

LA CUARTA DIMENSIÓN: ¿GEOMETRÍA QUE NO PODEMOS VER?

Alicia Prieto Martín,

Doctora en Matemáticas,

(Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Sevilla)

I.E.S. Menéndez Tolosa, La Línea de la Concepción (Cádiz)

RESUMEN.

La geometría tridimensional nos permite entender y razonar sobre nuestro entorno cotidiano. Más aun podemos, conocer, manejar y trabajar con los distintos objetos que cada día nos encontramos, ya sean rectas, planos, esferas o poliedros.

Sin embargo, ¿es nuestro mundo realmente un espacio tridimensional? ¿Podemos sólo percibir estas tres dimensiones (alto, ancho y largo)? O contrariamente, ¿existe una cuarta dimensión con sus correspondientes objetos geométricos? Y, en este caso, ¿es la mente humana capaz de imaginarlos?

Nivel educativo: Esta comunicación va dirigida como una actividad de ampliación para alumnos de 2º de Bachillerato, a los cuales, una vez estudiada la geometría tridimensional, queremos introducirles de forma amena e incluso visual la noción de la cuarta dimensión.

Para ello, habiendo estudiado ya previamente la posición relativa de planos y rectas en el espacio, se realizaría la siguiente pregunta: ¿Cómo podrían cruzarse dos planos? El objetivo de ésta es que el alumnado concluya que resulta imposible imaginarlo visualmente y que en tal caso, sería necesaria una dimensión más.

A continuación, mostraríamos a los alumnos la siguiente obra y se procedería como se sigue:

1. INTRODUCCIÓN.



Figura 1. Les oiseaux morts – Picasso (1912).

Comencemos observando una de las obras más famosas de Pablo Picasso, e intentemos, por un instante, dar respuesta a la siguiente pregunta, ¿Qué vemos en esta obra del gran pintor malagueño?

A simple vista, la mayoría de nosotros responderíamos que vemos claramente las cabezas de dos pájaros, sus patas (unas bastante claras mientras que las otras muy esquemáticas); además de plumas por todas partes.

Para aquellos un poco más expertos en la materia, no dudarían en afirmarnos que estamos ante una obra clara del cubismo. Ellos, nos dirían que estamos ante un lienzo en el que se ha utilizado la ruptura de la perspectiva (los pájaros aparecen aplastados, cortados y deformados, los distintos objetos parecen introducirse en cierta forma unos dentro de otros) y la disolución de la tridimensionalidad para intentar ofrecernos una visión más global.

Llegados a este punto, la siguiente cuestión surge de forma lógica, ¿por qué pintó Picasso sus pájaros de esta forma?, ¿quería jugar con nosotros? Es decir, ¿pretendía hacernos dudar de qué vemos y cómo lo vemos?

Realmente, lo que pretendió Picasso en esta obra no fue más que representar la cuarta dimensión.

Y es que, más allá del cine de ciencia ficción, y de obras tan populares como la trilogía "Regreso al futuro" o "La máquina del tiempo", la existencia de la cuarta dimensión es realmente un hecho.

2. UN POCO DE HISTORIA

Algunos de los matemáticos de finales del siglo XIX, comenzaron a plantearse la posibilidad de que existiera otra dimensión más, aparte de las tres ya conocidas. Fueron muchos los intelectuales, en general, que discutieron sobre la posibilidad de que esta teoría fuera cierta.

Más numerosas aún eran las aparentes imposibilidades que la existencia de una cuarta dimensión implicaba. Preguntas como ¿qué es la cuarta dimensión?, es decir, dar una simple definición de lo que esta sería, parecía una cuestión cuanto menos, controvertida.

Para ello, pensemos en nuestras tres dimensiones espaciales, como puede verse en la siguiente imagen, éstas están escogidas de tal forma que cada una de ellas está en ángulo recto con las demás.

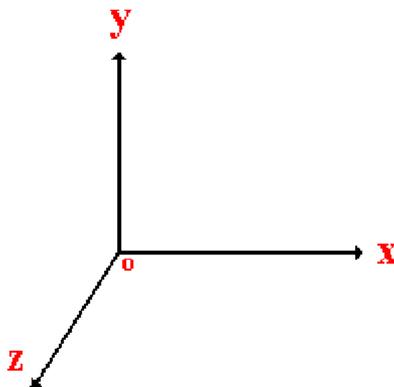


Figura 2. Espacio tridimensional.

La cuarta dimensión (entendida como dimensión espacial adicional) es por lo tanto, la dirección en el espacio con ángulo recto a las tres dimensiones observables.

Intentemos ahora ver y añadir a la imagen anterior una dirección que cumpla esta condición y nos toparemos de frente con la siguiente pregunta ¿Cómo podemos pintarla?

Aflora claramente aquí y de esta forma su particularidad con respecto a las tres conocidas anteriormente: la cuarta dimensión no podría ser percibida por el ojo humano.

3. VER LO INVISIBLE.

Llegados a este punto, aceptamos que el ojo humano no percibe más que tres dimensiones, pero, ¿significa este hecho por tanto que debemos resignarnos a no poder comprender visualmente la cuarta dimensión?

“Si queremos ver en lo invisible debemos abrir bien los ojos a su proyectiva en lo visible”

Siguiendo esta sabia reflexión, en nuestro caso, lo que debemos hacer es proyectar la cuarta dimensión en nuestro espacio tridimensional. Ahora bien, nos queda saber, la no menos ardua tarea de cómo podemos hacerlo.

Para ello, intentemos primero resolver un problema más sencillo, el cual además el ojo humano pueda percibir mejor, es decir, imaginarnos como sería un mundo bidimensional en el que aparecen objetos de tres dimensiones.

3.1. FLATLAND “PLANILANDIA”. EDWIN ABBOT (1884).

Dejando un poco de lado la crítica social y espiritual que este clérigo británico de finales del siglo XIX pretende tratar en esta obra (además de la controversia geométrica), analicemos el entorno en el que esta versa y sus correspondientes objetos geométricos.

Esta novela se imagina justo el problema más sencillo mencionado anteriormente. Planilandia, es un mundo de dos dimensiones que está habitado por figuras geométricas planas, es decir, líneas, círculos, cuadrados y poliedros.

La vida, en este mundo plano transcurre con normalidad hasta que un buen día, un ser de una dimensión superior, es decir 3, se le ocurre visitar dicho planeta. En concreto, dicho ser es una esfera, pero ¿qué es lo que verán los habitantes de Planilandia? En este caso, nuestro ojo humano es capaz de dar la respuesta.

Estos seres son por supuesto incapaces de ver la esfera en su totalidad (¡Claro! ¡Les falta una dimensión para poder hacerlo!). Ellos, tan sólo ven círculos que se van ensanchando y encogiendo, es decir, las secciones de la esfera a medida que ésta va atravesando el plano.

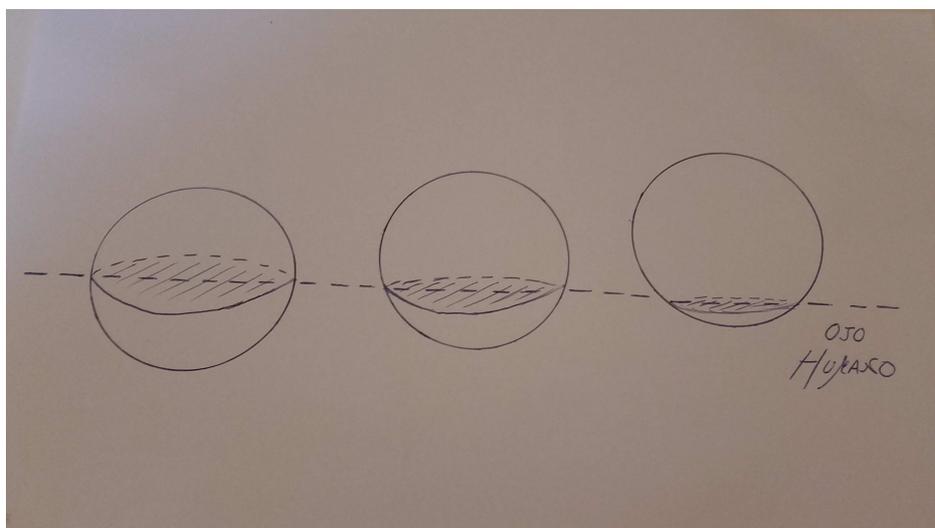


Figura 3. Distintas secciones de la esfera al cortarse con el plano.

Es ahora, cuando comenzamos a intuir que es lo que ocurriría si un objeto cuatri-dimensional apareciera en nuestro planeta, en tal caso, lo que nuestro ojo percibiría, no sería más que un ente tridimensional irregular, en continuo cambio y mutación; el cual es capaz incluso de introducir sus distintas partes en si mismo.

Para ver claramente esto último podemos representar como vería estos objetos a un ser humano que llegara a su planeta:

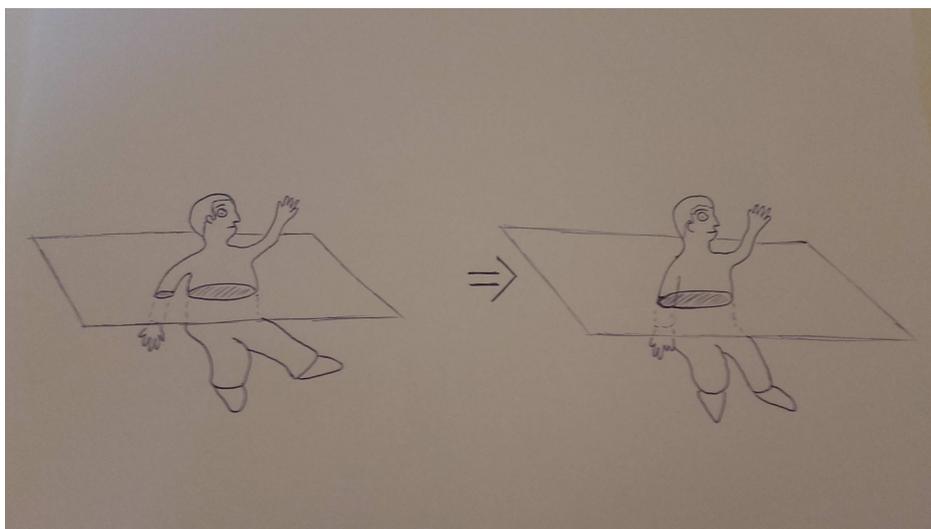


Figura 4. Ejemplo de cómo se van uniendo secciones del cuerpo humano al ser cortado con el plano.

Henri Pointcaré, uno de los matemáticos y pensadores más importantes de la historia, escribió lo siguiente: "...de la misma forma que nosotros podemos pintar la perspectiva de una figura tridimensional sobre un plano, podemos también pintar una figura cuatridimensional sobre un lienzo de tres (o dos) dimensiones... [y estudiando el "grupo" de estas perspectivas] podemos decir que es posible para nosotros representar la cuarta dimensión"

Si volvemos a contemplar la obra de Picasso mostrada al inicio, podemos ahora, darnos cuenta de que el lienzo muestra la representación de los pájaros desde distintos puntos de vista o perspectivas. Picasso, efectivamente, se inspiró en trabajos de Pointcaré y ésta es la razón por la que el artista pintó sus pájaros de tal forma. Así fue cómo representó la cuarta dimensión.

3.2. DEL 2 AL 3 Y...DEL 3 AL 4.

Ya sabemos que pese a que los objetos geométricos de 4 dimensiones sean invisibles para el ojo humano, no lo son, sin embargo, sus proyecciones en nuestras visibles tres dimensiones.

Ya sabemos cómo pueden ser las distintas proyecciones de objetos tridimensionales en un mundo plano, la siguiente cuestión es saber cómo pueden ser las proyecciones de entes de 4 en nuestro espacio.

Para ello, cortemos una pieza de papel como la que muestra la siguiente figura:



Figura 5. Pieza de papel de 30x5 cm.

A continuación, unamos los extremos haciendo el giro siguiente:



Figura 6. Unión de los extremos de la pieza de papel.

Una vez que peguemos estos, obtenemos la siguiente figura geométrica:



Figura 7. Banda de Möbius.

La primera peculiaridad de esta figura es que si intentamos pintar una línea a lo largo de sólo una de sus caras, nos daremos cuenta de que es imposible, ya que inevitablemente llegaremos al punto en el que comenzamos a pintar:



Figura 8. La única cara de la Banda de Möbius.

Por tanto, en esta superficie no tiene sentido hablar de cara interior y cara exterior, ya que tiene una única cara. Podemos por tanto afirmar, en cierto modo, que en dicha figura, nuestra noción intuitiva de interior y exterior quedan totalmente entremezcladas.

Esta curiosa superficie, recibe el nombre de Banda de Möbius y es, además la sección que puede ver nuestro ojo tridimensional de un objeto de cuatro dimensiones, conocida como La Botella de Klein. Esta botella es capaz de pasar a través de sí misma sin la presencia de un agujero (de ahí que su sección, la Banda de Möbius, no tenga exterior ni interior), por ello, puede ser realizada sólo en un espacio de cuatro dimensiones.



Figura 9. Representación tridimensional de la Botella de Klein.

Pese a que nos guste representarla tridimensionalmente así, no olvidemos que ni los objetos ni las personas podemos atravesarnos a nosotros mismos en nuestro espacio y que por tanto, dicha representación NO es una Botella de Klein. Una vez más nuestro ojo nos limita y ha de quedarse con su sección que es lo que sí podemos ver en nuestro mundo, la Banda de Möbius. Al igual que los habitantes de Planilandia debieron resignarse a ver las distintas secciones de la esfera al cortar esta el plano.

Y es que, el ser humano mira a lo infinito de forma limitada, por lo que desafortunadamente es posible que nunca pueda ver completamente la cuarta dimensión. Sin embargo, quizá esta limitación sea la responsable de la creación ilimitada de las mayores maravillas que el ser humano ha ido construyendo a lo largo de toda su historia: las matemáticas y el arte. En tal caso, ¡Bendita limitación!

REFERENCIAS.

E.A. Abbott, Flatland: A Romance of Many Dimensions, 1884 (Planilandia, Una novela de muchas dimensiones, José J. de Olañeta, 1999).

R. Ibáñez Torres: En busca de la cuarta dimensión (Universidad del País Vasco)

MILLER, A.: Einstein, Picasso el tiempo y los estragos de la belleza, (Barcelona, Tusquets, 2007).

HENDERSON, L.: The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art. Princeton (Princeton University Press, 1983).