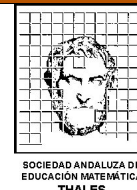




XV CONGRESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS
MATEMÁTICAS: EL SENTIDO DE LAS MATEMÁTICAS.
MATEMÁTICAS CON SENTIDO



LA IDENTIFICACIÓN VISUAL DEL RESTO DE LA DIVISIÓN CON NÚMEROS DECIMALES COMO OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO

Ana Belén Cabello Pardos, *Universidad Complutense, Madrid,*
acabel01@ucm.es

M^a Isabel Rodríguez Cartagena, *Universidad Complutense, Madrid,*
mariai23@ucm.es

Martín M. Garbayo Moreno, *Universidad Complutense, Madrid,*
garbayo@ucm.es

Mercedes Hidalgo Herrero, *Universidad Complutense, Madrid,*
mhidalgo@ucm.es

RESUMEN.

La identificación visual del resto de la división con números decimales, como si se tratase de una división de números naturales, constituye un obstáculo epistemológico, cuyas características han sido constatadas a partir de la investigación realizada con una muestra de 151 alumnos de Secundaria y Bachillerato en la Comunidad de Madrid. Se analizan los conflictos entre la imagen conceptual y la definición del concepto de resto de una división, mostrando la fuerza que tiene la imagen sobre la definición, apoyada en otro obstáculo epistemológico. Solo un grupo reducido de alumnos manifiesta una correcta adquisición del concepto "resto de la división de números decimales" al reflejar la coherencia entre la imagen conceptual y la definición del concepto.

Nivel educativo: Secundaria y Bachillerato.

1. INTRODUCCIÓN.

En la división, a diferencia de las otras operaciones aritméticas, dados dos números, dividendo y divisor, se obtienen dos resultados, cociente y resto, siendo este último generalmente relegado en su tratamiento por el protagonismo del cociente. En el presente trabajo se presta atención a la comprensión del resto, con un planteamiento descontextualizado, en el caso de que el dividendo sea un número decimal y el divisor un número natural. El motivo de centrar la investigación en este aspecto es que cualquier división de números decimales se transforma en una división de números naturales o en una división de un número decimal entre un número natural.

En las divisiones con números decimales, existen dificultades en la identificación del resto de la división (Llinares, 2003; Rojas y Flores, 2010).

La presente investigación muestra que los alumnos tienen imágenes conceptuales erróneas del resto de la división de un número decimal entre un número natural. Siguiendo el modelo cognitivo imagen del concepto-definición del concepto (Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1975, 1983), se puede afirmar que, al realizar la tarea de identificación del resto, se activa solamente la celda de la imagen del concepto y los alumnos responden erróneamente. Este error está

motivado por un obstáculo epistemológico (Brousseau, 1976, 1983, 1989) de fuerte componente visual, derivado de la división de números naturales. La imagen errónea fuerza la prueba de la división (para obtener el resultado deseado cometiendo un error en la suma de números decimales), sin que se produzca una corrección de la imagen del concepto por la definición del mismo. La imagen conceptual y la definición conceptual entran en conflicto (Figura 1).

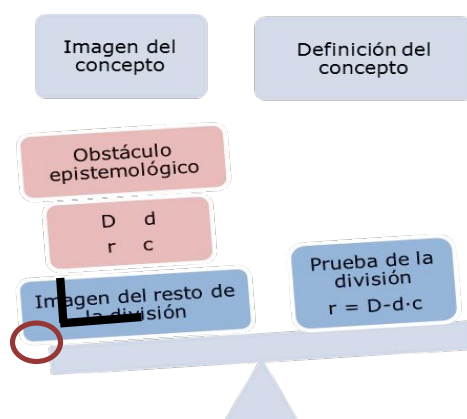


Figura 1. Conflicto planteado entre la imagen del concepto "resto de la división de un número decimal entre un número natural" y la definición del concepto (elaboración propia).

La corrección del error es la creación de imágenes conceptuales correctas que permitan la explicitación de la resolución del conflicto planteado entre la imagen y la definición (Figura 2).

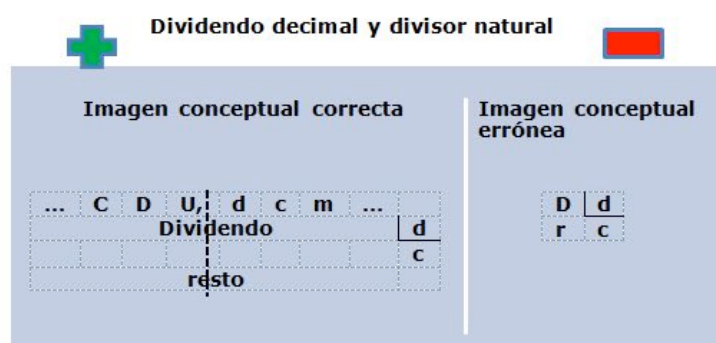


Figura 2. Imágenes conceptuales del resto de la división de un número decimal entre un número natural (elaboración propia).

2. MARCO TEÓRICO.

En este epígrafe se exponen los dos referentes teóricos en los que se basa la investigación.

2.1. EL MODELO COGNITIVO IMAGEN DEL CONCEPTO-DEFINICIÓN DEL CONCEPTO.

El primer referente teórico de esta investigación es el modelo cognitivo imagen del concepto-definición del concepto (Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1975, 1983).

Por un lado, se considera el dibujo (*picture*) mental de un concepto, es decir, el conjunto de todos los dibujos, representaciones visuales y símbolos que el alumno ha asociado con el concepto en su mente. Por otro lado, se consideran las propiedades y procedimientos que también ha asociado con el concepto. Con estos elementos se define la imagen del concepto como el dibujo mental junto con dichas propiedades y procedimientos.

La definición del concepto es una expresión verbal que lo explica con precisión.

Para cada concepto, se supone la existencia de dos celdas en la estructura cognitiva, una para la imagen y otra para la definición, que pueden interactuar tanto en la formación de conceptos como en la realización de tareas, pudiendo entrar ambas en conflicto.

En este modelo se analizan las tres modalidades de interacción que implícitamente asume la mayoría de los profesores cuando se realiza una tarea.

La primera modalidad es la interacción definición-imagen-definición, la segunda consiste en la activación de la definición del concepto y la tercera es la interacción imagen-definición (Vinner, 1983). Las tres coinciden en que la respuesta pasa por la consulta de la definición conceptual.

Sin embargo, el modelo sostiene que no se puede forzar a la estructura cognitiva a utilizar definiciones y que, lo que ocurre es que, generalmente, la celda de la definición del concepto no se activa (Figura 3).

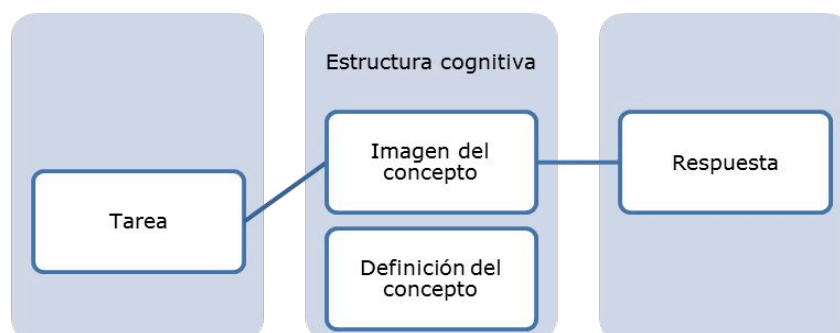


Figura 3. Activación de la imagen del concepto (basado en Vinner, 1983).

2.2. LOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS.

El segundo referente teórico lo constituye el estudio de los obstáculos epistemológicos iniciado por Bachelard (1938) en el campo de las Ciencias Experimentales y propuesto por Brousseau (1976, 1983) en Matemáticas. Este aspecto se concreta en el estudio de los obstáculos epistemológicos en el ámbito de los números decimales. Las investigaciones realizadas en este sentido (Artigue, 1990; Brousseau, 1980, 1981, 1989; Castro, 2001; Centeno, 1988; Llinares, 2003; Ruiz, 2004; Ruiz y García, 2009), presentan el dominio de los números naturales como la fuente de los obstáculos epistemológicos detectados en los números decimales.

Se afirma (Brousseau, 1983) que un obstáculo epistemológico es un conocimiento, válido en determinado ámbito, pero falso en un ámbito nuevo, que se manifiesta a través de errores, oponiendo resistencia a la adquisición del nuevo conocimiento y apareciendo de forma imprevista, siendo además, universal (no personal) y constitutivo del saber, es decir, que solo se puede

rechazar explícitamente integrando su negación en el aprendizaje bajo la forma de contraejemplos (Figura 4).

Obstáculo epistemológico	Conocimiento, válido en determinado ámbito, pero falso en un ámbito nuevo.
	Se manifiesta a través de errores.
	Opone resistencia a la adquisición del nuevo conocimiento y aparece de forma imprevista.
	Universal (no personal).
	Constitutivo del saber: solo se puede rechazar explícitamente integrando su negación en el aprendizaje bajo la forma de contraejemplos.

Figura 4. Características del obstáculo epistemológico según Brousseau, 1983 (elaboración propia).

3. METODOLOGÍA.

Esta investigación se plantea dentro de la línea de indagación en las imágenes conceptuales y determinación de obstáculos epistemológicos en el aprendizaje.

Tiene su origen en la detección generalizada del error de identificación del resto en las divisiones de números decimales, en un grupo de 1º de ESO. Se planteó el objetivo de determinar las causas de dicho error y su incidencia en el alumnado.

La hipótesis de la investigación es que los alumnos tienen imágenes conceptuales erróneas del resto de la división de números decimales debido a un obstáculo epistemológico derivado del ámbito de los números naturales. Los alumnos tienen la imagen conceptual de una cuadrícula en la que el resto ocupa la celda inferior izquierda. Para corroborar dicha hipótesis se indaga en dichas imágenes conceptuales y se analizan las características del obstáculo epistemológico. Finalmente se realiza una propuesta metodológica de corrección del error basada en la creación de imágenes conceptuales adecuadas.

3.1. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.

La investigación se planteó con dos objetivos.

- Analizar las imágenes conceptuales de los alumnos sobre el resto de la división con números decimales e identificar el error.
- Determinar si dicho error está originado por un obstáculo epistemológico.

3.2. MUESTRA.

La muestra utilizada en la investigación es de carácter incidental ya que es la que se ha tenido disponible en el momento de la investigación (Pereda, 1987). Está formada por alumnos de Secundaria y Bachillerato¹. Consta de 151 unidades de ambos géneros (53% mujeres, 45,7% hombres y 1,3% no han contestado) distribuidos por cursos como se muestra en la siguiente tabla (Tabla 1).

	Mujeres	%	Hombres	%	nc	%	TOTAL	%
1º ESO	32	51,1	24	42,9			56	37,1
4º ESO	18	39,1	28	60,9			46	30,5
1º Bach CCNN	16	69,6	7	30,4			23	15,2
2º Bach CCSS	14	53,8	10	38,5	2	7,7	26	17,2
TOTAL	80	53,0	69	45,7	2	1,3	151	

Tabla 1. Muestra de la investigación.

3.3. MÉTODO.

La investigación tiene un diseño metodológico experimental de carácter cuantitativo basado en el análisis de las tablas de porcentajes de las respuestas de los alumnos a las cuestiones planteadas.

Se presentó una división de un número decimal entre un número natural, ofreciendo la resolución. Se indica cuál es el cociente y se pide identificar el resto y realizar la prueba de dicha división (Figura 5).

$$\begin{array}{r}
 27,87 \quad | \quad 11 \\
 \underline{22} \quad \quad \\
 58 \quad \quad \\
 \underline{55} \quad \quad \\
 37 \quad \quad \\
 \underline{33} \quad \quad \\
 4
 \end{array}$$

- Al dividir $27,87 : 11$ se obtiene 2,53 como cociente y como resto.
- Realiza la prueba de la división.

Figura 5. División de un número decimal entre un número natural. Identificación del resto y realización de la prueba de la división.

El ítem "a", permite conocer las imágenes conceptuales del resto mediante el análisis de los distintos tipos de respuesta (correcta, no respuesta, error típico y otros errores).

En el ítem "b" se analiza la utilización de la definición del concepto (correcta, no respuesta, alineación a la derecha al sumar el resto al resultado del divisor por el cociente y otros errores).

El estudio conjunto de ambos ítems, permite conocer en detalle los conflictos entre la imagen conceptual y la definición conceptual.

4. RESULTADOS.

Una vez tabulados los datos, se cuantificó el porcentaje de cada una de las respuestas dadas por los alumnos en cada uno de los ítems. En el ítem "a" se ha podido identificar el "error típico" que consiste en responder "el resto es 4", con un porcentaje de aparición del 90,1%. Solo un grupo reducido (8,6%) responde correctamente "el resto es 0,04". La no respuesta es un caso aislado (0,7%) y lo mismo sucede con otro error "el resto es 5" (Tabla 2).

Ítem "a"	Frecuencia	Porcentaje
ns/nc	1	0,7
El resto es 4	136	90,1
El resto es 0,04	13	8,6
El resto es 5	1	0,7
Total	151	100,0

Tabla 2. Respuestas al ítem "a".

En el ítem "b" el "error típico" a la hora de realizar la prueba de la división, ha sido la alineación a la derecha que efectúan los alumnos al sumar el resto al resultado de multiplicar el divisor por el cociente, con un porcentaje de aparición del 75,5%.

Un grupo reducido (14,6%) realiza correctamente la prueba de la división. También son pocos (5,3%) los que no terminan la prueba de la división pues solo multiplican el dividendo por el divisor. La no respuesta tiene muy poca presencia (1,3%). Además se presentan casos aislados de otros errores no reseñables (Tabla 3).

Ítem "b"	Frecuencia	Porcentaje
ns/nc	2	1,3
Alineación a la derecha	114	75,5
Realiza correctamente la prueba de la división	22	14,6
No termina la prueba de la división	8	5,3
Realiza la prueba de la división con el resto 4	2	1,3
Prueba de la división incorrecta con 0,4 como resto (en "a" ha escrito 4)	1	0,7
Prueba de la división incorrecta $D \cdot d + r$	1	0,7
Indica la prueba de la división pero utilizando como resto el número 5	1	0,7
Total	151	100,0

Tabla 3. Respuestas al ítem "b".

Los resultados conjuntos de ambos ítems se muestran en la siguiente tabla (Tabla 4), en la que se puede destacar el error típico que consiste en decir que el resto es 4 y "forzar" la prueba de la división para que se cumpla, alineando a la derecha la suma de decimales. Esto ocurre con un porcentaje del 74,17%.

$$\begin{array}{r}
 2,53 \\
 \cdot 11 \\
 \hline
 253 \\
 + 253 \\
 \hline
 27,83 \\
 + \quad 4 \rightarrow \text{resto} \\
 \hline
 27,87
 \end{array}$$

Figura 6. Prueba incorrecta de la división utilizando el resto 4 y sumando los números decimales alineados a la derecha.

Por otro lado, también es destacable el hecho de que solo un 7,28% responde correctamente "el resto es 0,04" y además realiza correctamente la prueba de la división.

Ítem "a"	Ítem "b"	Frecuencia	Porcentaje
ns/nc	Prueba de la división correcta	1	0,66
	ns/nc	2	1,32
El resto es 4	Alineación a la derecha	112	74,17
	Realiza correctamente la prueba de la división	10	6,62
	No termina la prueba de la división	8	5,30
	Realiza la prueba de la división con el resto 4	2	1,32
	Prueba de la división incorrecta con 0,4 como resto (en "a" ha escrito 4)	1	0,66
	Prueba de la división incorrecta $Dxd+r$	1	0,66
El resto es 0,04	Alineación a la derecha	2	1,32
	Realiza correctamente la prueba de la división	11	7,28
El resto es 5	Indica la prueba de la división pero utilizando como resto el número 5	1	0,66
		151	100,0

Tabla 4. Respuestas a los ítems "a" y "b".

5. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS.

El porcentaje prácticamente nulo de no respuesta en el ítem "a" (0,7%) significa que los alumnos están convencidos de su respuesta. El error típico ("el resto es 4") tiene un elevado porcentaje de aparición (90,1%), lo cual confirma la hipótesis de trabajo sobre la identificación visual del resto de la división. Solo un 8,6% de los alumnos responden correctamente, sabiendo identificar el resto de la división. Es decir, el 90,1% de los alumnos tiene una imagen conceptual errónea y solo el 8,6% tiene la imagen correcta.

Resulta sorprendente ver cómo la imagen conceptual errónea fuerza la prueba de la división, apoyándose en el obstáculo epistemológico de la alineación a la derecha en la suma de decimales, para que resulte correcta (74,17%).

Además, se presentan otros dos tipos de conflictos. Por un lado, los que responden que el resto es 4, pero realizan correctamente la prueba de la división utilizando como resto 0,04 (6,62%) y, al revés, los que responden que el resto es 0,04 pero realizan la prueba de la división con el resto 4 alineándolo a la derecha (1,32%).

Solo un grupo muy reducido de alumnos tiene la imagen conceptual correcta ("el resto es 0,04") y muestra coherencia entre la imagen y la definición del concepto, realizando correctamente la prueba de la división (7,28%).

6. CONCLUSIONES.

En primer lugar, y siguiendo el orden de los objetivos planteados en la investigación, se concluye que las imágenes conceptuales del resto de la división con números decimales son erróneas en su mayoría (90,1%). La imagen del resto es "la cuadrícula inferior izquierda". Para dicho porcentaje de alumnos, el resto es el número natural (es decir, sin tener en cuenta el valor posicional de las cifras), que aparece en la cuadrícula inferior izquierda. Se ha visto la fuerza que tiene esta imagen conceptual a la hora de realizar la prueba de la división porque se apoya en otro obstáculo epistemológico (alineación a la derecha en la suma de decimales, por extensión del algoritmo con números naturales).

En segundo lugar, se concluye que la identificación visual del resto de la división de números decimales como si se tratase del resto de la división de números naturales, es un obstáculo epistemológico. En efecto, se constata que dicha interpretación cumple las características de los obstáculos epistemológicos:

- La "identificación visual del resto" es un conocimiento válido en el ámbito de los números naturales, pero falso en el ámbito de los números decimales. Si se tratase de realizar la división $2787:11$, el cociente sería 253 y el resto sería 4 (Figura 7).

$\begin{array}{r} 2787 \overline{) 11} \\ 58 \quad 253 \\ 37 \\ 4 \end{array}$ <p>El resto es 4</p>	$\begin{array}{r} 27,87 \overline{) 11} \\ 5 \quad 8 \quad 7 \quad 2,53 \\ 3 \quad 7 \\ 4 \end{array}$ <p>El resto no es 4, es 0.04</p>
---	---

Figura 7. Identificación visual del resto en la división con números naturales y con decimales.

- El error manifestado consiste en no tener en cuenta el valor posicional de las cifras del resto.
Al realizar la división, los alumnos que han respondido erróneamente “el resto es 4” (90,1%) no han tenido en cuenta que el 4 ocupa el lugar de las centésimas (Figura 8).

$$\begin{array}{r|l}
 \text{D} & \text{U,} \\
 2 & 7, \\
 & 5
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \text{d} \\
 8 \\
 8 \\
 3
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \text{c} \\
 7 \\
 7 \\
 4
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \underline{11} \\
 2,53
 \end{array}$$

Figura 8. División con números decimales teniendo en cuenta las unidades.

- Opone resistencia a la adquisición del nuevo conocimiento ya que se mantiene aunque se realice la prueba de la división y a pesar de haber sido instruidos los alumnos en la división con números decimales.
Se ha podido constatar que los alumnos (74,17%) fuerzan la prueba de la división cometiendo el error de sumar números decimales alineándolos a la derecha, para que resulte la división correcta (Figura 6).
- La “identificación visual del resto” es universal (no personal).
Se ha identificado de manera generalizada en un amplio grupo de alumnos de diversas edades (desde 1º de ESO hasta 2º de Bachillerato).
- Es constitutivo del saber, es decir, solo se puede rechazar explícitamente mediante su integración en el aprendizaje por medio de contraejemplos.
Según el modelo cognitivo imagen del concepto-definición del concepto (Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1975, 1983), lo que ocurre en la práctica es que se razona a partir de las imágenes conceptuales, como se ha podido constatar en esta investigación. Por tanto, conviene incidir en la creación de imágenes conceptuales correctas.
Con la propuesta metodológica de trazar una línea vertical en el lugar de la coma (Figuras 2, 7 y 8) el alumno crea imágenes conceptuales adecuadas que le permiten producir un razonamiento correcto.

REFERENCIAS.

- ARTIGUE, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23), 241-286.
- BACHELARD, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin.
- BROUSSEAU, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Comptes-rendus de la XXVIII rencontré organisée par la CIEAEM*, (págs. 101-107). Lovaine-la-Neuve.
- BROUSSEAU, G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 1 (1), 11-59.
- BROUSSEAU, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 2 (1), 37-127.

BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 4 (2), 165-198.

BROUSSEAU, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En N. Bednarz, & C. Garnier, *Construction des savoirs, Obstacles et Conflits* (págs. 41-63). Montréal: CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc.

CASTRO, E. (2001). Números decimales. En E. Castro, *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (págs. 315-345). Madrid: Síntesis.

CENTENO, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.

LLINARES, S. (2003). Matemáticas escolares y competencia matemática. En M. C. Chamorro, *Didáctica de las Matemáticas* (págs. 3-29). Madrid: Pearson Educación.

PEREDA, S. (1987). *Psicología Experimental. I Metodología*. Madrid: Pirámide.

ROJAS, N., & FLORES, P. (2010). Experiencia de reflexión docente: el resto de la división. En J. Berral, M. De la Fuente, & F. España, *Actas del XIII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: Matemáticas para observar y actuar* (págs. 522-529). Córdoba: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

RUIZ, L. (2004). Construcción de los números decimales en la Escuela Primaria. De las fracciones a la notación decimal. *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (págs. 189-232). Madrid: MEC.

RUIZ, L., & GARCÍA, F. (2009). Arithmetica Practica y Specvlativa de J. Pérez de Moya (1513-1596). Análisis epistemológico y didáctico. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 103-134.

TALL, D., & VINNER, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

VINNER, S. (1975). The Naive Platonic Approach as a Teaching Strategy in Arithmetics. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 339-350.

VINNER, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology Vol 14*, 293-305.

ⁱ IES Narcís Monturiol (Parla), IES Joaquín Araújo (Fuenlabrada), IES Menendez Pelayo (Getafe).