# SENTIDO MATEMÁTICO DE LA DIVISIÓN DE FRACCIONES EN LOS PAÍSES DE LA FISPM

**Márquez, Ana**, *Escuela Universitaria de Magisterio La Inmaculada, Granada,* anamarquez@eulainmaculada.com
**Flores, Pablo**, *Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada,* pflores@ugr.es
**Del Río, Aurora**, *Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada,* adelrio@ugr.es

## RESUMEN.

A raíz de una conferencia en el VII CIBEM, hicimos una pequeña encuesta entre las sociedades que integran la Federación Iberoamericana de Sociedades de Profesores de Matemáticas, sobre cómo se introduce la división de fracciones en sus países. Las respuestas de 9 sociedades nos dan un panorama que analizamos en esta comunicación, sobre cuándo se introduce la división de fracciones, cómo se introduce y qué tipos de problemas se abordan. Esta información nos lleva a seguir profundizando en la complejidad de la división de fracciones, estudiando cómo dar sentido a la operación y qué propuestas innovadoras se están haciendo en algunos países, especialmente en Portugal.

**Nivel educativo**: Educación Primaria.

## 1. INTRODUCCIÓN.

Las fracciones son uno de los temas matemáticos más investigados dentro del área de la Didáctica de la Matemática. Numerosos estudios dentro de esta temática se centran en la operación de división de fracciones, ya que posee un algoritmo de sencilla aplicación pero de compleja comprensión. Para lograr un aprendizaje con sentido de dicho contenido matemático, el profesor tiene que tener un conocimiento que no puede reducirse al manejo formal del algoritmo de división de fracciones y a saber aplicarlo. Diversos estudios se han realizado sobre cuál es el conocimiento profesional necesario para enseñar la división de fracciones y los problemas que lo requieren (Ma, 1999; Contreras, 2012). Recientemente hemos realizado un estudio con profesores españoles en ejercicio, en el que les planteábamos tres algoritmos diferentes para realizar la división, proponiéndoles que justificasen la validez de dichos procedimientos y que inventasen problemas que permitiesen analizar qué significa la división de fracciones. El análisis de los resultados nos ha llevado a apreciar que lo que predomina es un conocimiento procedimental, lo que repercute en que no resulte fácil proponer problemas o en citar siempre los mismos tipos (la mayoría de comparación multiplicativa) (Márquez, 2013)

Para impartir una conferencia en el VII CIBEM (Flores, 2013), organizada por la Federación Iberoamericana de Sociedades de Profesores de Matemáticas, quisimos ejemplificar en la división de fracciones el proceso de formación de profesores de matemáticas de educación primaria. Para conocer el público asistente, nos interesamos por tener información sobre cuándo y cómo se introduce la división de fracciones en los países latinoamericanos. Para ello realizamos una pequeña encuesta que enviamos a todas las sociedades que se agrupan bajo la FISPM. Aunque la información recibida no tiene un carácter muestral, los aportes de los profesores responsables fueron interesantes, comprendiendo tanto la precisión sobre cuándo se introduce, como ejemplos de problemas o copias de libros de texto de uso habitual. Partiendo de la comprensión que hemos ido adquiriendo sobre este concepto matemático, en esta comunicación queremos organizar esta información y aprovecharla para avanzar sobre cómo se contempla en la escuela.

Enseñar la división de fracciones con sentido es un reto difícil. Para examinar cómo llevarlo a cabo conviene revisar qué entendemos por enseñar con sentido. Los estándares del NCTM presentan el sentido numérico como la habilidad para comprender los números, las diferentes formas de representarlos, las relaciones entre ellos, así como, la habilidad para comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras. Relacionando los tipos de problemas de división de fracciones que se plantean en los libros de texto, con el algoritmo que utilizan para su resolución podremos ver si están dotando de significado a la operación y por tanto están contribuyendo al desarrollo del sentido numérico en el alumnado.

Para alcanzar tal propósito, se comienza analizando el papel que juega la división de fracciones dentro del currículo español y mostrando cómo, un algoritmo de sencilla aplicación, resulta muy difícil de conceptualizar en determinadas situaciones. A continuación, se muestran los resultados obtenidos tras realizar una encuesta a los representantes de las sociedades que forman parte de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Profesores de Matemáticas, incluyendo el nivel educativo en el que se introduce este contenido por primera vez y las situaciones propuestas en libros de texto o documentos curriculares de los diferentes países para la aplicación de dicho contenido. Para concluir, se analizan las respuestas brindadas extrayendo las conclusiones oportunas.

# 2. MARCO TEÓRICO: DIVIDIR FRACCIONES CON SENTIDO

El conocimiento de las fracciones y sus operaciones se inicia en el tercer ciclo de la Educación Primaria y se continúa desarrollando durante toda la etapa de Educación Secundaria Obligatoria. Según el Currículo español, el aprendizaje de de la división de fracciones por primera vez tiene lugar a los 11-12 años, ya que uno de los contenidos que deben asimilar los estudiantes es:

> *"Utilización de operaciones de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en situaciones cotidianas y en contextos de resolución de problemas."*(MEC, 2006)

Por tanto, el currículo establece que las operaciones, en este caso, la división de fracciones, debe aplicarse a resolver problemas y situaciones de la vida cotidiana. Además, hay que considerar que no basta un aprendizaje mecánico de la aplicación del algoritmo de la división, ya que éste resulta insuficiente en contextos distintos al de aprendizaje y en su aplicación al desarrollo de conocimientos en estudios superiores.

Desde un punto de vista formal, se define la división de fracciones como el producto del dividendo por el inverso del divisor. Esta división formal, en el ámbito escolar se traduce en un algoritmo muy fácil de aplicar y recordar por los estudiantes, simplificándolo en expresiones tales como "invertir y multiplicar" o "multiplicar en cruz". Sin embargo, su aplicación a la resolución de situaciones que lo requieran no es tan simple, ya que, en muchas ocasiones, se trata de un aprendizaje mecánico y puramente procedimental.

Rico (2012) establece, centrándose en el ámbito escolar, que el significado de un concepto matemático queda completamente establecido atendiendo a tres dimensiones:

- Los *sistemas de representación*, definidos por los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente dicho concepto y permiten relacionarlo con otros.
- La *estructura conceptual*, que comprende conceptos y propiedades, los argumentos y proposiciones que se derivan y sus criterios de veracidad.
- La *fenomenología*, que incluye aquellos fenómenos (contextos, situaciones y problemas) que están en el origen del concepto y que le dan sentido.

Así, del mismo modo que una fracción es una representación de un contenido matemático que adquiere sentido cuando se introduce en una situación que permite mostrar su papel a partir de la resolución de problemas, el algoritmo de la división de fracciones carece de sentido si no es para resolver un problema.

Al intentar caracterizar las situaciones que permiten ser resueltas mediante la división de fracciones, se deben tener en cuenta también aquellas en las que aparece implicada la multiplicación. Greer (1992) realiza un estudio sobre los tipos de problemas de estructura multiplicativa en el conjunto de los números racionales y concluye que los problemas de división pueden ser de cuatro tipos:

| *Tipo de problema* | *Ejemplo* |
| --- | --- |
| Razón | *Se pintan 2/5 de habitación en ¾ de hora*<br>*¿Cuánto se pintará en una hora?*<br>*¿Cuánto se tardarán en pintar toda la habitación?* |
| Comparación multiplicativa | *¿Cuántas raciones de 2/3 de galleta se pueden obtener de 5/3 de galleta?* |
| Parte/todo | *¿Cuántos alumnos forman una clase si 18 chicas son los ¾ de la clase?* |
| Área | *¿Cuánto mide la altura de un rectángulo cuya superficie es 1/6 $m^2$ y su base 1/3 m.?* |

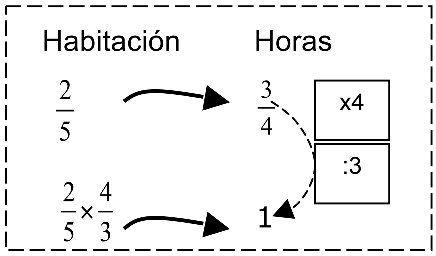
Tabla 1. Ejemplos de problemas de división de fracciones

Si se incluye la posibilidad de que el divisor sea un número entero, es decir, la división de una fracción entre un entero, surge un nuevo tipo de problema multiplicativo que suele ser contemplado en el conjunto de los número enteros. Se trata de los problemas de reparto, como por ejemplo: *"Juan ha decidido repartir los 2/5 de la finca heredada de su madre con sus tres hijos. ¿Qué parte de la finca le toca a cada hijo?"*. En este tipo de problemas, el divisor no puede ser una fracción, por tanto, siempre se resolverá mediante la división de una fracción entre un número entero.

En definitiva, tenemos cinco tipos de problemas que se resuelven mediante la división de fracciones, es decir, cinco situaciones en las que esta operación adquiere sentido, dejando de ser un procedimiento mecánico. Sin embargo, no todos los contextos ayudan a comprender el algoritmo tradicional de multiplicar por el inverso, a dotarlo de significado. Flores (2008) analiza las relaciones que pueden ser establecidas entre los diferentes tipos de problemas y distintos algoritmos existentes para realizar la división de fracciones. En el caso de los problemas de razón, de relación parte/todo y de reparto es factible comprender el algoritmo:

- <u>Problema de razón:</u> *Se pintan 2/5 de habitación en ¾ de hora ¿Cuánto se pintará en una hora?*

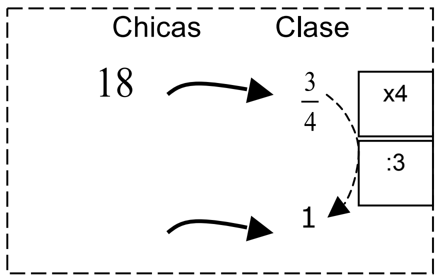
$$\frac{2}{5}:\frac{3}{4}=\frac{\frac{2}{5}\ \text{Habitación}}{\frac{3}{4}\ \text{Horas}}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}}{1}=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}$$




Si 2/5 de habitación se pintan en ¾ de hora, al dividir entre 3 se averigua cuánto se pinta en un cuarto de hora; para averiguar cuánto se pinta en una hora completa, basta multiplicar por cuatro. Así que, estamos multiplicando por el inverso del divisor, es decir, aplicando el algoritmo derivado de la definición formal.

- <u>Problema de relación parte-todo:</u> *¿Cuántos alumnos forman una clase si 18 chicas son los ¾ de la clase?*

$$18:\frac{3}{4}=\frac{18}{\frac{3}{4}}=18.\frac{4}{3}=\frac{18}{3}.4=6.4=24$$




*A*l dividir entre tres, averiguamos cuántos alumnos y alumnas forman un cuarto de la clase y al multiplicar por 4 el total de la clase, por tanto, el algoritmo de invertir y multiplicar adquiere sentido en este tipo de situaciones.

- <u>Problema de reparto:</u> *Juan ha decidido repartir los 2/5 de la finca heredada de su madre con sus tres hijos. ¿Qué parte de la finca le toca a cada hijo?*

$$\frac{2}{5}:3=\frac{\frac{2}{5}}{3}=\frac{2}{5\cdot 3}=\frac{2}{15}$$

Si Juan va a repartir su parte de la finca entre sus tres hijos a partes iguales, cada uno de ellos recibe una tercera parte, es decir, un tercio del terreno repartido, por lo que el algoritmo de multiplicar por el inverso también tiene sentido en este tipo de situaciones.

- Problema de comparación multiplicativa: *¿Cuántas raciones de 2/3 de galleta se pueden obtener de 5/3 de galleta?*

$$\frac{5}{3}:\frac{2}{3}=\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

En este tipo de situaciones se compara cuántas veces contiene una cantidad a otra, en este caso, cuántas veces contiene 5/3 a 2/3. Entonces, ¿por qué multiplicamos por 3 y dividimos entre dos? Esta situación no ayuda a comprender el algoritmo tradicional de la división. De hecho, resulta más intuitivo igualar denominadores y comparar los numeradores. Por ejemplo, *¿cuántas raciones de 2/3 de galleta se pueden obtener con 5 galletas?* Este problema es equivalente a averiguar cuántas raciones de 2/3 de galleta se pueden obtener con 15/3 de galletas, quedando el problema reducido a comparar 15 veces 1/3 de galleta con 2 veces 1/3 de galleta.

$$5:\frac{2}{3}=\frac{15}{3}:\frac{2}{3}=\frac{\frac{15}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{15}{2}$$

- Problema de área de rectángulos: *¿Cuánto mide la altura de un rectángulo cuya superficie es 1/6 $m^2$ y su base 1/3 m.?*

$$\frac{1}{6}:\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{1}=\frac{1}{2}$$

Esta situación es similar a la anterior. ¿Por qué multiplicamos el área por el inverso de la base? Ese ejemplo no ayuda a comprender el algoritmo tradicional de la división. De hecho, se trata de resolver una ecuación del tipo $\frac{1}{3}\cdot x=\frac{1}{6}$, por lo que habrá que buscar números que multiplicados por numerador y denominador nos den la nueva fracción. Por tanto, resulta más intuitivo dividir numeradores y denominadores entre sí para hallar dichos números:

$$\frac{1}{6}:\frac{1}{3}=\frac{1:1}{6:3}=\frac{1}{2}$$

En definitiva, de las cinco situaciones diferentes en las que la división de fracciones puede ayudar a resolver un problema, sólo en tres de ellas resulta intuitiva la aplicación del algoritmo tradicional de la división de fracciones para su resolución, mientras que en las otras dos, resulta más transparente utilizar otros algoritmos existentes para dicha operación.

# 3. RESULTADOS

## 3.1. RECOGIDA DE INFORMACIÓN

Tras tomar conciencia de la dificultad que tiene la comprensión del algoritmo de la división de fracciones y lo difícil que resulta dotarlo de sentido en determinadas situaciones, hemos llevado a cabo este pequeño estudio sobre cómo es, a grandes rasgos, el proceso de enseñanza-aprendizaje de este contenido matemático en los diferentes países que forman parte de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Profesores de Matemáticas. A los representantes de estas sociedades se les solicitó, en primer lugar, información acerca del nivel educativo y la edad del alumnado al que se le enseña por primera vez este contenido. Esta información se completa con ejemplos de problemas típicos de enunciado que se resuelvan mediante la división de fracciones, extraídos de libros de texto o de documentos curriculares y que pertenezcan al curso en el que se introduce esta operación.

De todas las encuestas realizadas, se han obtenido nueve respuestas de países diferentes. En ellas se especifica el nivel educativo y la edad en la que se produce el aprendizaje por primera vez de la operación de división de fracciones. Además incluyen ejemplos de los tipos de problemas que utilizan para desarrollar el aprendizaje de este contenido, ampliándose en varios casos con ejemplos extraídos de libros de texto correspondientes al nivel educativo de introducción de esta operación.

## 3.2. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En la siguiente tabla aparecen representados los datos más relevantes extraídos de las respuestas a las encuestas realizadas. En la primera columna se representa el país al que pertenece la sociedad que ha facilitado los datos. En la segunda se muestra el curso y la edad de los estudiantes en la que se les enseña por primera vez la división de fracciones, seguida de los tipos de problemas que aparecen en los fragmentos facilitados por los representantes de cada sociedad. Se ha incluido una última columna incluyendo algunos datos que resultan curiosos.

| *SOCIEDAD* | *AÑO INTRODUCCIÓN* | *TIPOS DE PROBLEMAS* | *OBSERVACIONES* |
|---|---|---|---|
| Argentina | 7º/12 años | Comparación multiplicativa | Currículo: uso en contextos de proporcionalidad y medida |
| Bolivia | 5º / 10 años | Reparto<br>Comparación multiplicativa | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Brasil | 6º/10 años | Comparación multiplicativa | |
| Costa Rica | 6º/ 11 años | Comparación multiplicativa | División<br>Fracción entre natural<br>Fracción entre fracción |
| Perú | 4º/10-11 años | Reparto | División<br>Fracción entre natural<br>fracción entre fracción (sin contexto) |
| Portugal | 5º/10-11 años | Comparación multiplicativa<br>Reparto<br>Razón<br>Área | Invención de problemas que se resuelvan mediante la división |
| Puerto Rico | 5º/11 años | Comparación multiplicativa | |
| Uruguay | 6º/11-12 años | No aparecen problemas | División formal como multiplicación por el inverso |
| Venezuela | 10-11 años | Reparto | |

Tabla 2. Tabla resumen de resultados

En primer lugar, se puede observar que el nivel de introducción de la división de fracciones es similar en todos los países, rodando los 11 años, edad que coincide con la enseñanza por primera vez de este contenido en nuestro país.

En cuanto al algoritmo utilizado para llevar a cabo esta operación, tras el análisis de la información recogida, se puede afirmar que el único procedimiento utilizado es el derivado de la definición formal: multiplicar el dividendo por el inverso del divisor.

Los tipos de problemas más predominantes son los de comparación multiplicativa y reparto. En diversos casos, como Bolivia o Perú, la situación de reparto se utiliza como introducción del procedimiento de división de fracciones, partiendo de una división de una fracción entre un número natural para pasar posteriormente al caso de fracción entre fracción. Este paso no resulta sencillo desde un punto de vista conceptual, ya que como se ha comentado, en situaciones de reparto no aparece la división entre dos fracciones. De hecho, cuando se generaliza a la división entre dos fracciones, se prescinde del contexto.

En seis de las nueve respuestas aparecen problemas de comparación multiplicativa.

Es llamativo el caso de Uruguay, que envía un documento en el que no aparecen problemas de enunciado, sino que realizan una introducción formal del algoritmo de la división a partir del inverso de una fracción.

Se puede destacar también que no aparece, en ninguna de las respuestas, problemas de relación entre parte y todo resolubles mediante la división de fracciones.

Sin duda, el país que más resalta es Portugal. Es el único país en el que aparecen cuatro tipos de problemas diferentes, además de proponerle al alumnado que invente problemas para divisiones de fracciones dadas, entre las que aparecen fracción entre fracción, fracción entre entero y entero entre fracción.

De todo ello podemos concluir que la práctica de la introducción del algoritmo parece ser el motivo principal de la enseñanza de la división de fracciones, lo que aboga por una enseñanza preferentemente procedimental, aunque no se vaya a aplicar este algoritmo a ningún tipo de problemas, dada la poca cantidad y variedad de los problemas planteados. La propuesta más extendida consiste en introducir la división como reparto, producir un reparto que amplía el dividendo a un dato fraccionario (una relación parte/todo), llevarlo a cabo mediante una nueva división de las partes resultantes de la fracción dividendo, lo que da lugar a una nueva fracción, de la misma unidad, que se obtiene manteniendo el numerador y multiplicando el divisor por el denominador. Esta situación, que resulta un paso fácil cuando el divisor es entero, no puede extenderse a una división entre fracciones, pues el reparto no puede hacerse entre una cantidad fraccionaria de sujetos (o cajas, o ..). Sin embargo, se utiliza para mostrar que el procedimiento corresponde formalmente con representar el divisor entero como una fracción de denominador 1, y apreciar que el resultado es la fracción cuyo numerador es el de la del dividendo (por la unidad), y el denominador es el producto del denominador del dividendo por el numerador del divisor. Ya tenemos la propiedad que queríamos, que se convierte en una regla a aprender, aunque no existan problemas de repartos entre fracciones, para los que sirva.

Relacionar los problemas con los algoritmos sigue siendo una necesidad para comprender mejor los conceptos (Flores, 2008), especialmente la división de fracciones. Sin relacionarlos es difícil aprender la división de fracciones con sentido.

# REFERENCIAS.

CONTRERAS, M. (2012). *Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. Un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje.* Tesis doctoral. Universidad de Valencia.

FLORES, P. (2008). El algoritmo de la división de fracciones. *Epsilon*, 70, 27-40.

FLORES, P. (2013). ¿Por qué multiplicar en cruz? Curso de formación inicial de profesores de matemáticas en la Universidad. Conferencia plenaria en VII CIBEM. Montevideo, *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. ISSN 2301-0797.

GREER, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D.A. Grouw (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan.

MA, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teacher' understanding of fundamental mathematics in China and the United Status.* Laerence Erlbaum Associates: Mahwah, NJ.

MÁRQUEZ, A. (2013). *Conocimiento profesional de un grupo de profesores sobre la división de fracciones.* Trabajo fin de máster no publicado, Universidad de Granada, España.

MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria.

RICO, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 1, 39-63.