del grado 1. La componente base-lineal se observó en 24 de 30, y la linealidad-gráfica en 23 de 30 estudiantes. Las cuatro componentes estudiadas se presentaron estables en todos los estudiantes de grado 4.

Los aspectos de la competencia metarrepresentacional

A través de las diferentes producciones y explicaciones de los estudiantes, se evidencian los recursos cognitivos que utilizaron y las componentes invariantes de sus representaciones, lo que da cuenta de su CMR en los primeros grados. El hecho de trabajar sobre las propias representaciones provocó que pudieran explicar las características y componentes que tenían sentido para ellos, más que representaciones creadas por otros.

El análisis reveló que todos los estudiantes presentaron distintos aspectos de la CMR, pues al crear su representación y explicarla, mostraron los aspectos de invención, crítica, funcionalidad y aprendizaje. En todos los grados hubo estudiantes que presentaban un gran desarrollo de esta competencia, y otros pocos la tenían limitada, por ejemplo en el grado 1, los estudiantes E03 y E06 construyen solo dos representaciones, mientras que en el mismo grado otros estudiantes alcanzan a construir hasta doce representaciones, lo que muestra un destacado aspecto de funcionalidad e invención (véase «Anexo 2»).

Los 30 estudiantes de los grados 1 a 4 muestran competencia metarrepresentacional en la creación de 192 representaciones. En su aspecto de invención de representaciones, si bien en los grados 1 a 2 los estudiantes crearon 108 representaciones respecto a las 84 creadas por los estudiantes de los grados 3 y 4, se observa mayor diversidad de representaciones en los primeros grados, 1 y 2, pues crearon 33 de las 44 representaciones que fueron clasificadas fuera de las categorías representacionales previstas. Quizás en estos niveles los estudiantes tienen mayor independencia para crear, o los estudiantes de los grados 3 y 4 ya poseen metarreglas (Sfard, 2008) obtenidas en la instrucción y experimentadas repetidamente por ellos; metarreglas que estructurarían cuándo, qué y cómo hacer las representaciones.

Un caso especial respecto a la *invención* resultó con el estudiante E09 del grado 2, que dio cuenta de su competencia metarrepresentacional durante la entrevista clínica, pues al ser desafiado a diseñar

distintas representaciones (Tareas a.1 y c), elaboró un total de 17 representaciones incluyendo cuatro tipos diferentes de representaciones (la mediana del grupo de estudiantes fue 6 representaciones, véase secuencia de producciones de E09 en «Anexo 2»). En el grado 3, la estudiante E16 asumió como un juego las tareas propuestas por la entrevistadora (Tarea c), y al igual que la experiencia de Sawrey, Brizuela y Blanton (2015) esta estudiante cambió su rol en la entrevista, y pasó a compartir su propio razonamiento al comprender el pensamiento del entrevistador. Sus representaciones sirvieron no solo para ordenar y comunicar sus ideas, sino también para controlar la entrevista mostrando una perspicacia creativa, pues E16 comenzó a crear materiales propios (papeles más pequeños aún) para construir y explicar nuevas y distintas representaciones.

En cuanto al aspecto de *crítica* de la CMR observado en las entrevistas y resumido en la tabla 4, sobre el 77 % de los estudiantes, al verse enfrentados a deconstrucciones en algunas componentes relativas a nociones geométricas de sus representaciones y notar los cambios realizados, se opusieron expresamente volviendo a reconstruir su representación tanto para la base-lineal como la linealidad-gráfica, como los casos de los estudiantes E07 y E13 reportados en el apartado anterior (relativos a las Tareas b.1 y b.2 respectivamente). Las deconstrucciones realizadas, según protocolo de la entrevista, permitieron que los estudiantes expresaran sus conocimientos para juzgar y comparar la calidad de la representación, así, se evidenció la base-lineal en 24 de 30 estudiantes (83 %) y la linealidad-gráfica en 23 de 30 estudiantes (77 %). En nuestro estudio la recta aparece como eje Y (vertical y graduada de 1 en 1) en cinco representaciones de tres estudiantes del grado 3 y 4. Ello corrobora lo que señaló Earnest (2015) respecto a que la temprana estructura de recta sirve como una herramienta cognitiva en tanto los estudiantes progresan en su escolaridad.

El aspecto de *funcionalidad* de la CMR se evidenció en las explicaciones de los estudiantes acerca de sus representaciones y en cómo las habían organizado. Un caso especial fue la estudiante E25 de grado 4, quien presentó dos tablas en una (Tarea c), que incluía las categorías de la variable en el centro, una tabla de conteo (con marcas a la izquierda) y una tabla de frecuencia (con numerales a la derecha) (figura 6). La estudiante E25 explicó que usando su representación podía saber de dos maneras distintas cuántas fichas había de cada color, aunque consideraba que la tabla de conteo no era necesaria al tener el número (frecuencia), e indicó que el propósito de la categoría de la variable era fundamental para la comprensión de su tabla. Así, E25 mostró la comprensión de su representación, al explicar sus características y precisar por qué estas eran importantes. Asimismo, la explicación de la estudiante E23 (Tarea a.2) evidenció el uso de la componente frecuencia vinculada a la categoría de la variable, y no solo como una cantidad.

11  verde	flor verde	2
 1111 azul	flor azul	4
 1111 rosa	flor rosa	5

Fig. 6. Aspecto de funcionalidad en la representación del estudiante E25 de grado 4.

El aspecto de *aprendizaje* fue observado especialmente en el estudiante E28 de grado 4 (Tarea c). Durante la entrevista, él construyó erróneamente el eje Y al no respetar la conservación del espacio en la graduación del eje. Al confrontarle con el numeral cero escrito, respecto a la existencia de una ficha en ese lugar, E28 reflexiona y mediante movimientos lineales con su dedo, relaciona los números del eje con cada ficha, mostrando una correspondencia entre las fichas y los números en el eje Y. Al término, E28 reconstruye apropiadamente su representación, en la que preserva la distancia constante entre los números del eje y las correspondientes fichas. Asimismo, en el grado 1, la estudiante E04 inventa un mismo signo (triángulo) para representar las fichas en un gráfico sin eje, pero dibuja uno de más (Tarea c). El entrevistador la confronta a contar dichos signos y el número de fichas, E04 compara, se da cuenta del error y construye una correcta representación coordinando para cada ficha un signo (figura 7). Desde el video de la entrevista de E04, se ha observado el movimiento de su mirada e inferimos que, desde un aspecto de funcionalidad de la CMR, hace uso de la individuación paralela simultáneamente con la magnitud analógica que crea, en el sentido de Le Corre y Carey (2007).

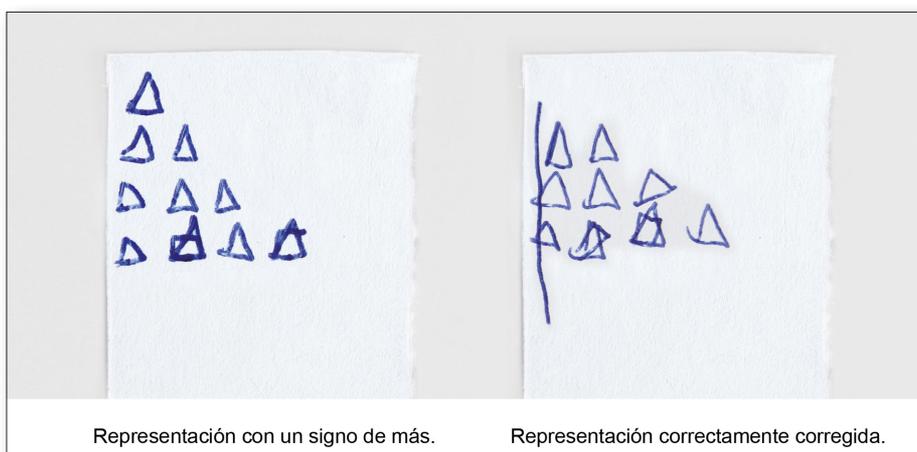


Fig. 7. Aspecto de aprendizaje en la representación de la estudiante E04 de grado 1.

CONCLUSIÓN

En este estudio buscamos responder a qué aspectos de la competencia metarrepresentacional demuestran conocer estudiantes de los grados 1 a 4, y qué componentes evidencian en las representaciones que construyen. Para ello, indagamos en la CMR mostrando: la emergencia de 192 representaciones en total creadas por 30 niños desde los grados 1 hasta 4 de la escuela primaria en una situación de representación de datos, las componentes invariantes de estas representaciones y las explicaciones de las mismas entregadas por los estudiantes

Desde el análisis realizado tras las entrevistas y sobre las representaciones construidas, sostenemos que los estudiantes utilizaron ciertos recursos cognitivos como clasificación, conteo, subitización y colinealidad, en tanto útiles para conseguir representar los datos entregados. Así, la componente variable asociada a la estructura lógica en las representaciones fue observada en la manifestación de las categorías de la variable categórica, la cual interpretamos que surgió desde la clasificación realizada sobre los datos. La componente frecuencia asociada a la estructura numérica en las representaciones fue evidente en los cardinales alineados y separados de las categorías de la variable categórica, la cual ha sido construida desde los recursos de conteo y/o subitización sobre los datos en cada categoría. En tanto, las componentes base-lineal y linealidad-gráfica asociadas a la estructura geométrica fueron identificadas por el aspecto invariante lineal en las bases de columnas o filas y por la ubicación en línea

de cada dato, y como puntos en una misma base y recta, proponemos que han surgido del recurso de localizar colinealmente.

Los resultados ponen de manifiesto la existencia de la CMR en relación con la invención, funcionalidad, crítica y aprendizaje en las representaciones de estudiantes de todos los grados, pues utilizaron diversos recursos cognitivos y coordinaron las estructuras lógica, numérica y geométrica al crear su representación de datos, evidenciados en las explicaciones sostenidas sobre estas durante las entrevistas realizadas y en la riqueza y la dinámica de la secuencia de representaciones construidas por cada estudiante (*cf.*, «Anexo 2»).

Las categorías estructurales exploradas fueron coordinadas por todos los estudiantes del grado 4 al construir y al explicar. Además, en este grado se pesquisó una competencia metarrepresentacional más completa, lo que resulta consistente con su mayor experiencia escolar, que redundaba en mayor experticia numérica, expresión y escritura más robusta. Debido a que las representaciones producidas se centran mayoritariamente en tablas y gráficos sin eje Y, parece natural establecer que a mayor grado de escolaridad los estudiantes realizan mayores coordinaciones de las componentes (*cf.* tablas 3 y 4).

Reconocer las estructuras matemáticas en juego, los recursos cognitivos y las componentes implicadas permite profundizar y constatar la importancia de estos elementos constituyentes de las representaciones con el fin de contribuir al desarrollo de los aspectos dinámicos metarrepresentacionales como invención, funcionalidad, crítica y aprendizaje.

Este estudio sobre los aspectos de la CMR de estudiantes evidenció la función de control y de «objeto para pensar» de la representación señalada por Martí y Scheuer (2015). Por tanto, parece fundamental desarrollar esta competencia y promover las coordinaciones entre las componentes para ayudar a los estudiantes de rendimientos bajos a producir notaciones abstractas con estructuras mejor desarrolladas, con el objetivo de ayudarles a alcanzar habilidades gráficas con mayor rapidez, en el sentido expresado por Mulligan *et al.* (2013), tomando conciencia de elementos que parecen ser intuitivos y cotidianos para los estudiantes.

El estudio ha confirmado y ampliado los hallazgos de English (2012), Mulligan (2015) y Leavy y Hourigan (2017), pues dadas las oportunidades de aprendizaje, los estudiantes, desde los 6 años, son capaces de representar datos categóricos y argumentar sobre ellos. Por tanto, el currículo y los textos escolares podrían proveer a los estudiantes de oportunidades para organizar y representar los datos en las formas que ellos elijan y entiendan, aunque esas representaciones parecieran inicialmente atípicas para los profesores, en contextos que les permitan explicar, no representaciones que han sido enseñadas y hechas por otros, sino las propias producciones que dan sentido a descubrir, comunicar y razonar las relaciones entre datos desde los primeros grados.

Reconocer las categorías asociadas a las componentes lógica (variable), numérica (frecuencia) y geométrica (base-lineal, linealidad-gráfica,) como un conocimiento de las partes fundamentales en una representación, proporciona un andamiaje para su aprendizaje y enseñanza, pues permite operar con elementos primordiales para la negociación, la construcción, integración y reflexión de significados, al juzgar y comparar la calidad de las representaciones. Cuestión que requiere iniciarse tempranamente para propiciar el desarrollo de la competencia metarrepresentacional en estudiantes, en futuros profesores y en profesores de primaria en servicio, tanto en matemática como en ciencias.

Entre las proyecciones de este estudio, consideramos de interés indagar en el aspecto de invención de la CMR, dado que del total de representaciones creadas, un 23% de ellas no pudieron ser categorizadas en términos de las categorías representacionales propuestas por Martí (2009) o por gráficos con o sin eje precisados en este estudio.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido financiada por CONICYT-Chile a través del Proyecto N.º 11140472, y por el Proyecto Basal FB0003 del Programa de Investigación Asociativa de CONICYT.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CARRAHER, D., SCHLIEMANN, A. y SCHWARTZ, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.). *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum.
<https://doi.org/10.5860/choice.46-1024>
- COMMON CORE STATE STANDARDS (2012). *Estándares Estatales Comunes de Matemáticas*. Disponible en línea: <<http://commoncore-espanol.com/common-core-state-standards-spanish>>.
- DI SESSA, A. (2004). Meta-representation: Native competence and targets for instruction. *Cognition and Instruction*, 22(3), pp. 293-331.
https://doi.org/10.1207/s1532690xci2203_2
- DI SESSA, A., HAMMER, D., SHERIN, B. y KOLPAKOWSKI, T. (1991). Inventing graphing: meta-representational expertise in children. *Journal of Mathematical Behavior*, 10, pp. 117-160. Disponible en línea: <<http://ccl.northwestern.edu/constructionism/2012LS452/assignments/4/1991%20diSessa.pdf>>.
- DI SESSA, A. y SHERIN, B. (2000). Meta-representation: an introduction. *Journal of Mathematical Behavior*, 19, pp. 385-398.
[https://doi.org/10.1016/s0732-3123\(01\)00051-7](https://doi.org/10.1016/s0732-3123(01)00051-7)
- DUVAL, R. (2014). Commentary: Linking epistemology and semio-cognitive modeling in visualization. *ZDM*, 46(1), pp. 159-170.
<https://doi.org/10.1007/s11858-013-0565-8>
- EARNEST, D. (2015). From number lines to graphs in the coordinate plane: investigating problem solving across mathematical representations. *Cognition and Instruction*, 33(1), pp. 46-87.
<https://doi.org/10.1080/07370008.2014.994634>
- ENGLISH, L. (2012). Data modeling with first-grade students. *Educational Studies in Mathematics*, 81, pp. 15-30.
<https://doi.org/10.1007/s10649-011-9377-3>
- ESTRELLA, S. (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 14(2), pp. 1-23.
<https://doi.org/10.15517/aie.v14i2.14817>
- ESTRELLA, S. (2018). Data representations in Early Statistics: data sense, meta-representational competence and transnumeration. En A. Leavy, M. Meletiou y E. Paparistodemou (Eds.). *Statistics in Early Childhood and Primary Education – Supporting early statistical and probabilistic thinking*. Singapur: Springer.
- ESTRELLA, S., MENA, A. y OLFOS, R. (2017). Naturaleza del objeto matemático «Tabla». *Magis: Revista Internacional de Investigación en Educación*, 10(20), pp. 105-122.
<https://doi.org/10.11144/javeriana.m10-20.nomt>
- ESTRELLA, S., OLFOS, R., MORALES, S. y VIDAL-SZABÓ, P. (2017). Argumentaciones de estudiantes de primaria sobre representaciones externas de datos: componentes lógicas, numéricas y geométricas. *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 20(3), pp. 345-370.
<https://doi.org/10.12802/relime.17.2034>

- FRANKLIN, C., KADER, G., MEWBORN, D., MORENO, J., PECK, R., PERRY, M. y SCHEAFFER, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report*. Alexandria, VA: American Statistical Association. Disponible en línea: <http://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEPreK-12_Full.pdf>.
- GINSBURG, H., LEE, J. y BOYD, J. (2008). Mathematics education for young children: what it is and how to promote it. *Society for Research in Child Development*, 22(1), pp. 3-24.
<https://doi.org/10.1037/e640072011-001>
- KAUFMAN, E., LORD, M., REESE, T. y VOLKMANN, J. (1949). The discrimination of visual number. *The American Journal of Psychology*, 62(4), pp. 498-525.
<https://doi.org/10.2307/1418556>
- LE CORRE, M. y CAREY, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: an investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition*, 105(2), pp. 395-438.
<https://doi.org/10.1016/j.cognition.2006.10.005>
- LEAVY, A. y HOURIGAN, M. (2017). The role of perceptual similarity, context, and situation when selecting attributes: considerations made by 5–6-year-olds in data modeling environments. *Educational Studies in Mathematics*, 97(2), pp. 163-183.
<https://doi.org/10.1007/s10649-017-9791-2>
- MARTÍ, E. (2009). Tables as cognitive tools in primary education. En C. Andersen et al. (Eds.). *Representational systems and practices as learning tools* (pp. 133-148). Rotterdam: Sense Publishers. Disponible en línea: <<https://www.sensepublishers.com/media/883-representational-systems-and-practices-as-learning-tools.pdf>>.
- MARTÍ, E. y SCHEUER, N. (2015). Sistemas semióticos, cultura y conocimiento matemático temprano. *Estudios de Psicología*, 36(1), pp. 9-17.
<https://doi.org/10.1080/02109395.2014.1000008>
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE CHILE (2012). *Bases Curriculares de la Educación Básica, Matemática*. Santiago de Chile: Autor.
- MOORE, D. (2009). *Estadística Aplicada Básica*. Barcelona: Antoni Bosch.
- MULLIGAN, J. (2015). Moving beyond basic numeracy: data modeling in the early years of schooling. *ZDM*, 47(4), pp. 653-663.
<https://doi.org/10.1007/s11858-015-0687-2>
- MULLIGAN, J., MITCHELMORE, M., ENGLISH, L. y CREVENSTEN, N. (2013). Reconceptualizing early mathematics learning: the fundamental role of pattern and structure. En L. English y J. Mulligan (Eds.). *Reconceptualizing early mathematics learning* (pp. 47-66). Dordrecht, Holanda: Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-007-6440-8_4
- PAPIC, M., MULLIGAN, J. y MITCHELMORE, M. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), pp. 237-269.
<https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.42.3.0237>
- PÉREZ-ECHEVERRÍA, M. y SCHEUER, N. (2009). External representations as learning tools: an introduction. En C. Andersen et al. (Eds.). *Representational systems and practices as learning tools* (pp. 1-18). Rotterdam: Sense Publishers. Disponible en línea: <<https://www.sensepublishers.com/media/883-representational-systems-and-practices-as-learning-tools.pdf>>.
- SARAMA, J. y CLEMENTS, D. (2009). «Concrete» computer manipulatives in mathematics education. *Child Development Perspectives*, 3(3), pp. 145-150.
<https://doi.org/10.1111/j.1750-8606.2009.00095.x>
- SAWREY, K., BRIZUELA, B. y BLANTON, M. (2015). Representaciones producidas por una alumna para interrumpir el flujo de una entrevista. *Estudios de Psicología*, 36(1), pp. 185-192.
<https://doi.org/10.1080/02109395.2014.1000033>

SEARD, A. (2008). *Thinking as communication: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Nueva York: Cambridge University Press.

<https://doi.org/10.1017/cbo9780511499944>

TIPPETT, C. (2016). What recent research on diagrams suggests about learning with rather than learning from visual representations. *Science International Journal of Science Education*, 38(5), pp. 725-746.

<https://doi.org/10.1080/09500693.2016.1158435>

ANEXO 1

Protocolo de entrevista clínica

Protocolo de entrevista

Situación de fichas azules, rojas y verdes

El entrevistador contextualiza:

Una profesora en otro curso como el tuyo, les llevó a sus estudiantes este material [mostrar placa metálica y fichas imantadas de colores]. ¿Reconoces qué son [mostrar fichas, se espera que digan fichas o flores]? Bien, la profesora les pidió a los niños que organizaran estos datos sobre esta placa metálica, ¿lo podrías hacer tú? ¡Hazlo! [con una impronta de entusiasmo].

1. Cuéntame, ¿cómo lo hiciste? ¿Quieres ocupar el plumón [marcador de pizarra]? [Podría agregar cardinalidad, dibujar cierres rectangulares, hacer ejes, u otros.]
2. Si un compañero como tú, viene y hace este cambio [mover una ficha de la línea base y colocarla arriba o al final de una columna o fila, respectivamente]. ¿Lo dejarías así?
3. Si una compañera lo coloca así [mover las columnas o filas de tal manera que queden curvas, hacer perder la linealidad gráfica]. ¿Lo dejarías así?
4. Ahora, ¿cómo podrías representar estos datos usando este lápiz (negro tinta, de marca gruesa) y este papel (ya recortado)? Cuéntame lo que hiciste. [O bien, si se demora, ¿qué estás pensando?]
5. ¿Se te ocurre otra forma más resumida? Hazlo. [Facilitar una hoja cada vez más pequeña, y repetir esta acción a criterio del entrevistador]

Tareas de la entrevista clínica

Se consideró una situación de organización de fichas, de las cuales 4 son azules, 3 verdes y 2 rojas. En la entrevista se consideraron las siguientes tareas:

(a.1) «¿Cómo organizarías estos datos (fichas de colores)?» [¿Evidencia *variable?*]

(a.2) «¿Quieres ocupar plumón (marcador de pizarra)?» [¿Evidencia *frecuencia?*]

– Construida su organización de datos, se le pide escribir libremente lo que quiera (escribe cardinal, enmarca los datos o escribe una frase, entre otras posibilidades).

(b.1) «Mover una ficha» [¿Evidencia *base-lineal?*]

– En una organización tipo gráfico de barra, el entrevistador mueve una ficha (un dato) de la base-lineal (eliminando la continuidad de la línea basal, implícita o explícita) y la coloca en el otro extremo de la columna (o fila), manteniéndose la frecuencia (o cardinal) pero desajustando la base.

(b.2) «Curvar una columna (o fila) de fichas» [¿Evidencia *linealidad-gráfica?*]

– En una organización tipo gráfico de barra, el entrevistador curva una columna (o fila) de fichas (datos) de tal manera que pierde lo recto de la barra alterando la *linealidad-gráfica*.

(c) «Representar con lápiz en distintos tamaños de papel» [¿Evidencia *diversidad de representaciones?*]

– El entrevistador solicita nuevas representaciones de los datos (fichas), y cada vez disminuye el tamaño (rectangular) del papel, estimulando al estudiante a representar variada y resumidamente.

ANEXO 2

Secuenciación y tipo de las 192 representaciones producidas por 30 estudiantes

Estudiantes	Grado	Secuenciación de las representaciones de datos																
		1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º	11.º	12.º	13.º	14.º	15.º	16.º	17.º
E01	1	L	X	X	X	X	X											
E02	1	L	L	L	g	g	t	t										
E03	1	g	L															
E04	1	X	L	X	X	L	g	g	g	g	T							
E05	1	g	g	g	X	X	g	g	g	g	X	T	g					
E06	1	g	g															
E07	1	X	X	X	g	g												
E08	2	g	g	g	L	L												
E09	2	X	X	X	L	X	g	X	X	g	g	X	t	L	X	t	L	L
E10	2	X	X	X	g	T												
E11	2	L	X	X	L	T	L	L										
E12	2	X	X	g	t	g	g											
E13	2	L	L	L	t	X	t	T	T									
E14	2	L	L	X	g	g	g	g	T									
E15	2	X	g	g	g	X	g	L	L									
E16	3	g	t	t	g	T	T	G	T	X								
E17	3	g	g	L	t	t	L	T	T									
E18	3	g	t	g	g													
E19	3	T	g															
E20	3	X	T	T														
E21	3	T	t	X	X	T												
E22	3	X	X	X	G	X	X	T	T	T								
E23	3	g	T	T	T	T	T											
E24	3	g	g	T														
E25	4	g	T	T	T	X	L											
E26	4	g	g	X	g	g	g	T										
E27	4	g	T	T	g	T	T											
E28	4	g	G	G	G	g	T											
E29	4	g	T	g	T	T												
E30	4	g	g	g	g	T												

NOTA: texto lineal [t]; lista [L]; tabla [T]; gráfico sin eje Y [g]; gráfico con eje Y [G]; otras representaciones [X]. Producciones de Tarea a.1 y a.2, se señalan sin negrita y de Tarea c, con negrita.

Metarepresentational competence in early schooling: external representations of data and their components

Soledad Estrella, Raimundo Olfos
Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica
de Valparaíso, Valparaíso, Chile.
soledad.estrella@pucv.cl, raimundo.olfos@pucv.cl

Patricia Estrella
OMEF Chile.
pestrellar@gmail.com

Pedro Vidal-Szabó, Sergio Morales
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
pedro.vidal_s@umce.cl, sergio.morales.candia@gmail.com

Various studies of students' cognitive development highlight the importance of external representations and suggest addressing them from a young age. However, there is a lack of attention to how to work with these representations in school. Some studies investigate subjects' capacity to invent, criticize, and compare a variety of representations, and even to design new creations, explaining them and understanding the role they play; this capacity is known as metarepresentational competence (MRC).

This article presents a qualitative study of metarepresentational competence and has the following goals: to characterize the components of representations and to investigate their relationship with MRC in the context of data organization and in explanations of the components given by 30 students in grades one through four (six to nine years old) who constructed a total of 192 representations.

To study the resources that the students demonstrate through the representations they create, we ask, «What aspects of MRC are shown?» and, «What components are demonstrated in their representations?». The data analysis considered four aspects of MRC (invention, critique, functioning, and learning), five types of representations (linear text, list, table, graphs with and without a Y-axis), and four components of representations (variable, frequency, base-line, linearity-graph). Through video recordings and transcripts of semi-structured clinical interviews of the students faced with an open-ended data organization task, and the representations they produced with paper and pencil, the analysis was carried out in three phases. The first phase included the identification, classification, and sequencing of each student's productions by representational categories according to grade level. The second phase involved the identification and emergence of the components in the representations according to grade level. The third and final phase implied the interpretation and structuring of some of the students' explanations regarding the components of their representations.

The analysis of the results accounts for the existence of MRC in students at all grade levels, as they used diverse cognitive resources and coordinated logical (variable), numerical (frequency), and geometrical (base-line, linearity-graph) structures in creating their data representations, as evidenced by the explanations they gave for them and in the richness and vibrancy of the sequence of representations created by each student. Recognizing the mathematical structures in play, the cognitive resources, and the invariant components allow for a deeper understanding and for confirming the importance of these elements that make up the representations in order to contribute to the development of dynamic metarepresentational aspects such as invention, functioning, critique, and learning. In this manner, we contribute to the body of literature on MRC and to an approach that values the variety of representations that give meaning to discovering, communicating, and reasoning about the relationships in data in the first years of schooling.

