# LAS NOCIONES DE VECINDAD Y DE ENTORNO EN LA COMPRENSIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

**Maribel Anacona**. *Universidad del Valle, Colombia*
**Luis Carlos Arboleda** . *Universidad del Valle, Colombia*
**Javier Pérez Fernández**. *Universidad de Cádiz, España*

## RESUMEN.

La problemática alrededor de la enseñanza de los números reales es un tema de gran sensibilidad en la comunidad educativa a nivel internacional. Las presentaciones axiomáticas, frecuentes en los textos de cálculo y análisis, generalmente ocultan la intervención de conceptos de naturaleza topológica esenciales en la construcción de los reales.

El propósito de esta comunicación es mostrar, a partir de la construcción de los reales del grupo Bourbaki, que las nociones de *vecindad* y *entorno* proveen a través de las estructuras topológicas y uniformes, condiciones abstractas que favorecen la intuición y dotan de sentido los conceptos de continuidad, convergencia y completez, claves en la constitución de los reales.

**Nivel educativo**: Bachillerato, Universidad.

## 1. INTRODUCCIÓN.

Es indudable la importancia que tiene en la formación matemática de los estudiantes de Matemáticas y de Licenciatura en Matemáticas, la comprensión de las propiedades fundamentales de los números reales (**R**). Sin embargo, **R** se presenta generalmente, como un conjunto de números que satisface los axiomas de una estructura de cuerpo más el axioma de completitud. Este último axioma contiene la esencia del continuo numérico, pero su presentación axiomática no deja ver fácilmente cuáles son las propiedades topológicas que diferencian a **R** del conjunto **Q** de los números racionales.

De ahí la importancia de estudiar algunas de las construcciones y tratar de identificar en el proceso mismo de elaboración, algunos de los conceptos esenciales que caracterizan a **R**. Por esta razón, consideramos de utilidad que el docente reconozca el grado de complejidad que se sintetiza y se oculta detrás de las presentaciones axiomáticas, y pueda identificar en el marco de una reflexión histórico-epistemológica algunas de las dificultades inherentes a su enseñanza.

La construcción de los reales realizada por el grupo Bourbaki, ofrece algunos elementos conceptuales que sirven de sustento para una reflexión educativa a nivel de la formación secundaria y universitaria. Intentamos mostrar que desde el nivel de abstracción y generalidad, característico de la práctica matemática de Bourbaki, es posible identificar el papel que desempeñan ciertos conceptos en la constitución de **R**; lo cual es difícil de observar desde espacios muy particulares.

Iniciamos con una presentación muy esquemática de la construcción de los reales por el grupo Bourbaki, en la que no nos interesan los detalles técnicos, sino el proceso lógico de construcción; de tal manera que podamos identificar los pasos y conceptos esenciales que lo conforman. Luego, haremos un análisis epistemológico del rol que juegan en dicha construcción las nociones de *vecindad* y *entorno*.

# 2. LOS REALES DE BOURBAKI

La construcción de los números reales por Bourbaki es una generalización de la construcción de los reales por Cantor. Mientras Cantor completa el cuerpo **Q** de los racionales, Bourbaki completa el grupo topológico **Q** dotado de una estructura uniforme. En ambos procesos se requiere del concepto de convergencia. Mientras en Cantor se trata de la convergencia de sucesiones de Cauchy de números racionales, en Bourbaki se trata de la convergencia de filtros de Cauchy.

## 2.1 LOS PASOS EN LA CONSTRUCCIÓN

Bourbaki parte de la consideración de **Q** como grupo aditivo, en el cual se define una relación de orden compatible con la estructura de grupo. Es decir, una relación que verifique la siguiente condición: $x \leq y \leftrightarrow x + z \leq y + z$, $\forall z \in \mathbf{Q}$. Esto significa que el orden es invariante bajo traslación. Tenemos entonces los racionales con las estructuras de grupo y de orden compatibles entre sí. En símbolos: $\langle \mathbf{Q}, +, \leq \rangle$.

Con esta relación de orden, Bourbaki define sobre **Q** una topología compatible con su estructura de grupo aditivo, a través de un *sistema fundamental de vecindades* alrededor del origen, que identificamos por $\tau = \{(-a, a): a \in \mathbf{Q}^+\}$. Con la introducción de la topología Bourbaki está garantizando el tratamiento matemático de todos los conceptos relacionados con la noción de proximidad a un punto fijo, tales como continuidad puntual, filtro y convergencia, claves en la construcción de los reales. Que esta topología sea compatible con la estructura de grupo aditivo significa que la función *suma* $f$: $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ definida como $f(x, y)=x + y$ es continua en $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$; y que la función *opuesto* $g$: $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ definida como $g(x)=-x$ es también continua en **Q**. De esta forma $\langle \mathbf{Q}, +, \leq, \tau \rangle$ se constituye en el espacio topológico de la recta racional.

Posteriormente, Bourbaki define una estructura uniforme sobre el grupo topológico **Q**, a través del *sistema fundamental de entornos*: $\mathrm{U} = \{\mathrm{U}a: a \in \mathbf{Q}^+\}$, donde $\mathrm{U}a = \{(x, y) \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}: |x-y|<a, a \in \mathbf{Q}^+\}$. Estos *entornos* formalizan la noción de cercanía entre dos puntos cualesquiera del espacio. Con ellos podemos expresar formalmente la idea de que "$x_1$ está tan cerca de $x_2$ como $y_1$ lo está de $y_2$". Con la introducción de las estructuras uniformes Bourbaki garantiza el tratamiento de los conceptos relacionados con la "cercanía" entre puntos dos a dos, tales como continuidad uniforme, filtros de Cauchy y convergencia de filtros de Cauchy; conceptos esenciales en la construcción de los reales. Las estructuras uniformes son una generalización de la noción de distancia y dotan de una especie de seudométrica a los espacios topológicos. Un espacio uniforme tiene por tanto una estructura más débil que una estructura métrica, pero más rica que una estructura topológica. En símbolos, se tiene el espacio topológico uniforme $\langle \mathbf{Q}, +, \leq, \tau, \mathrm{U} \rangle$.

Una vez **Q** está dotado de estas dos estructuras, Bourbaki completa el conjunto **Q**, a través de los filtros minimales de Cauchy; y finalmente extiende las propiedades algebraicas de grupo a cuerpo, para obtener el cuerpo completo **R**. El esquema de la construcción se presenta en la siguiente figura.

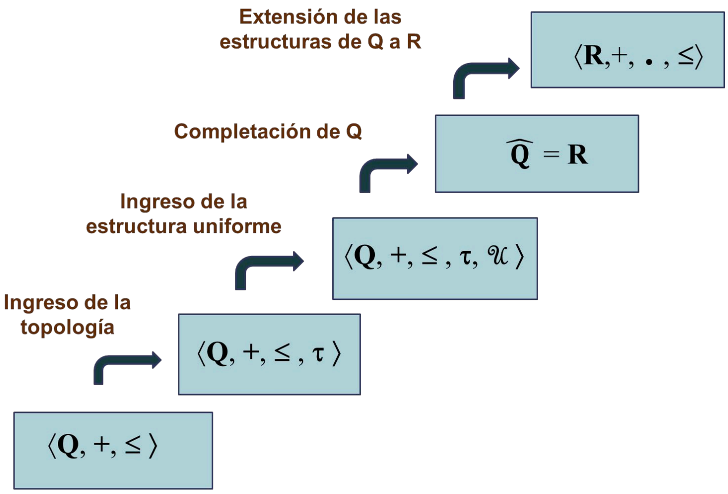


Figura 1. Esquema de la construcción de los reales por Bourbaki

Bourbaki cuando define una topología sobre **Q** compatible con su estructura de grupo aditivo, establece como punto de partida un dominio de magnitudes topológicas (la topología al mismo nivel del álgebra y el orden), que posteriormente completa a través de la estructura uniforme; sólo al final hace la extensión algebraica de grupo a cuerpo. De esta forma, la topología se constituye en un requisito epistemológico para la construcción, a diferencia de las construcciones clásicas, en las que la topología se agrega sólo al final.

Otro momento clave lo constituye el ingreso de las estructuras uniformes, que permiten dotar al espacio topológico **Q** de una especie de seudométrica, clave en el proceso de completación. Este aspecto también es novedoso en la propuesta de Bourbaki, puesto que en las construcciones clásicas, se parte de **Q** como espacio métrico, lo cual hace innecesario la presencia de las estructuras uniformes.

A continuación presentamos los conceptos que Bourbaki requiere en la construcción de los reales y que permite comprender el ingreso de las estructuras topológicas y uniformes.

## 2.2 Los Conceptos Claves en la Construcción

Recordemos que la noción de *vecindad* captura la noción de "cercanía" en un espacio abstracto. En un espacio topológico, podemos hablar legítimamente de los puntos de un espacio que están "cercanos" a un punto dado, o que son "vecinos" de un punto fijo. Esta noción es clave para establecer, por ejemplo, la *continuidad puntual* de una función definida entre espacios topológicos. Sabemos que en este tipo de funciones, las imágenes de los puntos cercanos a un punto dado, están cerca a la imagen del punto.

Una noción de suma importancia que introduce Bourbaki es la de *filtro*, la cual fue definida por Henri Cartan (Cartan 1937) en las tempranas épocas del grupo. Los *filtros* constituyen una generalización de la noción de sucesión. Ellos son empleados en espacios en los que no se verifica ningún axioma de numerabilidad y dónde la topología del espacio no hace referencia a ninguna métrica.

Junto con la noción de filtro está la definición de *límite* de un filtro: un filtro F converge a un punto $x$, si cualquier vecindad (por pequeña que sea) que se tome alrededor del punto $x$ pertenece al filtro F. Los conceptos de filtro y límite de filtro, equivalen a los conceptos de sucesión y convergencia de una sucesión, en espacios completamente abstractos.

Un papel análogo al que desempeña la noción de vecindad en los espacios topológicos, lo desempeña la noción de *entorno* en los espacios uniformes. Fue André Weil quien en 1936 introdujo la noción de espacio uniforme, a través de la formalización de los *entornos* (Dugac 1984). Los entornos capturan la noción de cercanía dos a dos, permiten formalizar la idea de que "$x_1$ está tan cerca de $x_2$ como $y_1$ lo está de $y_2$". Esto no es posible en un espacio topológico, pues la noción de vecindad sólo permite establecer que "$x_1$ está tan cerca de $x$ como $x_2$ lo está de $x$".

Un *entorno* sobre los números racionales está dado por el siguiente conjunto: $U_a = \{(x, y) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}: |x-y| < a\}$, donde $a \in \mathbf{Q}^+$.

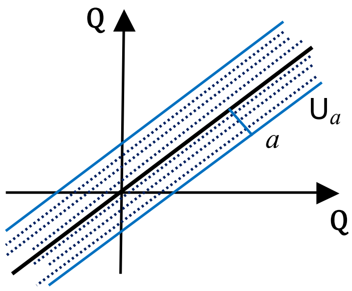


Figura 2. Un entorno sobre los racionales

El conjunto $\mathrm{B} = \{U_a;\ a \in \mathbf{Q}^+\}$ constituye un *sistema fundamental de entornos* de la estructura uniforme del grupo aditivo **Q** de la recta racional.

Con el ingreso de las *estructuras uniformes*, Bourbaki puede definir otros conceptos que son sustanciales en la construcción de los reales, tales como filtros de Cauchy y convergencia de filtros de Cauchy. Un *filtro de Cauchy* es un filtro que contiene puntos "muy cercanos" dos a dos. Los elementos minimales (por la relación de inclusión) del conjunto de filtros de Cauchy sobre un espacio uniforme son llamados *filtros minimales de Cauchy*. Ellos desempeñan el rol de "representantes de la clase de equivalencia" de los filtros de Cauchy que convergen a un punto dado.

Así como en los espacios métricos se tiene que toda sucesión convergente es de Cauchy, en los espacios uniformes se tiene que todo filtro convergente es un filtro de Cauchy. Pero la recíproca sólo se verifica en los espacios completos. Un *espacio completo* es un espacio uniforme en el que todo filtro de Cauchy converge. Bourbaki finalmente muestra que el conjunto $\mathbf{Q}^*$ formado por todos los filtros minimales de Cauchy sobre **Q**, es completo.

Se trata de la misma construcción de Cantor, pero a un nivel más alto de abstracción y generalidad. Si bien para Cantor, los reales son clases de equivalencia de sucesiones de racionales de Cauchy, para Bourbaki los números reales son para Bourbaki filtros minimales de Cauchy.

Una vez hemos esbozado algunos aspectos centrales de la construcción de Bourbaki, nos detenemos a analizar el papel que juegan las nociones de *vecindad* y de *entorno* en el proceso mismo de comprensión de los reales.

## 3. LAS NOCIONES DE VECINDAD Y DE ENTORNO EN LA CONSTRUCCIÓN DE LOS REALES

En primer lugar, nos referimos a la noción de *vecindad* formalizada a través de las estructuras topológicas y al papel que juega en la definición de las propiedades abstractas de *continuidad puntual* de una función y de *convergencia de filtros*, ambos esenciales en la construcción de **R**.

La definición formal de continuidad puntual de una función definida en espacios topológicos es la siguiente (Bourbaki 1965, p. 24):

Se dice que una aplicación $f$ de un espacio topológico X en un espacio topológico X' es *continua* es un punto $x_o \in$X si, cualquiera que sea la vecindad V' de $f(x_o)$ en X', existe una vecindad V de $x_o$ en X tal que la relación $x \in$V implica que $f(x) \in$ V'.

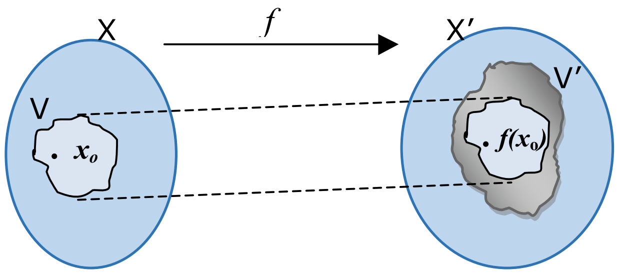


Figura 3. Continuidad puntual de una función definida entre espacios topológicos

Intuitivamente decimos que una función es *continua* en un punto $x_o$, si $f(x)$ está tan "cerca" como se quiera de $f(x_o)$, siempre que $x$ esté muy "cerca" de $x_o$. Es decir, si las imágenes de los puntos "cercanos" a $x_o$ están "cerca" de $f(x_o)$. Esta definición muestra que la noción de vecindad está en la base de la noción de continuidad. Es importante resaltar aquí que, el hecho de pasar a un nivel más alto de abstracción y generalidad no significa necesariamente mayor dificultad de comprensión. Por el contrario, consideramos que la definición de continuidad en espacios topológicos resulta incluso más intuitiva que la expresada en términos de $\varepsilon$ y $\delta$, cuando se define tradicionalmente la continuidad puntual en una función de **R** en **R**.

La noción *vecindad* también es clave en la definición de límite de un filtro. Recordemos que un filtro F converge a un punto $x$, si cualquier vecindad (por pequeña que sea) que se tome alrededor del punto $x$ pertenece al filtro F. En esta definición se ve claramente que el asunto de la convergencia está relacionado con la "cercanía a un punto dado".

Sin embargo, la noción de vecindad no es suficiente para definir otros conceptos fundamentales como continuidad uniforme, filtros de Cauchy y convergencia de filtros de Cauchy.

La definición formal de continuidad uniforme de una función definida en espacios uniformes es la siguiente (Bourbaki 1965, p.187):

Una aplicación $f$ de un espacio uniforme X en un espacio uniforme X′, es *uniformemente continua* si, para cada entorno V′ de X′, existe un entorno V de X tal que la relación $(x, y) \in$V implica $(f(x), f(y)) \in$ V′.

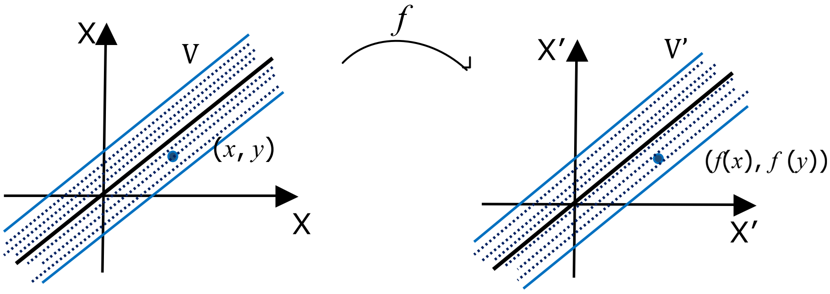


Figura 4. Continuidad uniforme de una función definida entre espacios uniformes

Intuitivamente decimos que una función $f$ es uniformemente continua si $f(x)$ y $f(y)$ "están tan cerca" como se quiera, siempre que $x$ y $y$ "estén muy cerca". Obsérvese que la noción de cercanía que se requiere es distinta a la ofrecida por una *vecindad*. En la continuidad uniforme no se mira la función en torno a un punto fijo, sino que los puntos se comparan dos a dos. De ahí la necesidad de definir, las estructuras uniformes, que dan legitimidad conceptual a la noción de *entorno*, la cual captura la "cercanía dos a dos".

De igual forma la noción de *entorno* está en la base de la definición de *filtro de Cauchy*. Tal como habíamos mencionado, un filtro de Cauchy es un filtro que contiene conjuntos "muy pequeños"; es decir, un filtro que contiene puntos "muy cercanos" dos a dos. Los filtros de Cauchy para Bourbaki, al igual que las sucesiones de Cauchy para Cantor, desempeñan un papel fundamental en la construcción de los reales. Recordemos que los reales son finalmente para Bourbaki, filtros minimales de Cauchy.

# 4. CONCLUSIONES

Las nociones de *vecindad* y de *entorno* juegan un papel fundamental en la definición de conceptos claves en la construcción de los reales por Bourbaki, tales como continuidad, continuidad uniforme, filtros, filtros de Cauchy, convergencia de filtros y convergencia de filtros de Cauchy. Ellas brindan legitimidad matemática a la noción de cercanía. Si bien la noción de *vecindad* nos habla de los puntos "vecinos" o "cercanos" a un punto dado; la noción de *entorno* hace lo propio con puntos comparados dos a dos.

A pesar de su importancia en la construcción de los reales, ellas no aparecen frecuentemente y de manera explícita en las construcciones de **R**. La razón fundamental es que no es fácil evidenciar su necesidad conceptual en espacios particulares como **Q** o el mismo **R**. En estos espacios la *cercanía* está garantizada por la noción de *distancia*, y en los espacios métricos no se requiere de las nociones de vecindad y de entorno. Precisamente ellos surgen como respuesta matemática al problema de dotar de una noción de cercanía a los espacios más abstractos y generales (Arboleda 1980).

Es así como la construcción de los reales por Bourbaki, ofrece un escenario muy interesante de explorar puesto que los conceptos se presentan en un alto nivel de generalidad; y desde allí podemos ver algunas nociones básicas que se "mimetizan" en las particularidades de los espacios más familiares.

Para Bourbaki entre más abstractos se presentan los conceptos, más se fortalece la intuición de los mismos, porque la abstracción elimina todo esto que es contingente en una teoría (Bourbaki 1962). Esto significa que entre más abstracto sea el concepto, hay menos factores adicionales que pueden confundir la intuición del mismo. En un nivel más alto de abstracción, la intuición es más apropiada pues existen menos posibilidades de equivocación. Es una razón más para entender en un sentido amplio la propuesta de Bourbaki, en la que se llevan y se presentan los conceptos en su más alto grado de abstracción y generalidad.

En el programa de axiomatización estructural de los Bourbaki, simplicidad en la presentación formal de las teorías se identifica con economía de pensamiento. Las estructuras y sistemas axiomáticos expresan de la manera más general propiedades simples de distintas teorías particulares. Las formas de pensamiento asociadas con estructuras matemáticas constituyen un avance significativo con respecto a anteriores formas de trabajo centradas en particularidades y sobrecargadas de hipótesis restrictivas y específicas.

La reflexión epistemológica sobre el significado de la simplicidad en la ciencia puede permitirle a quien enseña a tomar conciencia de que lo simple de la definición formal de un objeto se aprende, no tanto mediante la exhibición de ejemplares concretos, sino recreando la actividad matemática que condujo a lo simple a partir de problemas complejos. En este sentido, el ideal de simplicidad se constituye en un propósito central de la educación matemática como disciplina centrada en la formación de pensamiento matemático.

## REFERENCIAS.

ANACONA, M. & ORTIZ, G. (2011) La noción de vecindad en la apropiación de los números reales: Arbeláez, G., Recalde, L. (Eds). *Los números reales como objeto matemático. Una perspectiva histórico-epistemológica* (pp. 163-192). Cali: Programa editorial, Universidad del Valle.

ARBOLEDA, L.C (1980). *Las primeras investigaciones sobre los espacios topológicos*. X Coloquio colombiano de Matemáticas. Sociedad colombiana de matemáticas. Paipa.

BOURBAKI, N. (1962). La arquitectura de las matemáticas. En F. Le Lionnais (Ed). *Las grandes corrientes del pensamiento matemático* (pp. 36-49). Buenos Aires: Eudeba.

BOURBAKI, N. (1965). Topologie générale. *Éléments de Mathématique*. Livre III. Hermann. Paris.

CARTAN, H (1937). Théorie des filtres. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*. No. 205, pp. 595–598.

DUGAC, P. (1984). Histoire des espaces complets. *Revue d'histoire des sciences*. Tome 37, No. 1, pp. 3-28