T-298

RECORTANDO EL CUADRADO

Guillem Bonet Carbó – Raül Fernández Hernández – Sílvia Margelí Voelp – Sandra Soliguer Portavella
gbonet2@xtec.cat – raul.fh@gmail.com – smargeli@gmail.com – ssoliguer@gmail.com

Grupo MatGI - España

Núcleo temático: La resolución de problemas en matemáticas
Modalidad: Taller (T)
Nivel educativo: Medio o Secundario (12 a 15 años)
Palabras clave: Geometría, Lógica, Creatividad, Resolución de problemas

Resumo

El grupo de profesores de matemáticas de Girona (MatGI) es un grupo que se reúne mensualmente para trabajar sobre materiales o actividades didácticas para el aula de matemáticas buscando un enfoque más manipulativo que reproductivo.
Desde nuestro grupo os queremos presentar distintas ideas para trabajar de forma manipulativa, intuitiva y fresca la activación del razonamiento y la lógica a través de la resolución de problemas en educación secundaria.
La resolución de problemas, que no de ejercicios, es uno de los pilares básicos de la matemática. En su proceso de formación, los alumnos deben aprender a resolver problemas para comprender y aplicar sus conocimientos, potenciar su creatividad, su capacidad de análisis, su razonamiento, …

En este taller os mostraremos dos propuestas para trabajar la geometría con la resolución de problemas. En la primera se estudiarán áreas, perímetros, simetrías, paridad, recuento de opciones,… En la segunda se propone trabajar mediatrices de un segmento, bisectrices de un ángulo, y los ejes de simetría de una figura.
Si os habéis preguntado alguna vez de cuántas formas se puede dividir un triángulo equilátero en 4 partes iguales, o cómo conseguir recortar este mismo triángulo en un solo corte, este es el taller que estabais buscando!

1. Introducción

Paul Lockhard, en su artículo "Lamento de un matemático" da algunas pistas sobre cómo mantener la motivación de los alumnos en el aula de matemáticas:

"Las matemáticas son el arte de la explicación. Si privas a los alumnos de tener la oportunidad de participar en esta actividad – de proponer problemas, de hacer sus propias conjeturas y

ISBN 978-84-945722-3-4

descubrimientos, de equivocarse, de estar creativamente frustrados, de tener una inspiración y de improvisar sus propias explicaciones y demostraciones – los estás privando de las matemáticas en sí mismas.”

Debemos pues, huir de esa materia que se dedica a aplicar antiguas recetas disfrazadas con algoritmos de cálculo que ocultan la verdadera belleza de las matemáticas.

Nos planteamos en este taller presentar actividades didácticas con problemas que ayuden al alumno a desarrollar su intuición. No buscamos con estos problemas una respuesta inmediata, sino que el problema obligue al alumno a tomar decisiones, a reflexionar y a diseñar sus propias estrategias. Para conseguirlo, planteamos problemas alejándolos de ejercicios mecánicos que sólo implican la aplicación de un algoritmo o de una fórmula. Queremos implicar a los alumnos en la investigación, en la búsqueda de la solución, de forma que en cada problema tiene que haber un descubrimiento por parte del alumno.

2. Base de la metodología propuesta

El documento “Competencias básicas en el ámbito matemático” difundido por el Departament d’Ensenyament de Cataluña nos sugiere que para trabajar las matemátias en el aula “el profesor debe provocar la curiosidad y proponer retos, dando suficiente tiempo para pensar y reflexionar. […] Esto se emplaza en un ambiente que favorezca el intercambio de ideas y que anime a la reflexión. […] La aceptación que todos pueden hacer contribuciones interesantes, […] Ayudarà a crear una cultura de clase más basada en hacerse preguntas que en buscar respuestas inmediatas.”

Los retos de los que habla el documento se proponen como pequeños problemas a superar por el alumno, problemas que tienen por finalidad despertar la creatividad y el razonamiento del alumno, a la par que descubrir una teoría matemática que rubrica y refuerza la base matemática del alumno para futuros problemas.

Para resolver los problemas Pólya (1945) detalla los cuatro pasos clave que tiene que seguir el alumno, a saber: “Understanding the problem”, “Devising the plan”, “Carrying out the plan” i “Looking back”. La propuesta de método de resolución de problemas que proponemos, se acerca a la de Pólya(1945) y se basa en los siguientes puntos:

ISBN 978-84-945722-3-4

Observación – primeros intentos: una vez entendido el problema, el alumno realiza distintas pruebas, de las que observa su comportamiento y busca relaciones entre los distintos resultados obtenidos.

Acercamiento – se formulan hipótesis y se experimenta con estas para intentar encontrar resultados que nos acerquen a la solución buscada.

Discusión – Una vez encontrada esta, cabe debatir en grupo los resultados encontrados, los alumnos serán los encargados de validar o no la solución del problema.

Documentación y ampliación – Una vez discutido y resuelto, el alumno debe ordenar sus pensamientos sobre el proceso seguido y los conceptos relacionados involucrados, haciéndose nuevas preguntas sobre el problema, generalizando los resultados, aplicándolo a situaciones análogas, …

3. El taller "Recorta el cuadrado"

El taller se plantea con la finalidad de practicar la resolución de problemas y dar al profesorado ideas, estrategias y pasos a seguir. Para ello dividiremos el taller en dos partes en las que se trabajarán dos tipos de problemas.

En la primera parte del taller se propone la división de figuras en partes iguales. En esta parte se analizarán básicamente problemas de recuento de opciones (atendiendo claro está a las simetrías y las rotaciones de la solución), y se trabajarán los conceptos de área y perímetro de la figura. En la segunda parte del taller se intentarán recortar figuras geométricas con un solo corte, y con ellas, se trabajarán los conceptos de ejes de simetría, bisectrices y mediatrices.

Los participantes al taller compartirán sus estrategias de resolución y los puntos clave que les han ayudado a encontrar la solución. Todas los "descubrimientos" se debatirán y analizarán en gran grupo y serán los mismos alumnos quienes los validarán.

Se añade en los Anexos a este trabajo distintos ejemplos de los ejercicios propuesto en el taller y sus soluciones.

a. Primera parte del Taller: División de figuras en partes iguales

ISBN 978-84-945722-3-4

La primera parte del taller contiene ejercicios para trabajar la división de una figura en partes iguales (en figuras que se asemejen en área y forma).

En este caso no trabajamos directamente el área, sino que nos proponemos analizar de cuántas formas se puede cortar una figura (sencilla) en n partes iguales. Para simplificar los ejercicios, se supondrá que la figura es poligonal y está sobre una retícula cuadrada. Con esto, exigiremos que la división de la figura inicial deba hacerse siguiendo la cuadrícula dada.

Analicemos algunos ejemplos :

Ejercicio 1: Dividir un cuadrado 4x4 en dos partes iguales (siguiendo la cuadrícula).

Parece sencillo, verdad? Una vez los alumnos han encontrado sus soluciones, debemos comentar a nivel de grupo las soluciones encontradas y debatir su validez. También cabe debatir si dos soluciones simétricas son o no la misma solución. Una vez hecho los alumnos deben apuntar las estrategias seguidas y los puntos clave que les han ayudado a resolver el ejercicio.

Si ahora nos preguntamos de cuántas formas podemos dividir el cuadrado siguiendo la retícula, ampliamos el ejercicio anterior y generalizamos un poco los resultados encontrados. En este caso encontramos 6 formas distintas de dividirlo (exceptuando rotaciones y simetrías).

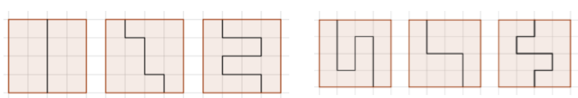

Imagen 1: Soluciones del ejercicio 1.

Una vez encontradas todas las soluciones, debemos cerciorarnos que no hay más. Para ello comentamos las soluciones, buscamos puntos en común de todas las soluciones: Misma área, distinto perímetro, igual perímetro exterior ¿por qué?, todas las divisiones pasan por el mismo punto central, existe una simetría central entre las dos piezas, ...

No debemos preocuparnos si no sale todo en una primera puesta en común, ya irán apareciendo a medida que avancemos con los ejercicios. Lo que sí es importante es buscar un método para encontrar las soluciones de forma ordenada.

Una vez hecho, cabe preguntarse cómo podríamos ampliar el ejercicio, cuántas formas habría si queremos dividir en dos partes iguales un cuadrado 2x2, 3x3, 5x5, 6x6, .., hay que tener

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

en cuenta, pero, que a medida que aumentamos la dimensión aumenta exponencialmente la dificultad.

Ejercicio 2: Dividid en dos partes iguales el rectángulo 3x4 (siguiendo la retícula). De cuántas formas distintas se puede dividir?

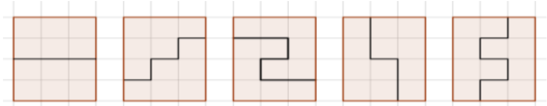

Imagen 2: Soluciones del ejercicio 2.

Para ampliar este ejercicio, nos podríamos preguntar sobre las diferencias de las soluciones variando la dimensión, o qué pasa con el rectángulo 3x5 (no se puede, puesto que el área es impar, pero, ¿y si quitamos un cuadrado, se podrá? ¿Importará el cuadrado eliminado? Si no quitamos el cuadrado, ¿en cuántas particiones iguales lo podríamos dividir?

Ejercicio 3: Dividid en cuatro partes iguales un cuadrado 4x4 (siguiendo la retícula).

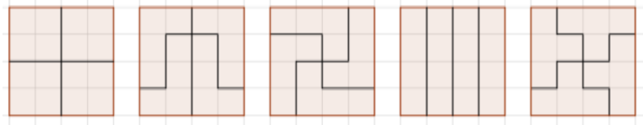

Imagen 3: Solución del ejercicio 3

En este caso, las áreas se mantienen iguales a 4 cuadrados (4x4:4=4), los perímetros varían ¡son iguales a excepción del primero! Se observan ejes de simetría axial o central. También podemos darnos cuenta de que todas las piezas usadas son tetraminós (nos damos cuenta, además, que la figura z de los tetraminós no está usada, puesto que con ella no podemos crear ningún cuadrado).
Si ya tenemos detectado que las figuras que van a aparecer serán tetraminós, y la figura tendrá que ser creada exactamente con 4 tetraminós, podemos manipular los tetraminós y convertir el problema en algo más manipulativo, tanteando así las soluciones.
El ejercicio se puede complicar variando la medida de la figura a recortar o variando el número de cortes, aunque en este caso estaríamos trabajando la divisibilidad. También se

ISBN 978-84-945722-3-4

puede exigir que las particiones cumplan con alguna restricción que queramos imponer del inicio. Veamos el siguiente ejercicio:

Ejercicio 4: Los puntos que se ven en la retícula representan dos puntos de luz. Queremos dividir el terreno rectangular 5x4 en dos partes iguales con un punto de luz cada una.

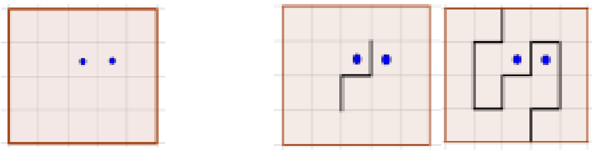

Imagen 4: Ejercicio 4 y el único detalle en común de las 13 soluciones, junto con una solución.

Se puede ampliar el ejercicio añadiendo nuevas restricciones, de forma que hagan única la solución del ejercicio (por ejemplo podríamos poner puntos de agua en cada parcela).

Otro dato que podríamos modificar para ampliar la visión del ejercicio es exigir que las figuras tengan igual área, pero que su forma sea distinta. En este caso trabajaríamos con piezas distintas de n-minós (triminós, tetraminós, pentaminós, …) según sea la figura inicial y los cortes que queramos obtener.

Para terminar, proponemos el siguiente ejercicio a modo de ejemplo de la propuesta realizada en el párrafo anterior:

Ejercicio 5: Dividid en doce partes iguales el rectángulo 6x10 (siguiendo la cuadrícula) de forma que las distintas piezas sean de igual área, pero no haya dos de iguales.

Analizando el enunciado vemos que tendremos que usar las 12 piezas del pentaminó para formar un rectángulo 6x10. Se sugiere usar pentaminós y buscar la solución de forma manipulativa.

b. Segunda parte del taller: Construcción de figuras con un solo corte

Si mostramos un folio del que queremos recortar un cuadrado de la parte central, seguramente lo recortaríamos con un corte central para luego recortar los cuatro lados del cuadrado, y así lo habríamos recortado con 4 cortes.

¿Cómo podríamos recortarlo con sólo 3 cortes rectilíneos? ¿Y con dos? ¿Y con un solo corte?

ISBN 978-84-945722-3-4

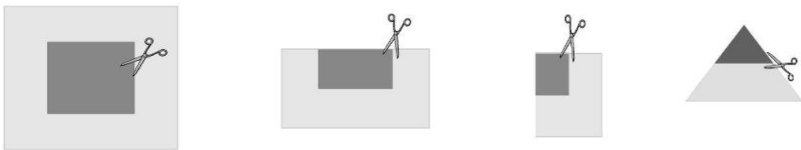

Imagen 5: Pasos para recortar un cuadrado en 4, 3, 2 o 1 cortes.

Aquí comienza la aventura.

Existe un teorema curioso, *fold-and-cut theorem*, o el teorema de doblar y cortar, que asegura que cualquier figura con lados rectos se puede obtener con un solo corte recto. Nos referimos a polígonos cóncavos, convexos, formas con agujeros, y hasta a figuras formadas por dos polígonos disjuntos. En total, un sinfín de posibles figuras que se pueden obtener con un solo corte rectilíneo. El enunciado es, cuanto menos, sorprendente. A partir de aquí proponemos unos cuantos retos para conseguir con un solo corte que podremos proponer en el aula con nuestros alumnos de secundaria y nos permitirán trabajar aspectos relacionados con simetría, bisectrices, mediatrices, …

A partir de lo que hemos experimentado con el cuadrado, podemos pasar a conseguir, de un solo corte, un octógono regular. Después avanzaremos a los distintos polígonos regulares, observando las diferencias entre los que tienen un número de lados par de los que no.

Para llegar un poco más lejos, proponemos realizar, de un solo corte, estrellas de distinto número de puntos.

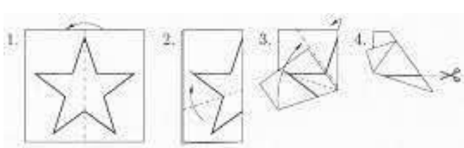

Imagen 6: Pasos para recortar una estrella con un solo corte.

Podemos optar por seguir un recorrido más artístico o intentar hacernos preguntas de tipo más matemático, para ello iremos eligiendo los retos en uno u otro sentido.

Si queremos estudiar los pliegues mínimos, partiremos de figuras dibujadas previamente en el papel: cuadriláteros de todo tipo, triángulos equiláteros, isósceles y escalenos, y polígonos independientes.

ISBN 978-84-945722-3-4

Analizando las soluciones encontradas nos será más fácil resolver los nuevos retos propuestos.

Referencias bibliográficas

Jareño, Joan (2015). D'un sol tall (1) i (2). Blog del Calaix
http://calaix2.blogspot.com.es/search?q=retallar Consultado 05/05/2017

Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament (2017) *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*.
http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/eso/eso-matematic.pdf Consultado 25/05/17

Grupo Alquerque (2008). Kirigami geométrico. Revista SUMA, 59

Lockhard, P. (2008) Lamento de un matemático. La Gaceta de la RSME, 11.4, 739-766

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Centro de publicaciones del MEC. Ed. Labor.

Morera, L. (2012) Problemas ricos en argumentación para secundaria: reflexiones sobre el pensamiento del alumnado y la gestión del profesor. Revista SUMA, 70, 9-20

Pólya, G. (1990). *How to solve it. A new aspect of mathematical method.* London: Penguin books.

ISBN 978-84-945722-3-4