T-1.335

ANEXOS: USO DE RECURSOS MATERIALES Y ACTIVIDADES DE EXPERIMENTACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICAS EN BACHILLERATO

Aubanell Pou, Anton - Belmonte Palmero, Sergi - Bosch Camós, Anna - de la Fuente Pérez, Abraham - Fernández Hernández, Raül - Font González, Jordi - Lopez Serentill, Paula - Margelí Voelp, Sílvia - Martínez Pascual, Manel - Massich Vall, Francesc - Miró Manasanch, Laia - Mora Cañellas, Lluís - Morera Úbeda, Laura - Muria Maldonado, Sergi
gdfmub@gmail.com
Grupo de didáctica de la Facultad de Matemáticas y Informática de la UB (Barcelona)

a. **Cono de Apolonio**

Tal como se nos propone en Guzmán (2003) la mejor manera de conseguir una elipse es cortar de manera oblicua un buen chorizo. De esta manera ya podremos experimentar sobre elipses de diferente excentricidad. Si lo que queremos obtener son, además de círculos y elipses, hipérbolas y parábolas, bastará con seccionar, de diferentes maneras, un cono. Para ello en clase podemos construir un cono de barro o de plastilina. Una vez ya se ha pasado por una primera fase de experimentación libre, podemos usar un cono de espuma verde de los que se usan en floristerías para hacer composiciones florales.

b. **Teorema de Dandelín, el eslabón perdido**

Habitualmente se inicia la presentación de las cónicas justificando su nombre como las curvas resultantes de la intersección de un cono con un plano. Según la posición del plano se obtendrán elipses (en particular círculos), parábolas o hipérbolas (aparte de determinados casos “degenerados”). Una vez hecha esta introducción se suele pasar a deducir las ecuaciones de cada cónica a partir de las condiciones métricas que cumplen, por ejemplo, en el caso de la elipse, se partirá de su definición como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos dados, denominados focos, es constante. Así surge una pregunta obvia pero que, con frecuencia, pasa desapercibida: ¿Aquella elipse que inicialmente definíamos como intersección de un cono y un plano (no paralelo ni a su eje ni a su generatriz) cumple la condición métrica de constancia de las suma de distancias a los

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

focos? La respuesta a esta pregunta viene dada por el teorema de Dandelín y es el eslabón lógico (y muchas veces olvidado) entre una definición y otra.

A continuación demostraremos el teorema de Dandelín para el caso de una elipse. Consideremos un cono como el de la figura XXX y un plano s que lo corta determinando una curva que vamos a demostrar que cumple la condición métrica característica de la elipse. Consideremos dos esferas:

- La esfera (grande) tangente al cono y al plano s, situada en la parte opuesta al vértice del cono. Será tangente al cono a lo largo de una circunferencia y al plano s en un punto F1.
- La esfera (pequeña) tangente al cono y al plano s, situada entre el plano y el vértice del cono. Será tangente al cono a lo largo de una circunferencia y al plano s en un punto F2.

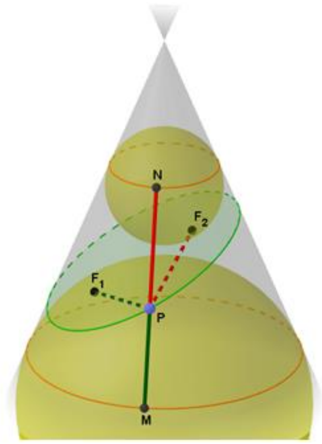


Figura XXX: Teorema de Dandelín

Consideremos un punto P cualquiera sobre la curva de corte (que pretendemos demostrar que es una elipse), formará parte a la vez del cono y del plano s. Trazamos los segmentos PF_1 y PF_2 que son tangentes, respectivamente, a una y otra esfera en los puntos F_1 y F_2. A continuación consideramos la generatriz del cono que pasa por P y que, naturalmente, cortará a las circunferencias de tangencia entre las esferas y el cono. Llamemos N y M a los respectivos puntos de intersección (véase la figura XXX). Observemos que PF_1 y PM son dos tangentes a la esfera grande trazadas desde P y, por lo tanto, $PF_1=PM$. Igualmente PF_2 y

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

PN son dos tangentes a la esfera pequeña trazadas desde P y, por lo tanto, PF_2=PN. Así pues: $PF_1 + PF_2 = PM + PN = MN$. Dado que MN no depende de P (puesto que es la distancia entre las circunferencias de tangencia del cono y las respectivas esferas) habremos deducido que $PF_1 + PF_2$ es constante para cualquier punto P de la curva de intersección entre el cono y el plano. Así pues esta curva es una elipse cuyos focos son los puntos de tangencia, F_1 y F_2, de las esferas con el plano de corte s. Por consiguiente hemos demostrado el teorema de Dandelín en el caso de la elipse. Existen versiones de este teorema para el caso de la parábola y de la hipérbola análogas a la que se ha expuesto.

USO DE RECURSOS MATERIALES Y ACTIVIDADES DE EXPERIMENTACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICAS EN BACHILLERATO

Aubanell Pou, Anton - Belmonte Palmero, Sergi - Bosch Camós, Anna - de la Fuente Pérez, Abraham - Fernández Hernández, Raül - Font González, Jordi - Lopez Serentill, Paula - Margelí Voelp, Sílvia - Martínez Pascual, Manel - Massich Vall, Francesc - Miró Manasanch, Laia - Mora Cañellas, Lluís - Morera Úbeda, Laura - Muria Maldonado, Sergi
gdfmub@gmail.com
Grupo de didáctica de la Facultad de Matemáticas y Informática de la UB (Barcelona)

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: T
Nivel educativo: Terciario o Bachillerato (16 a 18 años)
Palabras clave: Recursos, actividades, experimentación

Resumen

El uso de recursos materiales y actividades de experimentación en clase de matemáticas se está normalizando en educación primaria y, quizás en menor medida, en educación secundaria obligatoria. Así podemos encontrar muchos ejemplos de uso de materiales manipulativos y TAC, en las aportaciones que se han ido presentando en diferentes ediciones de las JAEM. En cambio, para la etapa de Bachillerato este tipo de recursos didácticos no parece que sean tan populares. Parece que en Bachillerato el formalismo toma un protagonismo que deja de lado otras opciones.

Llevar al aula buenos recursos materiales inmersos en actividades adecuadas puede ser el método de transporte más eficaz para llegar a las ideas de fondo que subyacen en los contenidos propios de bachillerato.

Las actividades de experimentación con recursos materiales nos permiten poner en juego el ciclo: experimentación, descubrimiento, conceptuación y formalización de una forma

natural.
Durante su desarrollo mostraremos y discutiremos con los asistentes la diferente utilización de éstos y cómo pueden gestionarse para que este tipo de actividades puedan ser aportaciones relevantes en los niveles más avanzados de la educación secundaria y que son un buen camino para llegar a comprender y a formalizar ideas abstractas.

Introducción

Está ampliamente aceptado que para conseguir un aprendizaje significativo y profundo de los conceptos matemáticos, los niños deben tener oportunidades de interaccionar con objetos concretos antes de pasar a una fase más abstracta. El uso de recursos materiales facilita el paso por el concreto y nos puede conducir hacia la abstracción de conceptos a través de las propias intuiciones de los alumnos. En la práctica esta idea se tiene muy en cuenta en la etapa Infantil y Primaria, algo menos en Secundaria y casi nada en Bachillerato. Creemos que esto ocurre por dos razones: por un lado, como los alumnos son ya expertos aprendices, se da por hecho que pueden pasar directamente a la visión abstracta de los conceptos matemáticos, sin la necesidad de pasar antes por esta fase concreta. Pero por otro lado, como los conceptos son mucho más complejos que los que se tratan en Secundaria y por supuesto en Bachillerato, parece más difícil encontrar recursos materiales que sean interesantes para llevar a clase que muestren esta complejidad. Además, las actividades de experimentación que puedan resultar interesantes para mostrar esta complejidad, da la sensación de que necesitan de un tiempo en el aula del que no disponemos en Bachillerato.
En este taller mostraremos algunos recursos manipulativos fáciles de construir que son muy efectivos para algunos temas concretos. Y por otro lado, intentaremos convencer a los asistentes de que usarlos no requiere de tanto tiempo de clase como se pudiera pensar y de que resultan ser recursos muy efectivos para entender conceptos difíciles.

1. **Cónicas**
    a. **Construcción de cónicas con cordel**

La construcción de las cónicas no degeneradas a partir de un cordel nos permitirá mostrar las propiedades métricas que las definen.
Podemos construir una elipse por el método del jardinero. Si partimos de una madera con dos clavos que sobresalgan situados en los puntos F y F’ (que harán de focos), y un cordel de longitud mayor que la distancia entre los clavos con un cárcamo en cada punta para poderlo

ISBN 978-84-945722-3-4

sujetar en los clavos. Con un rotulador y sin dejar de tensar la cuerda trazamos la cónica. Se obtiene una elipse partiendo de su definición como el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de distancias a los focos es constante. Precisamente la longitud del cordel será la suma de estas distancias.

Para construir la hipérbola necesitaremos, además de la madera con los dos clavos, una regla con un cárcamo en un extremo para encajarlo en los focos, y que en el otro extremo se haya unido un cordel algo más corto que la regla. El cordel acabará también con un pequeño cárcamo para poderlo pasar por los clavos de los focos. Encajaremos la regla en uno de los focos y el cárcamo del extremo libre del cordel, por el otro. Con la punta de un rotulador tensaremos la cuerda tocando siempre la regla. A medida que vayamos girando la regla alrededor de uno de los focos, el rotulador se irá desplazando, siempre en contacto con la regla y estirando el cordel al máximo. El conjunto de puntos que se dibuja forma una rama de la hipérbola. De forma análoga, intercambiando las posiciones de regla y cordel en los focos, trazamos la otra rama. Una vez construida la cónica se podrá demostrar que es el lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de distancias a los focos, en valor absoluto, es constante. Esta última es precisamente la diferencia entre la longitud de la regla y el cordel, y coincide con la distancia entre los vértices de la hipérbola. Utilizando cuerdas de diferentes longitudes se puede analizar la excentricidad de la cónica.

Finalmente, para construir la parábola sólo necesitamos una madera con un clavo que sobresalga situado en el punto F (foco), una regla para marcar la directriz, una escuadra y un cordel con un cárcamo en cada extremo de longitud igual al cateto mayor de la escuadra. Fijamos un extremo del cordel en el vértice del ángulo agudo y mostramos que cateto y cordel tienen la misma longitud. El otro cárcamo del cordel lo situamos en el foco y colocamos la escuadra de manera que su cateto mayor sea perpendicular a la regla (directriz) juntando el cateto menor con esta. Con un rotulador, en contacto siempre con la escuadra, tensamos el cordel y, deslizando la escuadra por la regla el rotulador va trazando la parábola. Es necesario que el rotulador no deje de estar en contacto con la escuadra y estirando siempre de la cuerda.

b. **Rebote en elipses y parábolas. Espejos parabólicos**

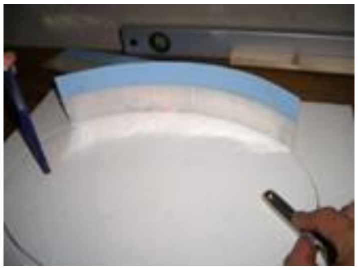
La visualización de las propiedades de las cónicas y sus aplicaciones prácticas nos ayudan a comprender la importancia que tienen en la vida real.

ISBN 978-84-945722-3-4

En el primer ejemplo vamos a ver una de las propiedades de la parábola que es que cualquier rayo de luz que entre paralelo al eje de la parábola y que rebota en ésta, pasa siempre por el foco de la parábola. Para visualizarlo construiremos la parábola y la recortaremos sobre cartón pluma, de manera que dispongamos tanto de la figura como del molde. En el cartón pluma marcaremos el foco y el eje de la parábola. Dispondremos también de una lámina flexible de cartulina con una cara plateada que encajaremos entre la parábola y el molde. Después de bajar la luz del aula y trabajando todo el grupo de alumnos conjuntamente, en el foco encajaremos un pequeño palo y moveremos el láser en paralelo al eje, enfocando diferentes puntos de la parábola, observando que el rebote siempre pasa por el foco. En el momento adecuado será interesante señalar la posición de la recta tangente y de la recta normal a la parábola y comentar la igualdad entre el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión. Esta propiedad es la base del funcionamiento de las antenas parabólicas y de las cocinas solares parabólicas. También se utiliza en los espejos convexos de los retrovisores de los coches y de las motos para aumentar el campo de visión y en los espejos que se utilizan en las esquinas de algunos cruces sin visibilidad o en las tiendas y aparcamientos.

En un segundo momento situaremos el láser en el foco de la parábola y comprobaremos como todos los reflejos salen en dirección paralela al eje de la parábola. Esta propiedad se utiliza en los focos de los coches para aprovechar al máximo la luz que desprende la bombilla. También es muy interesante la creación de una imagen virtual de un objeto con un doble espejo parabólico. Así se sitúa un objeto en el foco del primer espejo parabólico creando una imagen virtual en el foco del segundo espejo. En una segunda actividad visualizaremos una propiedad de la elipse que es que cualquier rayo de luz que sale de un foco y rebota sobre cualquier punto de la elipse pasa por el otro foco de la elipse. Para ello construiremos una estructura análoga a la del primer ejemplo con una elipse. Esta propiedad se puede comprobar también en cúpulas o túneles con secciones elípticas, en las que si situamos una persona en cada foco de una sección pueden hablar entre ellos sin ningún problema. También se aplica en las litotricias, con ondas de choque de alta frecuencia, para romper cálculos en el riñón, la vejiga o el uréter. El emisor de ondas se sitúa en uno de los focos del elipsoide y el cálculo en el otro foco.

ISBN 978-84-945722-3-4

Todas estas propiedades visualizadas con materiales manipulativos se pueden ampliar modelizándolas con una construcción de GeoGebra. El lector encontrará applets en la bibliografia de este documento.

2. **Funciones**

   a. **Cortando un cilindro**

Para empezar la actividad, partiremos de un cilindro envuelto con un papel dando repetidas vueltas alrededor de él. A partir de este punto, aparece la pregunta central donde se sienta la propuesta didáctica: ¿qué sucederá cuando cortemos transversalmente el cilindro? ¿cuál será la sección del cilindro que se producirá? ¿qué sucederá cuando desenvolvamos el papel? Analizemos por encima, las respuestas descritas hasta el momento.

<u>¿Cuál será la sección del cilindro que se producirá?</u>:

La sección transversal del cilindro será una elipse. Sin embargo, podemos ir un poco más allá y preguntarnos qué relación hay entre el radio del cilindro y el ángulo de corte con la elipse resultante. Si el lector estudia la imagen superior detenidamente, observará que el eje menor de la elipse coincide con el diámetro del cilindro (D). Para determinar el eje mayor de la elipse (M) se necesitará buscar una relación entre el diámetro del cilindro y el ángulo de corte

ISBN 978-84-945722-3-4

respecto el eje del cilindro, le llamaremos α. Usando las relaciones básicas de trigonometría obtendremos que $M = \frac{D}{\sin\alpha}$

¿Qué sucederá cuando desenvolvamos el papel?:

La actividad toma una nueva perspectiva al desenvolver la sección del cilindro. El momento que descubrimos nuestro cilindro en clase es un momento mágico. Los alumnos pueden llegar a aplaudir a la función que aparece: ¡una sinusoidal! En este momento nos aparece un nuevo paradigma donde debemos hacer pensar a nuestros alumnos: ¿Qué sucederá a la función resultante si modificamos el ángulo de corte? ¿Qué aspectos se mantienen invariantes si modificamos el ángulo de corte? ¿Qué características de la función vienen determinadas por el radio del cilindro?

A modo de ampliación se puede estudiar qué sucedería si se hacen dos secciones a modo de cuña en un cilindro o cambiar el cilindro por un prisma. Como atacar estas ampliaciones lo dejamos a la elección del lector. Sin embargo, quedarse a un nivel de análisis cualitativo es más que interesante. El material es el punto de salida de la actividad pero, en el momento que se quiera entrar a una investigación más detallada, el uso de software dinámico pasa a ser mucho más rico y efectivo.

b. **Optimización con una hoja de papel**

Esta actividad trata de dar respuesta y enriquecer un problema clásico de optimización utilizando materiales: Se quiere construir una caja sin tapa con una lámina de “a” cm de alto i “b” cm de largo recortando un cuadrado de la lámina en cada vértice y doblando las pestañas para formar los laterales. Hallar las dimensiones de la caja de volumen máximo.

Al empezar esta actividad se da una hoja de papel con una trama cuadriculada a todos los alumnos y se les asigna un número natural a cada uno. Las instrucciones son muy sencillas, cada alumno tiene que construir un cajón sin tapa recortando cuatro cuadrados, uno de cada esquina de la trama, la longitud de los cuales debe ser el número natural que tiene asignado cada alumno y luego doblando el papel. Es bueno que haya alumnos que no puedan realizar el cajón por restricciones del problema, en este caso, se les deja escoger el número que prefieran siempre que éste les permita construir el cajón. Esta situación nos permitirá hablar del dominio de la función.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Cuando todos los alumnos tengan un cajón construido, cada uno de ellos tendrá que hallar el volumen de su cajón. Una vez calculados todos los volúmenes, se colocan en una hoja de cálculo la longitud del lado de los cuadrados recortados y los volúmenes obtenidos. A continuación, se representan en una gráfica el volumen en función de la longitud del lado de los cuadrados recortados. En éste momento, se puede discutir sobre el tipo de función obtenida. Además, ya podemos hacer la pregunta que ha motivado la actividad ¿Quien es el alumno que tiene el cajón con un mayor volumen? O la pregunta real ¿Qué longitud del lado del cuadrado recortado hace que el volumen del cajón sea máximo? También es un buen momento para reflexionar sobre si la caja obtenida por uno de los alumnos es la de más volumen que se puede hacer recortando un cuadrado de cada esquina.

Una vez solucionado el problema, es momento de formalizarlo y escribir el volumen del cajón en función del lado del cuadrado recortado. Entonces, si las dimensiones de la trama inicial eran "a" de ancho y "b" de largo, y al lado del cuadrado le llamamos "x", la función del volumen es la siguiente:

$$V(x) = x \cdot (a - 2x) \cdot (b - 2x)$$

Conocedores ya de la respuesta gracias a la actividad manipulable, es momento de encontrar la solución analítica al problema y ver que evidentemente coinciden además de comentar las peculiaridades que se han generado en el problema por el hecho de trabajar sólo con números naturales.

c. **Integrales con tallarines**

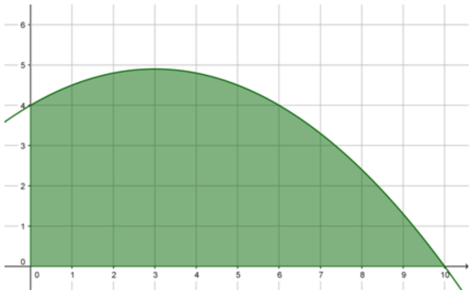
Sin querer entrar en excesivos formalismos (no es la intención de este texto), la integral de Riemann se podría definir como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i^*)\Delta x_{i-1}$$

para f continua en un intervalo [a,b] i x_i puntos de los subintervalos que forman una partición del intervalo [a,b]. Seguramente, antes sería necesario hablar de sumas superiores e inferiores… Sin embargo, podemos llegar al concepto por un camino donde los materiales toman un papel mucho más preponderante. Supongamos que queremos calcular el área de la

ISBN 978-84-945722-3-4

siguiente región:



Para hacerlo, utilizaremos únicamente tallarines y una regla. ¿Cómo podemos hacerlo? Recubriendo nuestra región con segmentos de distinta longitud. Posteriormente, únicamente necesitaremos calcular el área de los tallarines que recubren la región. Para hacerlo, el alumno se puede decantar por agrupar los segmentos para que le sea más fàcil su cálculo o, por lo contrario, echar mano de una hoja de cálculo para hacer el sumatorio de las àreas de los distintos rectángulos de pasta.

Metodológicamente hablando, se pueden hacer distintos enfoques de la misma actividad: estudiar sumas superiores o inferiores, estudiar distintas particiones usando tallarines de grueso distinto (hasta combinar distintos gruesos), se puede utilizar pasta de dos colores para diferenciar las regiones por encima o por debajo del eje OX… Sean cuales sean las decisiones del docente, es de especial interés comparar los resultados obtenidos por los alumnos con el resultado teórico de la integral de Riemann. Para ello, es más que interesante que la imagen sobre la cual trabajen los alumnos esté debidamente escalada para que una unidad en los ejes mida 1 cm. En caso contrario, deberán utilizar las relaciones de proporcionalidad entre áreas.

Reflexión final

Hemos mostrado en este artículo algunas posibilidades para llevar al aula de Bachillerato recursos materiales y actividades de experimentación que no nos harán sentir que hemos perdido ni un minuto de clase, porque gracias a estos recursos conseguiremos un aprendizaje mucho más significativo, duradero y sobre más alumnos, que si nos limitamos al mundo de lo abstracto.

ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas

Aubanell Pou, A. (2006). *Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària*. http://www.xtec.cat/~aaubanel/ Consultado 22/05/2017.

Castelnuovo, E. y Barra, M. (1976). *Matematica nella realtà.* Torino: Editore Boringhieri. pp. 17, 33, 145,

de Guzmán, M. (2003). *Cuentos con cuentas.* Capítulo 1, pp. 9-22. Madrid: S.L. NIVOLA LIBROS Y EDICIONES.

Grupo de didáctica de las matemáticas de la UB (2017). Uso de recursos materiales y actividades de experimentación. https://www.geogebra.org/m/CwbGzWvH Consultado 23/05/2017

Nabla Ltd. (2004-2017). Conic sections. http://www.nabla.hr/PC-ConicsProperties2.htm#Proof Consultado 23/05/2017

Puig Adam, P. (1948): *Curso de Geometría Métrica, Tomo II.- Complementos*. Madrid: Gómez Puig, Ediciones.

Puig Adam, P. (1956): *Didáctica Matemática Eurística*. Madrid: Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.

ISBN 978-84-945722-3-4