CONOCIMIENTOS SOBRE ESPERANZA MATEMÁTICA EN ALUMNOS DE BACHILLERATO

Herminia Guerrero, *I.E.S. Meléndez-Valdés, Villafranca de los Barros (Badajoz)*

Carmen Batanero, *Universidad de Granada*

José Miguel Contreras García, *Universidad de Granada*

RESUMEN.

Este trabajo presenta un estudio exploratorio de evaluación de conocimientos de los alumnos de Bachillerato sobre la esperanza matemática, que es considerada por algunos autores más intuitiva que la variable aleatoria e incluso la probabilidad. Analizamos las respuestas de una muestra de 63 alumnos de Bachillerato a una tarea con cuatro apartados, informando de la corrección de las respuestas y argumentos obtenidos.

Nivel educativo: Bachillerato, Humanidades y Científico-Tecnológico

1. INTRODUCCIÓN.

En este trabajo nos centramos en la idea de esperanza matemática, considerada por Heitele (1975) más intuitiva que la de probabilidad, por haber aparecido antes en la historia de la probabilidad. Aunque las investigaciones sobre razonamiento probabilístico son muy amplias, las centradas en la comprensión de la esperanza matemática son escasas y han sido realizadas con alumnos de diferentes edades y contextos, por lo que podemos aportar información al respecto.

Encontramos algunas investigaciones centradas en la idea de distribución, que según Shaughnessy (2007) se puede referir a distribución de datos (variable estadística), distribución de probabilidad (variable aleatoria) y distribución muestral (distribución del estadístico en el muestreo), que también es una variable aleatoria). Para comprender las ideas de variable aleatoria y distribución se necesitan los conceptos de variabilidad, azar, probabilidad, valor central y dispersión (Reading y Shaughnessy, 2004). Por ello no es un concepto sencillo.

Kazak y Confrey (2007) recuerdan que el concepto distribución engloba dos ideas: 1) una visión estadística, como agregado de un conjunto de datos (distribución de la variable estadística); y 2) una visión probabilística como conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio (distribución de la variable aleatoria). Sugieren conectarlos en la enseñanza, pues posponer esta relación hasta que se estudia la inferencia estadística, dificulta la comprensión de la estadística. Concluyen que la comprensión intuitiva de la idea de distribución estadística de los niños puede evolucionar hacia la idea de distribución de una variable aleatoria, usando la simulación.

Ruiz (2014) desarrolla un amplio trabajo sobre la variable aleatoria con un grupo de futuros profesores y entrevistas a dos estudiantes universitarios. Plantea problemas en que se debe usar la variable aleatoria y analiza las dificultades de comprensión de la idea de distribución o de determinación de la distribución de probabilidad en los sujetos de su muestra.

Respecto a la esperanza matemática, Scholttmann y Anderson (1994) estudiaron las intuiciones de niños de 5 a 10 años, utilizando para ello dos tipos juegos de azar. Concluyen que, incluso los niños más pequeños, tienen una intuición correcta sobre la idea de esperanza matemática, y tienen en cuenta tanto la probabilidad de ganar el juego, como el valor del premio en caso de ganar, para decidir si un juego es equitativo. Sin embargo, tienen dificultades para transformar un juego no equitativo en equitativo; por ejemplo, al calcular las probabilidades de ganar siguen, con frecuencia, estrategias aditivas en lugar de multiplicativas.

La esperanza matemática formaría parte del contenido de probabilidad, que se incluye en las directrices curriculares de Educación Secundaria (MECD, 2015). Es de esperar que los alumnos de Bachillerato hayan adquirido algunos conocimientos de probabilidad, así como un razonamiento probabilístico que les permita resolver problemas sencillos sobre la esperanza matemática. En lo que sigue presentamos la tarea propuesta y los resultados. Un estudio más detallado se incluye en Guerrero (2015), donde también incluimos preguntas sobre la comprensión del juego equitativo.

2. ANÁLISIS A PRIORI DE LA TAREA

En la Figura 1 presentamos el problema planteado, que ha sido adaptado de otro utilizado en investigaciones sobre razonamiento probabilístico en niños (Green, 1983; Cañizares, 1997) y con futuros profesores de educación primaria (Gómez, 2014). En dichas investigaciones sólo se tuvieron en cuenta las dos primeras preguntas. Nosotros hemos añadido la tercera y cuarta, para que los alumnos deban trabajar el concepto de esperanza matemática.

Un robot es colocado ante un laberinto que empieza a explorar. En cada cruce el robot tiene tantas probabilidades de irse por un camino como por otro (Pero nunca vuelve por el camino que vino). Hay 8 metas al final de los 8 caminos (ver el dibujo)

a. ¿En qué meta ó metas tiene el robot más probabilidades de acabar?
b. ¿Por qué?
c. Si ponemos 24 robots al principio del laberinto, ¿Cuántos piensas que acabarán en una de las metas 1 ó 2? ¿Por qué?
d. ¿Cuántos piensas acabarán en las metas 3 ó 4?

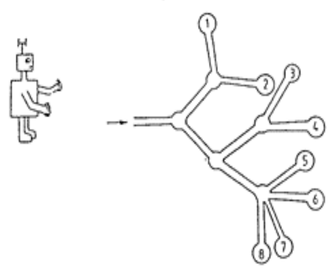

Figura 1. Tarea planteada

En este problema se presenta una situación de experimento compuesto de múltiples pasos (el número de pasos depende de dónde finalice el robot). Para resolver la primera pregunta se ha de tener en cuenta que un primer experimento se produce en la primera bifurcación, donde el robot puede ir a izquierda o derecha. Como no hay preferencias, la probabilidad de cada posibilidad sería igual a ½. Igualmente, en cada cruce, aplicando el principio de indiferencia, la probabilidad de cada posible camino es 1/n, donde n es el número de bifurcaciones. En la Figura 2 reproducimos la solución mediante diagrama en árbol. Nos encontramos con una variable aleatoria que toma como valor el número de la meta donde llega el robot. Teniendo en cuenta el análisis anterior, la respuesta correcta es que las metas 1 y 2 son más probables. El alumno debe dar un argumento en el segundo apartado.

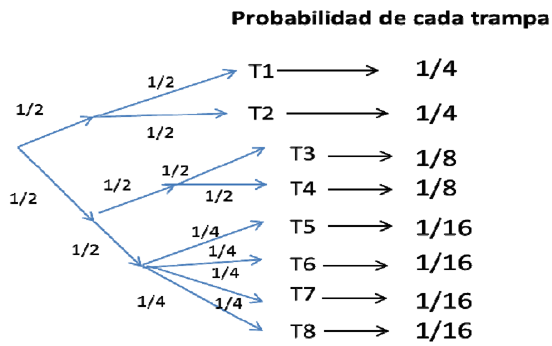

Figura 2. Representación del problema, mediante diagrama en árbol

En el tercer apartado aparece una nueva variable aleatoria, que es el número de robots (1 a 24) que pueden acabar en cada una de las metas 1 o 2. No necesitamos ahora la distribución de la variable aleatoria, sino únicamente su esperanza matemática. Dicha esperanza matemática sería la siguiente:

$$E(X) = n\,P(1 \cup 2) = 24\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = 24\frac{1}{2} = 12$$

De hecho, se puede llegar a la misma conclusión con un razonamiento intuitivo, pensando que de 24 robots la mitad irán por la primera bifurcación izquierda que termina en 1 o en 2. De la misma forma que en el apartado anterior, en el cuarto apartado el número solicitado es 6 robots.

3. RESULTADOS OBTENIDOS

El problema se pasó a 63 alumnos de Bachillerato, 30 de 1º curso (CC. Sociales) y 33 de 2º curso (9 de CC sociales y 24 de ciencias y tecnología).A continuación analizamos, en primer lugar, los resultados en cada apartado y finalmente se hace una síntesis global.

3.1. APARTADO A. CÁLCULO DE PROBABILIDADES COMPUESTAS

Todos los participantes contestan a este apartado. Son correctas las respuestas que indican las metas 1 ó 2. Hemos considerado parcialmente correctas las respuestas en las que el estudiante calcula correctamente las probabilidades de cada meta sobre el diagrama, pero no contesta a la pregunta de cuáles son las metas con más probabilidades de acabar.

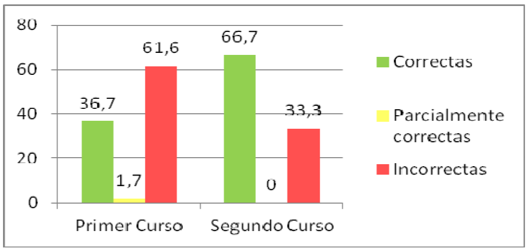

Figura 3. Porcentaje de respuestas al ítem 1-a por curso

La Figura 3 muestra los resultados obtenidos por curso. En todos los ítems el porcentaje de respuestas correctas en segundo curso es superior a las obtenidas en primero, lo que es lógico, debido a la instrucción en cálculo de probabilidades recibida en el primer curso de ambas modalidades de bachillerato. Las respuestas incorrectas más frecuentes son las siguientes:

- *E1.Sesgo de equiprobabilidad.* El estudiante indica que todos los caminos son iguales de probables; lo que puede suponer un sesgo de equiprobabilidad descrito por Lecoutre (1992). Un ejemplo es "*Tiene las mismas posibilidades en las ocho metas, ya que es cuestión de azar el camino que tome*".
- *E2.Tiene en cuenta factores no probabilísticos*. Responde que acabará en las puertas 5, 6, 7 y 8, dando un razonamiento no probabilístico. Un ejemplo de este tipo de respuesta es "*En las metas 5, 6, 7 y 8 porque siempre sigue adelante*". Cañizares (1997) también indica este tipo de razonamiento.
- *E3. Cálculo incorrecto de probabilidades.* Identifica que las metas 5, 6, 7, 8 tienen menos probabilidad, pero cree que las cuatro primeras tienen la misma: "*Tiene una posibilidad de un 50% en cada una de las metas de la primera y la segunda calle y un 25% en las de la tercera calle".* El alumno solo calcula la probabilidad simple final del último trayecto, pero no tiene en cuenta la probabilidad compuesta.
- *E4. No considerar todos los sucesos posibles cuando son equiprobables.* Identifica que la meta 1 tiene más probabilidad, pero no considera que la 2 es equiprobable con la 1: "*En la meta 1*".

La Figura 4 muestra la distribución de los tipos de errores en ambos cursos. El más frecuente fue sesgo de equiprobabilidad que también apareció en un 5% de futuros profesores en la investigación de Gómez (2014). La categoría 'OT' corresponde a otros errores con poca incidencia. El cálculo incorrecto de probabilidades disminuye en segundo curso y el resto de errores tiene igual incidencia en ambos.

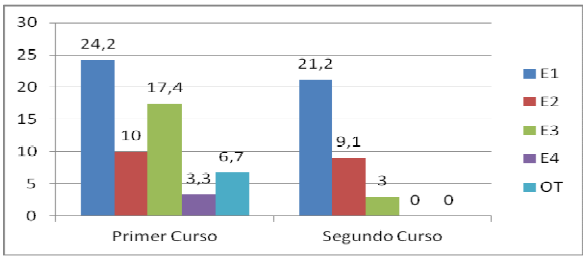

Figura 4. Porcentaje de tipos de error por curso ítem 1-a

3.2. Apartado b. Argumentos

En el segundo apartado el argumento correcto es indicar que las metas 1 y 2 tienen mayor probabilidad que el resto. Los alumnos que dan este argumento generalmente calculan el valor 1/4 e indican los valores de la probabilidad de las otras metas 1/8 ó 1/16. En este ítem no consideramos ninguna respuesta como parcialmente correcta. La Figura 3.4 muestra los resultados obtenidos por curso, apreciándose el aumento de argumentos correctos en los alumnos de segundo curso.

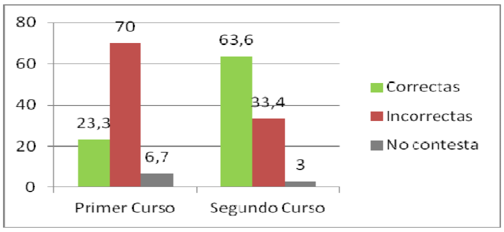

Figura 5. Porcentaje de respuestas al ítem 1-b por curso

Respecto a las respuestas incorrectas; las más frecuentes son las siguientes:

- *E1*. *Sesgo de equiprobabilidad.* El estudiante argumenta que todas las metas son equiprobables porque dependen del azar. Un ejemplo de este tipo respuesta es "*Tiene las mismas posibilidades en las ocho metas, ya que es cuestión de azar el camino que tome*".
- *E2. Tiene en cuenta factores no probabilísticos*. Tal como Cañizares (1997) y Gómez (2014) indican, algunos alumnos utilizan la distancia al origen (independientemente del número de cruces) para calcular la probabilidad. Un ejemplo de este tipo de respuesta es "*Porque al estar más cerca tienen más probabilidad de llegar antes*". En otros casos el estudiante explica el procedimiento que seguirá el robot. Un ejemplo de este tipo de respuesta es *"Porque lo primero que va a hacer es coger el primer camino y dentro de él va a elegir entre el primero o el segundo".*

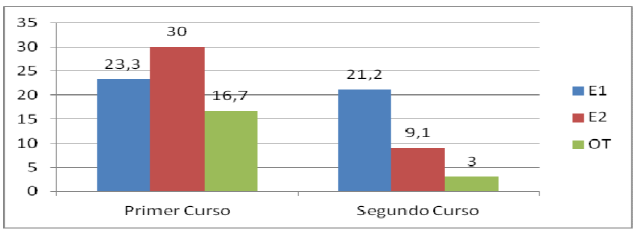

Figura 6. Porcentaje de tipos de error por curso ítem 1-b

La Figura 6 muestra la distribución de los tipos de errores en ambos cursos. La categoría *OT* corresponde a otros errores. Observamos que en primer curso el error más frecuente es *E2. Tiene en cuenta factores no probabilísticos*, y en segundo curso es *E1. Sesgo de equiprobabilidad* que también aumenta con la edad en las investigaciones de Green (1983), Cañizares (1997) y Serrano, Batanero, Ortíz y Cañizares (1998). En segundo curso, el porcentaje de alumnos que argumenta su respuesta en términos de probabilidad es superior al de primer curso, donde un 30% considera factores ajenos a la probabilidad, como por ejemplo la distancia de las metas al punto inicial.

Los resultados en estas dos partes del ítem son mejores que los observados por Green (1983a) con niños de 11 a 14 años, pues encontró una alta proporción de sesgo de equiprobabilidad (60%) y baja proporción de respuestas correctas (5%). Cañizares (1997) obtuvo sólo 8% de respuestas correctas y alta presencia del sesgo de equiprobabilidad (55%). Gómez (2014) con futuros profesores de educación primaria encuentra 50,3% de respuestas correctas, porcentaje intermedio al obtenido por nosotros en nuestros dos cursos.

3.3. APARTADO C. NÚMERO ESPERADO DE ROBOTS EN LAS METAS 1 Y 2

Este apartado del ítem ha sido añadido por nosotros; por tanto no tenemos investigaciones previas para comparar y los resultados son una aportación original. Consideramos como respuestas correctas *"12 robots", "12", "el 50%" y "la mitad"*. No consideramos respuestas parcialmente correctas. Algunos alumnos no responden. La Figura 7 muestra los resultados obtenidos por curso, observando de nuevo gran mejora en los alumnos de segundo.

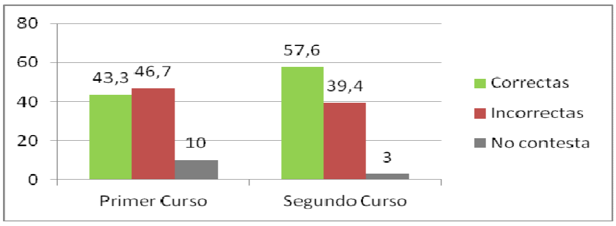

Figura 7 Porcentaje de respuestas al ítem 1-c por curso

Respecto a las respuestas incorrectas; las más frecuentes son las siguientes:

- *E1. Sesgo de equiprobabilidad.* Algunos estudiantes responden que el número de robots no puede calcularse porque todas las metas son equiprobables. Un ejemplo de este tipo respuesta es "*Sería imposible saberlo, ya que no sabemos qué camino va a coger cada robot*". Estos alumnos no aprecian el papel de la probabilidad para la predicción de una distribución de datos. Otros alumnos dividen el número de robots (24) entre el número de metas (8) y, como se pregunta por el número de robots que caerán dos metas, contestan que seis robots. Un ejemplo de este tipo de respuesta es "*Seis porque dicho camino tiene dos metas, por lo que al dividir las 8 metas entre los 24 robots, da a 3 robots por meta y como el camino tiene 2 metas serían 6 robots".* En este ejemplo vemos también que el alumno expresa la división en orden incorrecto (“*al dividir 8 entre 24”).*

- *E3. Cálculo incorrecto de probabilidades.* Aplican las probabilidades mal calculadas en el ítem 1-a. Un ejemplo de respuesta es “*La cuarta parte irá a las metas 1 y 2”.*

La Figura 8 muestra la distribución de los tipos de errores en ambos cursos. Aunque el error más frecuente en ambos cursos es *E1*, *Sesgo de equiprobabilidad,* este porcentaje disminuye en segundo curso, aumentando el de los estudiantes que responden utilizando las probabilidades calculadas en los ítems anteriores (aunque sean erróneas).

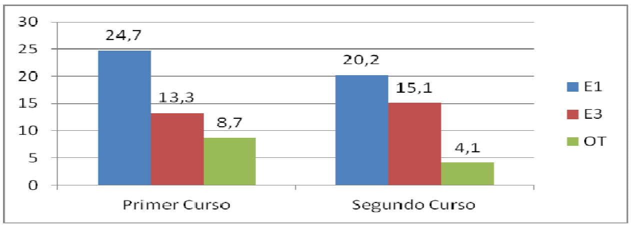

Figura 8. Porcentaje de tipos de error por curso ítem 1-c

3.4. Apartado d. Número esperado de robots en las metas 3 y 4

También este apartado es nuevo respecto a las investigaciones previas. Las respuestas que hemos considerado correctas son las de aquellos alumnos que indican *“6 robots”, “6” y ”el 25%”*. No consideramos respuestas parcialmente correctas. Algunos alumnos no responden. La Figura 9 muestra los resultados obtenidos por curso (porcentajes de respuestas correctas, incorrectas y no contestadas).

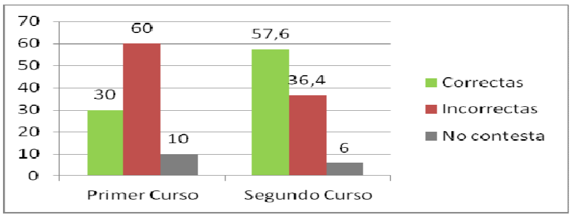

Figura 9. Porcentaje de respuestas al ítem 1-d por curso

Observamos como aumenta notablemente las respuestas correctas en segundo curso, disminuyendo las incorrectas. Respecto a las respuestas incorrectas; las más frecuentes son las siguientes:

- *E1*. *Sesgo de equiprobabilidad.* Algunos estudiantes responden que el número de robots no puede calcularse porque todas las metas equiprobables, o dividen el número de robots (24) entre el número de metas (8),al igual que ocurrió en el apartado anterior.
- *E3. Cálculo incorrecto de probabilidades.* Aplican las probabilidades mal calculadas en el ítem 1-a. Un ejemplo de respuesta es “*La mitad irá a las metas 3 y 4”.*

La Figura 3.9 muestra la distribución de los tipos de errores en ambos cursos. Respecto al ítem anterior, se mantienen los porcentajes del error *E1*. *Sesgo de* *equiprobabilidad,* pero en primer curso aumenta el del error *E3. Cálculo incorrecto de probabilidades*, porque algunos estudiantes calcularon correctamente las probabilidades de las metas 1 y 2, pero no las de las metas 3 y 4.

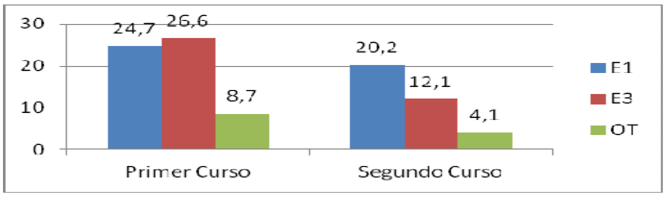

Figura 10. Porcentaje de tipos de error (respecto al total de alumnos) en los dos cursos ítem 1-d

3.5. SÍNTESIS DE RESULTADOS.

En la Figura 11 comparamos los porcentajes de respuestas correctas y parcialmente correctas de los cuatro apartados de este ítem para cada curso, viendo una notable mejoría en el segundo, donde se aprecia el efecto de haber recibido en primer curso enseñanza de la probabilidad. Observamos que en los dos cursos el porcentaje de respuestas correctas al ítem 1-a es superior al del ítem 1-b, es decir, algunos alumnos intuyen que las metas más probables son la 1 y la 2, pero no lo argumentan correctamente en términos de probabilidad. Esta diferencia es mayor en primer curso (15 puntos) que en segundo curso (3,1 puntos).

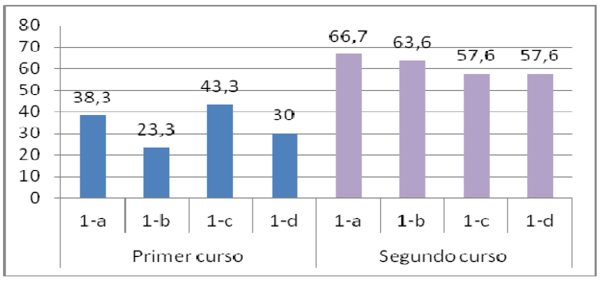

Figura11. Porcentaje de respuestas correctas y parcialmente correctas de los cuatro apartados por curso

Comparando el ítem 1-a con el 1-c, en el primer curso el porcentaje de alumnos que responden correctamente al valor esperado (ítem 1-c) es superior al que lo hacen al número de metas más probables. En este sentido hacemos notar que Heitele (1975) sostiene que la idea de valor esperado es más intuitiva que la de variable aleatoria e incluso que la de probabilidad, por haber aparecido antes en la historia de la probabilidad.

4. CONCLUSIONES

Nuestro estudio ha proporcionado alguna información de interés; permitiendo comparar los porcentajes de acierto en nuestra muestra con otros de investigaciones previas en algunos grupos. También hemos dado información detallada sobre los tipos de error que se producen.

Es particularmente de interés la información que damos sobre la posible comprensión o intuición de la esperanza matemática: Los alumnos parecen intuir el valor esperado de la frecuencia en que aparece un suceso en una repetición de un experimento. Los mejores resultados obtenidos en el apartado c (valor esperado) que en el a (trampas más probables) coinciden con lo indicado por Heitele (1975), que sostiene que la idea de valor esperado es más intuitiva que la de variable aleatoria e incluso que la de probabilidad, por haber aparecido antes en la historia de la probabilidad.

Sin embargo, se produce con frecuencia el sesgo de equiprobabilidad y se usan razonamientos no probabilísticos. El profesor debe estar atento a estos problemas para ayudar a sus alumnos a superarlos.

Agradecimiento: Proyecto EDU2013-41141-P (MEC), y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS.

CAÑIZARES, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

GREEN, D. R (1983). *A survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years*. En D.R. Grey, P. Holmes y G M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol.2, pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

GÓMEZ, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para enseñar la probabilidad en futuros profesores de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

GUERRERO, H. (2015). *Evaluación de conocimientos sobre esperanza matemática y juegos equitativos en alumnos de Bachillerato*. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada.

HEITELE, D. (1975). *An epistemological view on fundamental stochastic ideas*. Educational Studies in Mathematics, 6, 187-205.

KAZAK, S. y CONFREY, J. (2007*). Elementary school students' intuitive conceptions of random distribution.* International Electronic Journal of Mathematics Education, 2(3). Online: www.iejme.com.

LECOUTRE, M.P. (1992). *Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations*. Educational Studies in Mathematics, 23, 557-568.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA y DEPORTE, MECD (2014). *Real Decreto 1105/2014 de currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

READING, C. y SHAUGHNESSY, J.M. (2004). *Reasoning about variation*. En J. Garfield y D. Ben-Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201-226). Dordrecht: Kluwer.

RUIZ, B. (2014). *Análisis epistemológico de la variable aleatoria y comprensión de objetos matemáticos relacionados por estudiantes universitarios.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

SCHLOTTMANN, A. y ANDERSON, N. H. (1994*). Children's judgements of expected value.* Developmental Psychology, *30*(1), 56-66.

SERRANO, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

SERRANO, L., BATANERO, C., ORTÍZ, J. J. y CAÑIZARES, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática, 10(*1), 7-25.

SHAUGHNESSY, J. M. (2007). *Research on statistics learning and reasoning*. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1010). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc, y NCTM.