LA IMPLICACIÓN LÓGICA EN EL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA: ESTUDIO DE UN CASO

Alvarado Monroy, Angelina[1] **y González Astudillo, M.ª Teresa**[2]
[1] Escuela de Matemáticas. Universidad Juárez del Estado de Durango. México
[2] Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales. Universidad de Salamanca
aalvarado@usal.es
maite@usal.es

Resumen. Diversas investigaciones han dado cuenta de las dificultades que tienen los estudiantes en torno a la demostración matemática. En este artículo se analiza la actuación de una estudiante de nuevo ingreso de una licenciatura en matemáticas que formó parte de un estudio exploratorio en el que se trataba de estudiar las producciones de los alumnos en torno a este tema. A partir de un problema inicial, que fue posteriormente modificado, se analizan sus respuestas con el fin de aproximarnos a su desempeño y avance. Para describir y analizar las respuestas de esta alumna, se han utilizado como herramienta de análisis los esquemas de Toulmin.

Palabras clave. Demostración, implicación lógica, estudio de caso.

The Logical Implication in the Process of Mathematical Proof: A Case Study

Summary. Several research studies in mathematics education have reported the difficulties that the students have with mathematical proof. In this paper, the productions of Nancy, a student beginning undergraduate courses in mathematics are analyzed. She formed part of an exploratory study on students' productions about this. From an initial problem that was later modified, their answers were analyzed for the purpose of approximating their performance and advances. In order to describe and to analyze this student's answers, Toulmin's schemes have been used as an analysis tool.

Keywords. Proof, logic, case study.

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas muchos investigadores en Educación Matemática se han interesado en los procesos cognitivos que intervienen en la demostración, así como en las dificultades que tienen los estudiantes (Tall, 1991). Esta cuestión ha motivado tesis doctorales (Moore, 1990; Goetting, 1995; Ibañes, 2001; Pedemonte, 2002), investigaciones y diversas contribuciones que nos hablan de la compleja y difícil transición hacia el pensamiento deductivo. Inicialmente revisaremos algunas investigaciones previas que nos van a dar la clave sobre las dificultades a las que se enfrentan los alumnos cuando tienen que realizar una demostración para posteriormente sacar a la luz algunas de esas dificultades y poder realizar una descripción detallada de algunos de los elementos que utilizan en su razonamiento.

1.1. La noción de demostración

Generalmente, los estudiantes suelen tener muchas dificultades para reconocer una demostración matemática. Para algunos, una demostración es válida en función de su apariencia, es decir, si tiene un formato tradicional como el de las pruebas de dos columnas utilizadas en la educación secundaria para la enseñanza de la geometría (Harel y Sowder, 1998); otros juzgan los argumentos matemáticos según ciertos aspectos empíricos en lugar de utilizar criterios lógicos (Finlow-Bates, Lerman y Morgan, 1993). Además, se suelen centrar más en el *significado* de la proposición, mientras que les resulta más difícil fijarse en los aspectos relativos al *estado* (hipótesis, conclusión, etc.). Como consecuencia, consideran muchas proposiciones matemáticas triviales porque las juzgan en términos de su valor epistémico (grado de verdad) en lugar de juzgarlas por su valor lógico (Harel, 2006).

Para Dreyfus (1999) la dificultad que tienen los alumnos para comprender la noción de demostración e identificarla reside en que, en los libros de texto, ciertos argumentos más o menos formales se suelen acompañar de algunas justificaciones visuales o intuitivas, de ejemplos genéricos o inducciones ingenuas que invitan al estudiante a considerar estas formas de exposición como una demostración. Incluso, algunos argumentos formales con frecuencia sólo lo son en apariencia, y como señalan Ibañes y Ortega (2004) en esos mismos libros hay una ausencia de intencionalidad didáctica en torno a la demostración. Raras veces se da a los estudiantes alguna indicación acerca de si en las matemáticas se distinguen diferentes formas de argumentación y si son todas igualmente aceptables. Dado que los libros de texto constituyen un recurso importante en la formación de los estudiantes, su comportamiento matemático se va a ir construyendo bajo esta influencia, lo que no va a permitir que los estudiantes distingan entre lo que es una explicación de lo que se considera una demostración.

Además, en un aula, entre el profesor y los estudiantes se constituyen de manera interactiva aunque no explícita ciertas *normas sociomatemáticas* (Yackel y Cobb, 1996, p. 461) que determinan la actividad que se realiza diariamente y, en concreto, las que regulan la argumentación matemática de aquí surgen, por ejemplo, las creencias que tienen los alumnos acerca de cuándo una explicación matemática se puede considerar aceptable o qué se entiende por justificación. Otro de estos acuerdos se refiere a la construcción de un aparato lógico y lingüístico suficiente para abordar los problemas matemáticos, así como a los elementos (visuales, analíticos, cálculos, ejemplos, relación entre respuesta y cálculo, analogías, reglas de inferencia, tablas de verdad, técnicas, aproximación intuitiva, estructuras, definiciones dadas y proposiciones demostradas, propiedades, manejo conceptual, etc.) que serán aceptados dentro de una demostración, justificación o explicación. Sin embargo, tanto los autores de libros de texto como los profesores pocas veces establecen estas normas, y sus indicaciones, a menudo, confunden más que ayudan a los estudiantes.

En lo que a claridad conceptual se refiere, usualmente los profesores de matemáticas del nivel universitario consideran que los alumnos deben ser capaces de manejar correctamente los conceptos y las definiciones así como sus propiedades. Sin embargo, en la realidad, los alumnos presentan muchas dificultades (Selden y Selden, 1995) para utilizarlos correctamente. Moore (1994), en su trabajo con estudiantes universitarios en relación con la demostración formal, determinó que algunas fuentes de las dificultades que tienen los estudiantes para realizar demostraciones son: la falta de habilidad para formular postulados, el poco entendimiento intuitivo de los conceptos involucrados en la demostración, las imágenes inadecuadas que poseen de los conceptos, y la ausencia de entrenamiento para generar y usar sus propios ejemplos (p. 251).

1.2. Verificación frente a demostración

Los ejemplos y contraejemplos juegan un rol importante al producir demostraciones; así, para algunos investigadores las justificaciones inductivas conducen al alumno por un camino de razonamiento hacia demostraciones formales. Watson y Mason (2005) establecen que el uso de ejemplos ayuda al estudiante a una posterior generalización; definen *ejemplo* como «... algo a partir de lo cual un estudiante podría generalizar» (p. 3) y el proceso de "ejemplificación" como «... cualquier situación en la cual se ofrece algo específico para representar una clase general con la cual el estudiante debe familiarizarse, un caso particular de una generalidad» (pp. 3-4). Pero los ejemplos matemáticos siempre van más allá de su propia particularidad; el proceso de generación de ejemplos es, de hecho, el anverso de la generalización y se considera que «... es la búsqueda de ejemplos y no el producto final lo que promueve el aprendizaje. Por ello, es importante que, desde el principio, los estudiantes establezcan una dinámica entre ejemplificación y generalización» (Watson y Mason, 2005 p.100). También introducen la idea de *espacios de ejemplos* como «... los ejemplos que los estudiantes producen, que provienen de un pequeño fondo de ideas y que simplemente aparecen en respuesta a tareas particulares en situaciones particulares» (p. 9). Además aclaran que «…los ejemplos, por lo general, no son aislados; más bien son percibidos como casos de una clase de ejemplos potenciales. Como tales, constituyen lo que llamamos un espacio de ejemplo. En términos de las observaciones realizadas hasta ahora, los principiantes experimentan el acceso a un espacio de ejemplos como respuesta a una situación... Los espacios de ejemplos no son solamente listas; tienen una estructura interna, idiosincrática... y es por esta estructura por la que los ejemplos se producen. Su contenido y estructuras son individuales y circunstanciales; a los espacios estructurados de modo similar se puede acceder de diferentes formas» (p. 51).

Muchos estudiantes se enfrentan a las demostraciones como si se trataran de simples verificaciones, por lo que se limitan a comprobarlas usando ejemplos concretos. Esta actitud puede ser debida a los nuevos diseños de planes de estudios (Hoyles, 1997) que intentan remediar algunos de los problemas usuales en la enseñanza de las matemáticas haciéndola más cercana a los alumnos, pero son deficientes en otros aspectos como el relativo a la demostración, puesto que esto supone un mayor grado de abstracción; así, aun cuando pueda parecer que los estudiantes entienden una prueba de una proposición matemática, siguen sintiendo la necesidad de una verificación (Fishbein y Kedem, 1982 y Vinner, 1983). Al respecto, Healy y Hoyles (2000) sostienen que los alumnos necesitan realizar ensayos de verificación –después de la demostración– porque la demostración no les convence. Mas allá del hecho de que una prueba formal confiere validez general a un enunciado matemático, para confirmar esa validez son necesarios controles posteriores (Fischbein, 1982). Para Mariotti (1998) la discrepancia entre la verificación empírica, típica del comportamiento ordinario, y el razonamiento deductivo, típico del comportamiento teórico, es una fuente de dificultades, un obstáculo para la comprensión del significado de la prueba. En la práctica educativa, es común confundir esos dos puntos de vista y, como consecuencia, desorientar a los estudiantes quienes ven que los «ejemplos» juegan un rol fundamental a la hora de establecer axiomas y «descubrir» teoremas, pero que están prohibidos cuando se les pide que prueben un enunciado: uno o unos cuantos ejemplos no son aceptables como «prueba».

Muchos estudiantes creen que mostrar que un teorema general es válido con un ejemplo específico, o quizás con varios ejemplos, es suficiente como demostración (Weber, 2001). Los profesores con sus actuaciones refuerzan esta idea al omitir las pruebas de los teoremas y, en su lugar, ofrecer ejemplos a modo de justificación (Harel y Sowder, 1998 y Goetting, 1995) y así, aun sin ser conscientes de ello, pueden estar trasmitiendo que bastan las pruebas empíricas para establecer la verdad de proposiciones matemáticas.

En relación con las conjeturas relativas a la generalización o el establecimiento de un contraejemplo, si las pruebas se realizan a partir de datos concretos las estrategias que utilizan los estudiantes son principalmente empíricas (Coe y Ruthven, 1994), sustituyendo el argumento deductivo por una comprobación suficientemente diversa de casos. En cambio, en torno a los contraejemplos, una dificultad evidente en los estudiantes es el hecho de que, mientras que un gran número de ejemplos no logra demostrar una proposición, un solo ejemplo puede invalidar un teorema. En los estudios que realizó Wason (1966), observó que los sujetos mostraban el sesgo de la confirmación, es decir, el principal error que tienen los estudiantes es que intentan encontrar una evidencia que confirme la regla en lugar de buscar una evidencia que la falsee. Por otra parte, en los estudios realizados por Lehrer y Romberg (1999), la dificultad para encontrar un contraejemplo es tomada por los alumnos como una verificación de la proposición.

1.3. Ausencia de conocimientos

Otro de los aspectos que se han reflejado en diversas investigaciones y que es causa de los problemas que tienen los alumnos en torno a la demostración es que muestran un aparato lógico y lingüístico deficiente. Por ejemplo, en relación con el tratamiento de implicaciones y los errores lógicos que cometen los alumnos, Wason (1966) mostró que la mayoría usa en las demostraciones el *modus ponens* (de $p \rightarrow q$ y p podemos deducir q), muy pocos utilizan el *modus tollens* (de $p \rightarrow q$ y $\neg q$ deducimos $\neg p$), y gran parte de ellos cometen errores de afirmación del consecuente y negación del antecedente. Para dar una explicación de por qué los alumnos cometen estos errores, Epp (2003) sugiere que puede ser la diferencia existente entre el lenguaje cotidiano y el matemático, así como la interpretación que tienen las proposiciones en el ámbito exclusivamente matemático; así, por ejemplo, menciona: «el error de la recíproca» (de si p entonces q y q, deducen p), la dificultad para aceptar que p sólo si q es lógicamente equivalente a si p entonces q, la dificultad en la interpretación de proposiciones cuantificadas, los errores al tratar de negar afirmaciones del tipo *si-entonces*. El lenguaje cotidiano contiene muchas y diferentes variedades de enunciados *si-entonces* distintas de las estrictamente matemáticas, como las que se refieren a relaciones causales, relaciones temporales, situaciones falsas, etc., lo que da lugar a algunas de las dificultades que tienen los alumnos. Cuando los alumnos trabajan en un ambiente matemático formal, las maneras informales de expresar las negaciones de enunciados que contienen «y» y «o» también pueden engañarlos. Así, Dorier y otros (2000), después de varios diagnósticos realizados entre 1987 y 1994 para determinar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del Álgebra Lineal, concluyen que la ausencia de conocimientos previos en lógica y teoría elemental de conjuntos contribuye a los errores que cometen los alumnos en Álgebra Lineal. Entre las dificultades observadas en los alumnos también mencionan el mal uso de las implicaciones matemáticas por la confusión entre hipótesis y conclusión que también fue detectada en un estudio posterior por Ibañes y Ortega (2002).

Otra fuente de dificultades reside en que la instrucción habitual en matemáticas no ofrece oportunidades para que los alumnos se expresen verbalmente, por lo que muestran importantes deficiencias al intentar exponer verbalmente una idea o al plasmar por escrito una demostración. Además, en general han sido instruidos para exponer sus razonamientos de manera concisa, lo que les conduce a dar sólo una versión abreviada de sus ideas. Aunque hay una tendencia mundial que recomienda incluir en la instrucción actividades para habilitar y animar a los estudiantes de matemáticas de todos los niveles a plasmar las explicaciones correspondientes a sus respuestas, en realidad esto sólo se realiza en contadas ocasiones. Así, muchos estudiantes llegan a la universidad sin haber escrito nunca una oración completa en un curso de matemáticas. En este sentido, para Dreyfus (1999) dar un argumento o una explicación es una empresa muy difícil, porque los alumnos, cuando acceden al nivel universitario, carecen de la claridad conceptual necesaria para usar los conceptos relevantes en un argumento matemático, y, además, han tenido pocas oportunidades de aprender las características de una explicación matemática. Incluso las pruebas más triviales son grandes desafíos para los estudiantes de matemáticas superiores que no sólo tienen dificultades para producirlas, sino también para reconocerlas como demostraciones (Moore, 1994; Ibañes y Ortega, 2002).

Para Thompson (1996) y Goetting (1995) las pruebas más difíciles, incluso para estudiantes de los cursos avanzados de matemáticas, son la prueba por contradicción y la prueba por contraposición, porque gran parte del tiempo se está trabajando con afirmaciones que son falsas, y si no se está atento a la situación, esto puede provocar una gran confusión de ideas. Por su parte, Weber (2001) señala que las dificultades de los estudiantes universitarios con la demostración se deben a la ausencia de *conocimiento estratégico,* es decir, conocimiento de técnicas de demostración, de cómo elegir los hechos y los teoremas que se deben aplicar o de cuándo utilizar o no un conocimiento sintáctico (como opuesto a conocimiento conceptual o semántico) basado exclusivamente en la manipulación simbólica y el uso de procedimientos matemáticos.

2. DESCRIPCIÓN DE ESTA CONTRIBUCIÓN

Este artículo se deriva de un estudio exploratorio realizado con tres grupos de alumnos de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Juárez del Estado de Durango (México). El objetivo principal del estudio fue realizar un análisis de las creencias, concepciones y obstáculos de los estudiantes en relación con la demostración. Los datos se obtuvieron a través de los exámenes finales y de los cuadernos de clase de los alumnos. Además, se llevaron a cabo entrevistas semiestructuradas en las que los alumnos debían reflexionar acerca de la solución dada a los ejercicios propuestos con el fin de que, posteriormente, pudiéramos describir su actuación en torno a la demostración matemática. En las respuestas de los alumnos se detectaron inconsistencias como: falacias provenientes de falsas simetrías, manejo indistinto de implicación y su recíproco o de $p \rightarrow q$ y $\neg p \rightarrow \neg q$, además de que para muchos de los estudiantes un solo ejemplo bastaba para determinar la verdad o falsedad de una proposición. Se encontraron también dificultades relativas al uso de definiciones, imprecisión del lenguaje o en la utilización de las tablas de verdad para establecer la equivalencia lógica ya que, aun cuando presentaban un buen manejo de ellas, confiaban más en ejemplos particulares.

Aunque el estudio exploratorio se lleva a cabo en tres grupos, en este artículo nos centramos únicamente en uno: concretamente, se describe y se analiza la actuación de una alumna, Nancy, en torno a un problema planteado a su grupo durante un examen que posteriormente fue objeto de dos entrevistas. En el análisis realizado nos apoyamos en los esquemas propuestos por Toulmin (1958) que se describen a continuación.

2.1. Análisis de datos

El modelo de Toulmin (1958) establece las reglas que se precisan en cualquier disciplina o espacio abierto a la discusión para construir una argumentación. Toulmin crea este modelo en el marco de los discursos sociales, para lo cual considera que un *argumento* es una estructura compleja de datos organizados en un proceso que parte de una evidencia o de ciertos datos y llega al establecimiento de una proposición. El proceso de la evidencia a la proposición debe contener ciertos elementos necesarios que nos van a permitir decidir si la línea argumental resulta convincente. Vamos a utilizar este modelo para analizar y documentar los progresos de los estudiantes al enfrentarse a un problema relacionado con la demostración matemática. El modelo de Toulmin para el análisis de argumentos considera seis componentes básicas o categorías, cada una de las cuales juega un papel diferente en el argumento. Los *datos o bases* (*B*) son los fundamentos sobre los cuales descansa el argumento. La *proposición o pretensión* (*P*) es el enunciado del que el argumentador desea convencer a su audiencia. *La garantía o justificación* (*J*) establece la conexión entre los datos y la conclusión, por ejemplo, mencionar una regla, una definición o utilizar una analogía. Tres categorías más entran en juego en este modelo: el *respaldo* (*R*) que sirve de sostén a la garantía y su función es la de presentar una mayor evidencia; el *cualificador modal* (*C*) que es un enunciado que indica el grado de fuerza o de probabilidad de la proposición o aserción; y por último, la *objeción o posibles refutaciones* (*O*) que es una excepción potencial para la proposición o conclusión, es decir, nos habla de las posibles reservas que se pueden formular y señalan las circunstancias en que las justificaciones no son ciertas. En resumen, el modelo funciona de la siguiente manera: a partir de cierta base, se formula una proposición. La garantía o justificación conecta los datos con la proposición, el respaldo ofrece un cimiento teórico y el cualificador modal indica el modo en el que se interpreta la proposición como verdadera, contingente o probable. Finalmente, se presentan sus posibles objeciones. Cabe mencionar que este modelo es aplicable a todo tipo de argumentaciones y en particular a esquemas de prueba tanto intuitivos y transformacionales como axiomáticos. En este sentido, Inglis y otros (2007) analizan diferentes argumentaciones matemáticas que incluyen razonamiento informal y formal. En suma, el modelo de Toulmin se ha utilizado en diversas investigaciones para:

1) Analizar y documentar los progresos del aprendizaje en el aula: Yackel (2001), Yackel y Rasmussen (2002), Krummheuer (1995).

2) Crear un contexto que permita utilizar la argumentación en el aula: Sardà y Sanmartí (2000).

3) Comparar y analizar desde un punto de vista cognitivo diferentes estructuras relativas a la argumentación y la demostración: Pedemonte (2005, 2007).

4) Producir textos argumentativos y crear ensayos y artículos de investigación en educación: Rodríguez (2004).

5) Para analizar los distintos tipos de persuasión en la evaluación de argumentos en matemáticas por parte de estudiantes y matemáticos, destacando el papel del cualificador modal y las objeciones: Inglis y Mejía-Ramos (2005), Inglis y otros (2007).

Nosotros lo utilizaremos para analizar el comportamiento y las dificultades que afronta una estudiante al construir una demostración; queremos estudiar los aspectos cognitivos que entran en juego durante dicha construcción y evidenciar las dificultades afrontadas por los alumnos a lo largo de los diferentes momentos de la prueba.

2.2. Nancy intentando demostrar

Cuando se inicia esta investigación, noviembre de 2006, Nancy es una alumna del primer semestre de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la UJED. Cursa las materias básicas de Cálculo Diferencial e Integral I, Geometría Analítica I, Álgebra Superior I, Lógica Matemática y las complementarias de Filosofía de las Matemáticas e Inglés. Es una alumna que muestra una gran dedicación y un buen avance académico. Este estudio tiene lugar en relación con la materia de lógica matemática.

Se realizaron tres aproximaciones para la recogida de datos: la primera con todo el grupo (14 estudiantes) y las siguientes sólo con cuatro estudiantes, entre ellos Nancy, una estudiante que en apariencia tenía un buen manejo de los contenidos de la materia de Lógica Matemática (opinión de profesores, desempeño en el aula, producciones y exámenes) y que, sin embargo, mostró algunas dificultades con la demostración manteniendo sus inconsistencias y errores a lo largo de los diferentes momentos de este estudio. Las aproximaciones mencionadas se describen a continuación y las identificaremos como primer, segundo y tercer momento.

2.2.1. Primer momento

La primera aproximación se realiza a través de un examen diseñado en coordinación con la profesora de su grupo de clase que constaba de 13 ejercicios y tenía como finalidad evaluar los contenidos estudiados hasta el momento (en el cuarto mes). En este artículo nos centramos sólo en uno de esos ejercicios[1]. Se trata de un problema que se prestaba a un simple manejo numérico y en el que, para nuestra sorpresa, predominaron soluciones basadas en la verificación de casos particulares, mientras que para otros ejercicios se utilizaron argumentos lógicos válidos.

Ejercicio 1. Primer momento

Óscar y Sofía piensan en el par de números 3 y 11. Ambos notan que la SUMA 3+11 es PAR y el PRODUCTO es IMPAR.

Óscar dice: Si la SUMA de dos números dados es PAR, su PRODUCTO es IMPAR.

Sofía dice: Si el PRODUCTO de dos números es IMPAR, su SUMA es PAR.

a) Las afirmaciones de Óscar y Sofía ¿dicen los mismo?

b) El PRODUCTO de dos números es 1271. Suponga que Sofía está en lo correcto. ¿Cuál de las siguientes opciones es correcta? Marque una de ellas.
- Puedes asegurar que la SUMA de los dos números es PAR.
- Puedes asegurar que la SUMA de los dos números es IMPAR.
- No estás seguro de que la SUMA es IMPAR o PAR hasta que conoces los números dados.

c) ¿Es la afirmación de Óscar cierta? Justifique su respuesta.

d) ¿Es la afirmación de Sofía correcta? Justifique su respuesta.

Nancy realiza la traducción de la situación de partida al lenguaje lógico (Figura 1) y, a partir de lo estudiado en su clase de lógica, asigna valores de verdad a *S, P, S→P* y a *P→S* y concluye, en la parte a) del ejercicio, que Óscar y Sofía no dicen lo mismo.

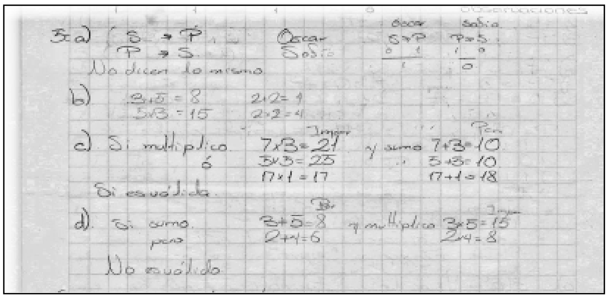
Para la parte b) ni tiene en cuenta el dato que se le da (prueba con las parejas de números (3,5) y (2,2)) ni utiliza como parte de su argumentación la afirmación de Sofía; se está centrando sólo en lo que hay que probar sin tener en cuenta las hipótesis. Su respuesta a esta parte fue incorrecta, ya que seleccionó la tercera opción: *no estás seguro de que la SUMA es IMPAR o PAR hasta que conoces los números dados*.

En la parte c), explora casos particulares con las parejas de números (7,3), (5,5) y (17,1), primero los multiplica y después los suma y falla determinando que es válida la afirmación de Óscar. En esta parte, cabe destacar que selecciona para sus casos exclusivamente parejas de números impares y el orden en que realiza las operaciones no es el esperado de acuerdo con la afirmación de Óscar (está confundiendo antecedente y consecuente).

Para el apartado d), nuevamente intenta comprobarlo con casos particulares (3,5) y (2,4) siguiendo el mismo patrón que en los incisos anteriores de realizar la verificación de las operaciones en el orden inverso al esperado, es decir, suma primero y después multiplica.

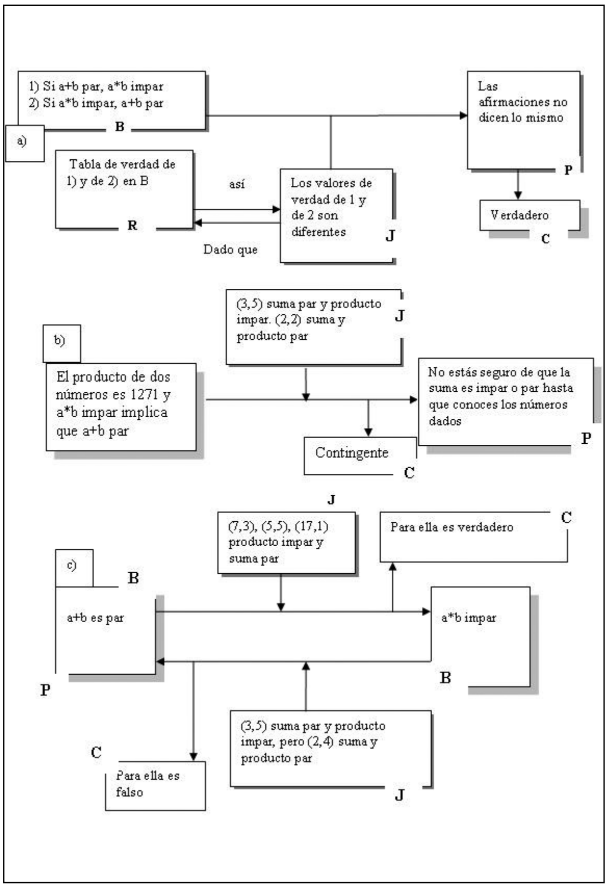
Figura 1

Actuación de Nancy en el primer momento.



Para analizar las respuestas de Nancy, utilizamos el esquema de la figura 2 en el cual se muestra cómo a partir de los datos presentes en la base o hipótesis ***B*** se llega al enunciado ***P***, utilizando las argumentaciones que aparecen en la justificación ***J***, que a su vez se sostiene en un respaldo ***R***. Finalmente, aparece un cualificador modal ***C***, que nos indica el grado de fuerza o convencimiento que muestra Nancy al indicar si el resultado es o no cierto. En primer lugar, se presenta la respuesta dada al ítem a), a continuación la del ítem b) y, en último lugar, como d) es recíproco de c), se utiliza un único gráfico intercambiando ***B*** y ***P***, indicándose esta circunstancia mediante el cambio de sentido de las flechas.

Figura 2
Análisis del primer momento.



Podemos observar que concluye con éxito que 1 y 2 son afirmaciones diferentes a través del uso de tablas de verdad. Sin embargo, esta información no la vincula con las siguientes tres cuestiones y falla en las implicaciones verificando a través de ejemplos primero consecuente y después antecedente, además de no tomar en cuenta las bases o hipótesis dadas, como se ha indicado respecto del apartado b), y como se puede ver en el d) cuando menciona que (2,4) tienen suma y producto par, parece no darse cuenta de que, en función de la hipótesis, sólo interesan las parejas con producto par.

2.2.2 Segundo momento

De los alumnos que contestaron al cuestionario se descartaron algunos porque sus respuestas eran demasiado cortas y no permitían analizar sus producciones quedando sólo siete. Entre ellos sólo cuatro mostraron interés por revisar sus respuestas participando, dos meses después, en el segundo momento de manera voluntaria, realizando otro examen en el que también se incluyó el ejercicio antes mencionado pero variándolo con la intención de que el alumno nos proporcionara más elementos acerca de su primera actuación frente al problema. El ejercicio queda con la siguiente apariencia.

Ejercicio 1: Segundo momento

1. Demuestre la verdad o falsedad de los siguientes argumentos:
   a) Si la SUMA de dos números dados es PAR, su PRODUCTO es IMPAR.
   b) Si el PRODUCTO de dos números es IMPAR, su SUMA es PAR.

La traducción de Nancy de las proposiciones anteriores al lenguaje lógico (Figura 3), correcta en el momento anterior, cambia ahora a una forma más compleja totalmente innecesaria. Podemos destacar que comprende las tablas de verdad y las utiliza correctamente, pero continúa requiriendo la confirmación mediante el uso de casos particulares y para ello utiliza las parejas (7,7), (5,3) y (4,8). Cuando comprueba con la pareja (4,8) el apartado a), después de asignar los correspondientes valores de verdad, encuentra que la conclusión es falsa, mientras que para el apartado b) comprueba que es verdadero, pero lo descarta en virtud de que el antecedente es falso, es decir, el producto de (4,8) no es impar. Así, aunque en la tabla de verdad encierra los casos en que la implicación es verdadera, en la conclusión señala que «*…son falsos si se usan números pares*». Concluye que «*si se prueba con números impares, los argumentos son verdaderos y son falsos si se usan números pares*».

Figura 3
Actuación de Nancy en el segundo momento.

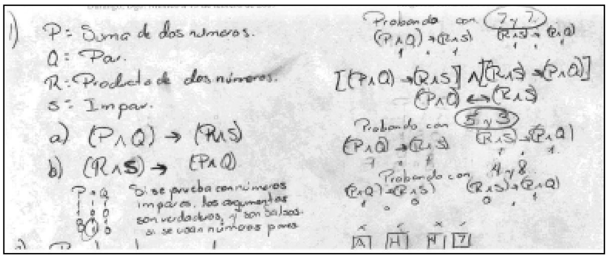
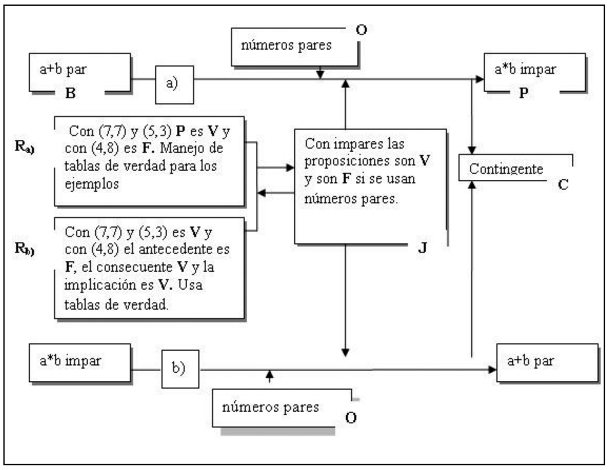


Figura 4
Análisis del segundo momento.



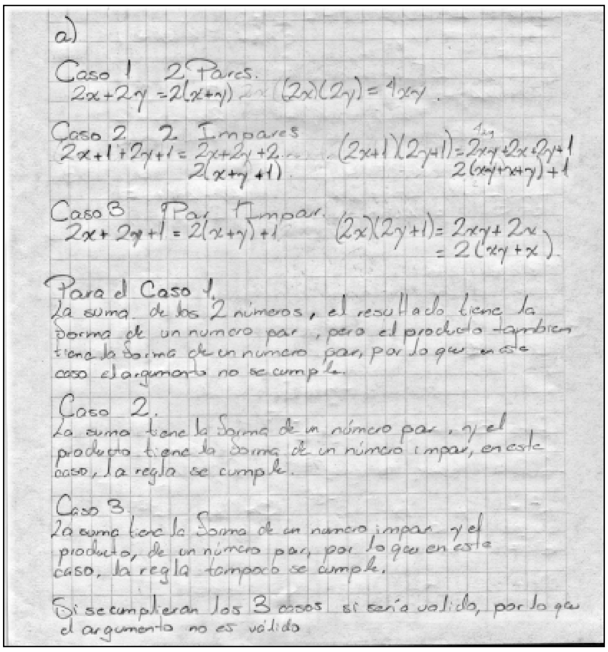
En la figura 4, además de los elementos que se incluyeron en la figura 2, entra en juego ***O*** que hace referencia a las objeciones que tiene Nancy para que sea verdadera la proposición. Se puede apreciar que en la parte a) no reconoce el papel condicional de la hipótesis y, para ella, (4,8) no es un contraejemplo que determine la falsedad del argumento. Para la parte b) la justificación es correcta, pero se sigue respaldando en casos particulares.

2.2.3. Tercer momento

Al día siguiente de la aplicación del segundo instrumento (segundo momento), se mantuvo un diálogo por separado con cada uno de los estudiantes, en particular con Nancy. En dicho diálogo se le pedía que explicara el porqué de sus respuestas en los exámenes y, así, se enfrentó progresivamente con las incoherencias de sus decisiones, lo que nos permitió entender cómo estaba procesando la solución, y el porqué de sus errores. Cuando se le pregunta por la justificación ofrecida, se remite a los ejemplos «*creo que los argumentos son falsos con números pares porque en el primero con dos pares no me da producto impar como con 2 y 2 […] y en el segundo con 4 y con 8 no cumple con lo primero que debe cumplir (producto impar)*». Cuando se le indicó que mediante un ejemplo no probaba la verdad de un argumento, señaló «*no, pero se puede hacer general con alguna de las fórmulas, en otra clase hice un programa que trataba de estas fórmulas para números pares e impares, sí...eso puedo hacer, usarlas para que sea más general, pero los pares no dan […]*». En esta fase se le dio tiempo suficiente para que justificara con más detalle la solución; en las figuras 5 y 6 se puede apreciar un cambio en el lenguaje y la técnica utilizada.

Figura 5

Parte de la actuación de Nancy en el tercer momento.

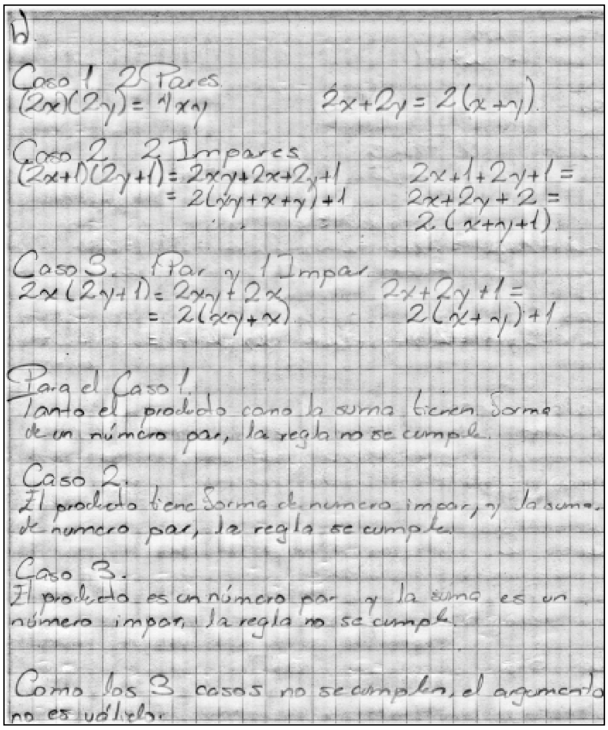


a)
Caso 1 2 Pares.
$2x+2y=2(x+y)$ $(2x)(2y)=4xy$.
Caso 2 2 Impares
$2x+1+2y+1=2x+2y+2$ $(2x+1)(2y+1)=2xy+2x+2y+1$
$2(x+y+1)$ $2(xy+x+y)+1$
Caso 3 1 Par 1 Impar.
$2x+2y+1=2(x+y)+1$ $(2x)(2y+1)=2xy+2x$
$=2(xy+x)$.
Para el Caso 1,
La suma de los 2 números, el resultado tiene la forma de un numero par, pero el producto también tiene la forma de un numero par, por lo que en este caso el argumento no se cumple.
Caso 2.
La suma tiene la forma de un número par, y el producto tiene la forma de un número impar, en este caso, la regla se cumple.
Caso 3.
La suma tiene la forma de un numero impar y el producto, de un número par, por lo que en este caso, la regla tampoco se cumple.
Si se cumplieran los 3 casos sí sería valido, por lo que el argumento no es válido

En este momento expresa sus argumentaciones mediante frases completas y con casos genéricos expresados mediante fórmulas, dejando atrás el uso de símbolos no explicados o la referencia a ejemplos particulares.

Figura 6

Parte de la actuación de Nancy en el tercer momento.



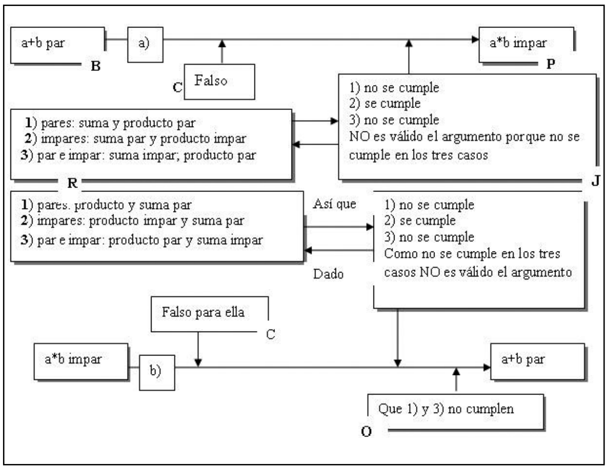
b)
Caso 1 2 Pares
$(2x)(2y)=4xy$ $2x+2y=2(x+y)$.
Caso 2 2 Impares
$(2x+1)(2y+1)=2xy+2x+2y+1$ $2x+1+2y+1=$
$=2(xy+x+y)+1$ $2x+2y+2=$
$2(x+y+1)$.
Caso 3. 1 Par y 1 Impar
$2x(2y+1)=2xy+2x$ $2x+2y+1=$
$=2(xy+x)$ $2(x+y)+1$
Para el Caso 1.
Tanto el producto como la suma tienen forma de un número par, la regla no se cumple.
Caso 2.
El producto tiene forma de numero impar, y la suma de numero par, la regla se cumple.
Caso 3.
El producto es un número par y la suma es un número impar, la regla no se cumple.
Como los 3 casos no se cumplen, el argumento no es válido.

En el apartado b), además de ciertos errores algebraicos, se puede observar que para los casos 1 y 3, Nancy no tiene en cuenta el papel condicional de la hipótesis, es decir, que tiene que partir de números cuyo producto sea impar, o bien tener en cuenta que una implicación, *P®Q,* es verdadera cuando *P* es falsa sin importar el valor de verdad de *Q*. Sin embargo, en el momento anterior había realizado una tabla de verdad de la implicación correcta, lo que nos lleva a concluir que no establece conexiones entre el razonamiento lógico utilizado para establecer la verdad de la implicación y su correspondiente tabla.

En la justificación de que no es válida la primera implicación, no reconoce que basta con que falle el caso 1 puesto que cumple ***B*** pero falla en ***P*** y, en la segunda implicación, no reconoce el papel condicional de ***B***, es decir, que es suficiente que el caso 2 sea verdadero para que la implicación resulte cierta, pues tanto en el caso 1 como en el 3 no cumple con la hipótesis ***B.*** En este tercer momento podemos apreciar que la técnica cambia de casos particulares a casos genéricos y utiliza fórmulas para nombrar, de manera general, a los números pares e impares.

Figura 7

Análisis del tercer momento.

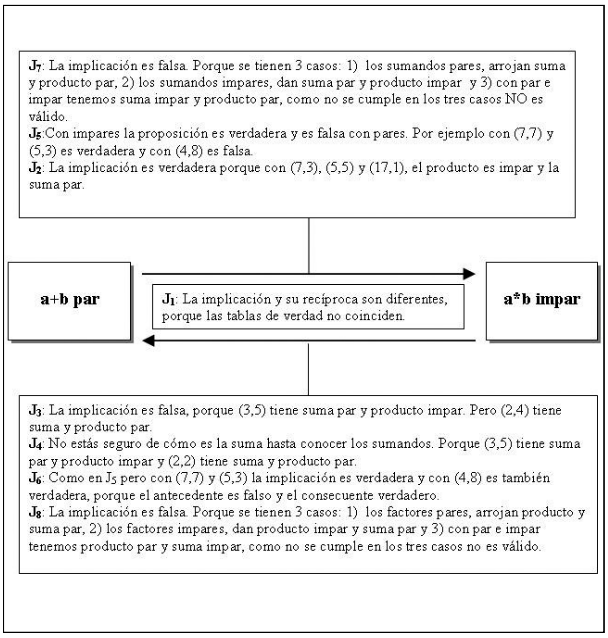


3. ANÁLISIS Y CONCLUSIONES DE LAS PRODUCCIONES

Para finalizar, en la figura 8 se resumen los tres momentos descritos anteriormente para analizar la evolución de las justificaciones utilizadas por Nancy. Las justificaciones (**J**$_1$,**J**$_2$,**J**$_3$,**J**$_4$) corresponden al primer momento, (**J**$_5$,**J**$_6$) al segundo y (**J**$_7$,**J**$_8$) al tercero. La lectura del gráfico se refiere tanto a la implicación directa (**J**$_1$,**J**$_2$,**J**$_5$,**J**$_7$) como a su recíproca (**J**$_1$,**J**$_3$,**J**$_4$,**J**$_6$,**J**$_8$).

Figura 8

Resumen de los tres momentos.



Veamos ahora qué justificaciones son correctas, cuáles no lo son, qué imprecisiones comete y, finalmente, daremos una posible explicación de la argumentación utilizada.

En **J**$_1$ la justificación es correcta y el manejo de tablas de verdad que Nancy muestra en su actuación es correcto, en particular en relación con la implicación. Esto se aprecia en el primer momento cuando tiene claro que $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$ tienen tablas de verdad diferentes y contesta correctamente el primer ítem. Sin embargo, parece que para contestar otros ítems, las tablas de verdad pierden sentido y siente la necesidad de realizar comprobaciones con casos particulares. En (**J**$_3$ **J**$_4$) las justificaciones son erróneas y el patrón que utiliza es verificar primero el consecuente y después el antecedente con casos particulares, y en **J**$_2$ además no tiene en cuenta la hipótesis de forma similar a la descrita por Hoyles y Küchemann (2002). Podemos decir que se observa en ella *la falacia de afirmación del consecuente*, es decir, si hay que demostrar que $p \rightarrow q$, se utiliza como argumento que de la verdad de q se deduce p.

Por otra parte, en (**J**$_5$, **J**$_6$) las justificaciones dadas son acertadas pero imprecisas, pues en **J**$_5$ no menciona que basta un contraejemplo, en ese caso el (4,8), para determinar la falsedad de la implicación. No hay una comprensión de que como esa afirmación se está haciendo para todos los pares de números enteros que cumplan que su suma es par, y tal afirmación es universal, un solo contraejemplo servirá para mostrar la falsedad del enunciado. En otras palabras, Nancy debería tener conocimiento de que la negación de una declaración universal es existencial. Sin embargo, para ella la existencia de un grupo de excepciones no determina la falsedad o verdad de una implicación. Otra imprecisión en **J**$_6$ es determinar la verdad de la recíproca basándose en casos particulares. Tanto en (**J**$_5$, **J**$_6$) como en **J**$_1$ las tablas de verdad cumplen un papel crucial.

En cuanto a la verificación por medio de la comprobación en casos particulares de las propiedades enunciadas, podemos destacar que, si bien en (**J**$_2$, **J**$_3$ **J**$_4$) no se pide demostrar y pueden dar una respuesta a partir de verificaciones empíricas, este tipo de justificaciones siguen apareciendo en (**J**$_5$,**J**$_6$) aunque se pida «demostrar», es decir, Nancy no es consciente de que la comprobación de las proposiciones para un número finito de casos no bastará para establecer la verdad general. Además, al igual que en otras investigaciones (Healy y Hoyles, 2000; Fishbein y Kedem, 1982 y Vinner, 1983) ya citadas en la introducción, se comprueba la ausencia del dominio del lenguaje «científico» de los alumnos relacionado con el binomio teorema-demostración, necesitan basar sus comprobaciones en su experiencia y para ello utilizan ejemplos concretos con los que puedan verificar las propiedades. Sin embargo, estas comprobaciones o ejemplos aparentemente aislados, conducen a Nancy a construir ejemplos genéricos en el segundo momento, cuando se inclina ya por pares e impares que la ayudan a una posterior generalización en el tercer momento, en el que piensa en cómo construir todos los casos posibles. Aunque no se concrete la demostración, sí es notable cómo va enriqueciendo su *espacio de ejemplos* (Watson y Mason, 2005), que presenta una estructura interna idiosincrásica que hace que surjan los ejemplos apropiados para utilizar finalmente en el tercer momento las justificaciones ($\mathbf{J}_7$, $\mathbf{J}_8$).

En relación con estas últimas justificaciones ($\mathbf{J}_7$, $\mathbf{J}_8$), se aprecia un avance significativo en el uso del lenguaje, puesto que usa el análisis por medio de casos genéricos y hay una ausencia del recurso a casos particulares. Aquí considera números pares e impares genéricos; así escribe los pares como *2x* y los impares como *2x+1*. A partir de esto, forma todas las parejas posibles considerando las combinaciones de números pares/impares para después operar en cada caso y observar los resultados. El avance percibido es quizá atribuible a que en la entrevista se le solicita que explique sus respuestas para convencer a quien la entrevista, estableciendo con esto, de manera implícita, normas sociomatemáticas (Yackel y Cobb, 1996) entre las dos partes que la conducen a incorporar nuevos elementos que resulten «convincentes».

No obstante, aunque en $\mathbf{J}_7$ da una respuesta correcta, su justificación es imprecisa, pues no tiene en cuenta que el caso 3 no interesa por no cumplir con la hipótesis de partida. Esta misma imprecisión se aprecia en $\mathbf{J}_8$ que, en este caso, además, es incorrecta. En el diagrama correspondiente podemos ver que Nancy no comprende que la afirmación se hace sobre cada par de enteros cuyo producto sea par, es decir, ignora el papel condicional de la hipótesis y su razonamiento se basa en que, al no cumplirse que el producto sea par en el caso (1,3), el argumento *Si el producto de dos números es par entonces su suma es impar* no es válido. En este caso no se está dando cuenta de que únicamente nos interesa el caso 2 que sí cumple con la hipótesis.

En cuanto a los respaldos **R** en los que Nancy sustenta las justificaciones, vale la pena mencionar que son básicamente ejemplos particulares, ejemplos genéricos y tablas de verdad. Y respecto a las objeciones **O** para que se cumplan los enunciados, sólo se utilizan durante el segundo y tercer momento siendo ejemplos genéricos: números pares en el segundo momento y productos pares en el apartado b) del tercer momento. Sin embargo, las objeciones las pone pensando en que, en el segundo momento, no se verifica en el apartado a) el consecuente y en el apartado b) el antecedente y en el tercer momento de igual manera en el apartado b) que no se verifica el antecedente. Lo anterior nos hace nuevamente pensar que no admite el papel condicional de la hipótesis, lo que viene a confirmar que una de las dificultades observadas en los alumnos es el mal uso de las implicaciones matemáticas por la confusión entre hipótesis y conclusión (Dorier et al., 2000; Ibañes y Ortega, 2002). En cuanto a esto, Harel (2006) considera que esta dificultad se debe principalmente a que los estudiantes se precipitan y se centran en el contenido y no lo distinguen del estado que pareciera trivial.

Finalmente, se puede apreciar que la lógica y la demostración se conciben de manera separada; para evitar esto, la enseñanza debería instruir acerca de la demostración como forma de validación y acerca de la utilidad del lenguaje como necesidad para desarrollar y comunicar una demostración.

NOTA

1. Este problema fue utilizado en un estudio por Hoyles y Küchemann (2002).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COE, R. y RUTHVEN, K. (1994). «Proof practices and constructs of advanced mathematics students», *British Educational Research Journal* 20(1), pp. 41–53.

DORIER, J.L., ROBERT, A., ROBINET, J. y ROGALSKY, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra, en Dorier, J.L. (ed.). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

DREYFUS, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics* 38, pp. 85-109,

EPP, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly* 110, pp. 890-899.

FINLOW-BATES, K., LERMAN, S. y MORGAN, C. (1993). «A survey of current concepts of proof held by first year mathematics students», en Hirabayashi, I., Nohda, N., Shigematsu, K. y Lin, F.L. (eds.). *Proceedings of the Seventeenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education,* University of Tsukuba, Japan, Vol. I, pp. 252-259.

FISCHBEIN, E. (1982). «Intuition and proof», *For the Learning of Mathematics* 3(2), pp. 9-24.

FISHBEIN, E. y KEDEM, I. (1982). Proof and certitude in the development of mathematical thinking, in *Proceedings of the 6th Conference of the Psychology of Mathematics Education,* A. Vermandel, ed., Antwerp, pp. 128-131.

GOETTING, M. (1995). *The College Students' Understanding of Mathematical Proof.* Doctoral dissertation. University of Maryland.

HAREL, G. (2006). Mathematics education research, its nature, and its purpose: a discussion of Lester's paper. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)***, 38**(1), pp. 58-62.

HAREL, G y SOWDER, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies, en Schoenfeld, A.H., Kaput, J. y Dubinsky, E. (eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education III,* American Mathematical Society, Providence, pp. 234-283.

HEALY, L. y HOYLES, C. (2000). A study of proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*. 31(4), pp. 396-428.

HOYLES, C. (1997). The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the Learning of Mathematics*. 17, pp. 7-16.

HOYLES, C. y KÜCHEMANN, D. (2002) Students' understading of logical implication. *Educational Studies in Mathematics,* 51(3), pp. 193-223.

IBAÑES, M. (2001). *Aspectos cognitivos de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valladolid.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (2002). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*. 21(1), pp. 49-63.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (2004). Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de Bachillerato. *Números,* 57, pp. 19-32.

INGLIS, M. y MEJÍA-RAMOS, J.P. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas. *Revista EMA: Investigación e Innovación en Educacion Matemática,* 10, pp. 327-352.

INGLIS, M., MEJÍA-RAMOS, J. P. y SIMPSON, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics,* 66, pp. 3-21.

KRUMMHEUER, G. (1995). The ethnography of argumentation, en Cobb P., Bauersfeld H. (eds.). *The emergence of mathematical meaning,* pp. 229-269. LEA Hillsdale: Nueva York.

LEHRER, R. y ROMBERG, T.A. (1999). Springboards to geometry, en Villani, V. y Mammana, C. (eds.). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*, pp. 62-71. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

MARIOTTI, M.A. (1998). La intuición y la prueba: Reflexiones sobre los aportes de Fischbein. Disponible el 5 de enero de 2009 en: <http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/981112Theme/981112ThemeES.html>.

MOORE, R.C. (1990). *College Students' Difficulties in Learning to Do Mathematical Proofs*. Doctoral dissertation. University of Georgia.

MOORE, R.C. (1994) Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics* 27(3), pp. 249-266.

PEDEMONTE, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 25(3), pp. 313-348.

PEDEMONTE, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics,* 66, pp. 23-41.

PEDEMONTE, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Thèse de doctorat. Grenoble I: Université Joseph Fourier.

RODRÍGUEZ, L.I. (2004). El modelo argumentativo de Toulmin en la escritura de artículos de investigación educativa. [En línea]. *Revista Digital Universitaria*. 31 de enero de 2004. Disponible el 18 de marzo de 2009 en <http://www.revista.unam.mx/vol.5/num1/art2/art2.htm>.

SARDÀ, A. y SANMARTÍ, N. (2000). Enseñar a argumentar científicamente: un reto de las clases de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias,* 18(3), pp. 405-422.

SELDEN, A. y SELDEN, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements, *Educational Studies in Mathematics*, 29**,** pp. 123–151.

TALL, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

THOMPSON, D.R. (1996). Learning and teaching indirect proofs. *Mathematics Teacher* 89, pp. 474-482.

TOULMIN S.E. (1958). *The use of arguments*. Cambridge: University Press.

VINNER, S. (1983). The notion of proof some aspects of students' views at the senior high level, in *Proceedings of the 7th Conference of the Psychology of Mathematics Education,* R. Hershkowitz, ed., Shoresh, Israel, pp. 289-294.

WASON, P.C. (1966). Reasoning, en Foss, B.M. (ed.). *New Horizons in Psychology I,* Penguin: Harmondswort.

WATSON, A. y MASON, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples.* Mahwah, NewJersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.

WEBER, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics* 48(1), pp. 101-119.

YACKEL, E. y COBB, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* 27(4), pp. 458-477.

YACKEL, E. (2001). Explanation, justification and argumentation. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-25,* Van den Heuvel-Panhuizen M. (ed.), 4, pp. 33-40, Utrecht.

YACKEL y RASMUSSEN (2002). Beliefs and norms in the mathematics classroom, en Toerner, G. Pehkonen, E. y Leder, G. (eds.). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* pp. 313-320. Kluwer: Dordrecht.

[Artículo recibido en septiembre de 2008 y aceptado en marzo de 2009]

The Logical Implication in the Process of Mathematical Proof: A Case Study

Alvarado Monroy, Angelina[1] **y González Astudillo, Mª Teresa**[2]
[1] Escuela de Matemáticas. Universidad Juárez del Estado de Durango. México
[2] Departmento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales. Universidad de Salamanca
aalvarado@usal.es
maite@usal.es

Summary

Several research studies in mathematics education have reported the difficulties that students have with mathematical proof. Some of these difficulties are related to the recognition of what a mathematical proof is, the way proofs are shown in textbooks where the arguments are often accompanied by visual or intuitive justifications, generic examples or naive inductions that invite the students to consider these as proofs (Dreyfus, 1999) or sociomathematical norms (Yackel & Cobb, 1996, pp. 461) that establish the mathematical argumentation that is made in the classroom and create the students' beliefs about when a mathematical explanation can be considered acceptable or what is meant by a justification.

In addition, students have many difficulties correctly handling the concepts and their definitions and properties. They do not understand the role of examples and counterexamples when developing proofs well enough. They show a weak linguistic and logical apparatus. They are not accustomed to verbally expressing ideas themselves in a context that is purely mathematical and have significant shortcomings when trying to write a proof.

In this paper, the productions of Nancy, a student beginning undergraduate courses in mathematics, are analyzed. She formed part of an exploratory study analyzing the answers to various problems for the purpose of approximating to her performance and advances. In order to describe and to analyze this students' answers Toulmin's schemes have been used as an analysis tool. In this article, we focus only on one of the exercises. This was a logical implication problem that can be answered with a simple numerical argument but, in reality, the solutions that prevailed were based on proving with particular cases.

This study was conducted in three stages: in the first the initial problem was posed, secondly, the problem was slightly changed with the aim that the student can provide further details about her first solution to the problem and finally an interview was done so that she should explain their previous answers and thus progressively she must deal with her inconsistencies and this can allow us to understand how she was solving the problem, and why she committed mistakes. For the analysis, the justifications given by Nancy, her objections, warrant and backing (Toulmin, 1958) were taken into account.

Some of her justifications were wrong because the pattern used was verifying first the consequent and then using the antecedent: *fallacy of affirming the consequent;* using particular cases only or not taking into account the role of hypothesis. Other justifications were correct but imprecise because she was unaware that a counterexample is enough to determine the falsity of an implication and she considered an implication to be true in some cases and not in others. Another imprecision was relative to the determination of the reciprocal truth value based on particular cases.

She also proved some statements in particular cases only, she was not aware that statement proving only with a finite number of cases is not enough to establish the general truth, she needed to base her findings on her experience so she used specific examples to verify the properties. Initially she used apparently isolated examples, but then she was able to depict generic examples and finally she thought about how to generate all possible cases thanks to the enrichment of her *examples space* and she could use the appropriate examples in the third stage. This trend contributes to a significant advance in the use of language because she began to use formulas or the consideration of all possible cases in a structured way. This development is perhaps attributable to the fact that during the interview she should explain her answers convincingly.

The warrant and backing used by Nancy in her justifications were basically case studies, examples and truth tables. Although she managed truth tables correctly, it seems that they no longer make sense when she must answer some items and she felt the need to check with particular cases. The objections outlined in relation to the statements truth, were examples that do not verify the antecedent and so they could not be used for proving the consequent, ie, she did not admit the conditional role of the hypothesis and this confirms one of the difficulties faced by students. Harel (2006) believes that this is mainly because students rush and focus on content that they do not distinguish from the state. Finally, logic and proof are shown to be conceived separately so that education should teach proof as a form of validation, and the usefulness of language as a necessity to develop and communicate a proof.