

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA ENSEÑAR GEOMETRÍA ANALÍTICA. EL CASO DEL PROFESORADO EN MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

Virginia Ciccioli y Natalia Sgreccia

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de
Rosario. Argentina

ciccioli@fceia.unr.edu.ar, sgreccia@fceia.unr.edu.ar

Resumen

Este Proyecto ha sido presentado como Plan de Tesis de la Carrera de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias y la Matemática de Universidad del Centro de la Provincia de Buenos Aires. La investigación propuesta pretende caracterizar la configuración del *conocimiento matemático para enseñar (MKT)* geometría analítica en estudiantes del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario y sugerir consecuentemente algunas líneas de acción específicas que propendan al fortalecimiento de la formación que se ofrece. En particular, se procura hacerlo a través del análisis de la activación de los dominios del *MKT* y desde los aportes de asignaturas que propenden a sentar las bases para la enseñanza de esta rama de la Matemática. Esto es, desde el enfoque disciplinar y desde la práctica docente en el PM de la UNR, carrera en la que la doctoranda es egresada y docente.

Palabras clave: formación de profesores, *MKT*, geometría analítica.

1. Introducción

La importancia de hacer investigaciones especializadas en la formación de profesores en geometría analítica hace referencia a una problemática vigente relacionada con la enseñanza de la geometría en el nivel secundario.

Por un lado, según Gascón (2002, 2003) esta problemática surge como consecuencia de las limitaciones con que se abordan las *técnicas sintéticas* que, a su vez, dan sentido (son las razones de ser) a las *técnicas analíticas*, en dicho nivel. El autor reconoce que las técnicas analíticas son introducidas artificialmente como objetos de enseñanza en el nivel secundario superior, sin establecer ningún tipo de conexión con las técnicas sintéticas desarrolladas en los primeros años de la educación secundaria. Explica que, a pesar de la continuidad y complementariedad de ambas, existe una falsa controversia entre la geometría sintética y la geometría analítica que es fruto de un análisis epistemológico superficial. También Henríquez y Montoya (2015) hacen referencia a una falta de complementariedad (en el sentido de que se influyen mutuamente) entre los enfoques de geometría euclidiana con y sin coordenadas cartesianas -geometría analítica y geometría sintética-.

En concordancia con lo observado por Gascón (2002, 2003), Alves, Mendonça y Coletti (2010) concluyen, luego del estudio de algunos documentos oficiales y de libros didácticos, que el desarrollo de las nociones de rectas y planos en los espacios R^2 y R^3 alcanzan un nivel prioritariamente técnico en la enseñanza secundaria. No se explica específicamente la transición del marco geométrico al algebraico, esencial para su comprensión. También Bonilla y Parraguez (2013) hacen referencia a una falla en el tránsito (en el sentido de continuidad) entre los modos de pensamiento sintético geométrico, analítico aritmético y analítico estructural. Observan que aquellos

estudiantes en los que se promueve inicialmente este tercer modo de pensamiento son capaces de relacionar de manera más natural los enfoques sintético y analítico y, consecuentemente, comprender de manera más profunda.

La geometría analítica unifica el álgebra y la geometría sintética, como consecuencia de la asociación de números con puntos y de ecuaciones con figuras. Es por ello que una formación desprovista de ciertos aspectos geométricos sintéticos, en el sentido en que lo plantean los distintos autores mencionados, podría derivar en una algebrización de la geometría analítica, con una consecuente pérdida de sentido. Esto es advertido por Bishop (1987) cuando describe algunos obstáculos para el aprendizaje de la geometría y, en particular, de las geometrías vectorial y analítica.

Por otro lado, la problemática de la enseñanza de la geometría en el nivel secundario se suele relacionar con la complejidad subyacente en las conversiones entre registros de representación (Duval, 1999). Este es un aspecto inherente a la propia génesis de la geometría analítica: amalgama entre lo gráfico y lo simbólico/algebraico. Según el autor no se requiere únicamente de figuras geométricas o gráficos cartesianos sino un trabajo semiótico asociado a la identificación, tratamientos y conversiones, en coordinación con razonamientos discursivos.

Es así que otras investigaciones consultadas (Arellano y Oktac, 2009; Dallemole, Oliveira y Moreno, 2014; Karrer y Navas, 2013) aluden al modo en que se favorece o desfavorece, desde la enseñanza, la construcción de significados de los conceptos de la geometría analítica en los distintos registros y las correspondientes conversiones.

Arellano y Oktac (2009) en particular señalan las dificultades que presentan los alumnos que están finalizando la secundaria en el pasaje del registro gráfico al algebraico en el tratamiento de sistemas de ecuaciones lineales. Sospechan que dichas dificultades surgen como consecuencia de una enseñanza desprovista de comunicación entre los distintos registros semióticos. Por su parte, Dallemole, Oliveira y Moreno (2014) se detienen en los conceptos de recta y circunferencia, observando que las mayores dificultades surgen en las conversiones que involucran las representaciones en lengua natural y las representaciones algebraicas. Siguiendo esta misma línea de estudio, pero focalizándose en el contenido superficies esféricas, Karrer y Navas (2013) explican el modo en que las dificultades de conversión son potenciadas por los libros de texto y por las características de la formación de los docentes (matemáticos) a cargo de su enseñanza. Observan que en los libros de texto se prioriza el tratamiento de registros monofuncionales discursivos (como el algebraico) y, a su vez, la formación de los matemáticos está fuertemente orientada al uso de estos registros.

Todos estos estudios señalan lo dificultoso que resulta el aprendizaje de la geometría analítica al finalizar la escolaridad secundaria e iniciar estudios superiores, y algunos de ellos avanzan hacia propuestas de enseñanza superadoras. Analizan temas o asuntos puntuales en los que se hace notar la mencionada complejidad en la conversión entre registros.

Sin embargo, no se han encontrado investigaciones que se centren en la formación de profesores ni aborden la geometría analítica en un sentido más amplio que desde la particularidad de un tema puntual. Por otro lado, dada la importancia para la formación de los modelos docentes vividos (Santaló, 1999), es de interés conocer cómo se van cimentando las bases de toda una rama de la Matemática tan trascendente, como es la geometría analítica, en estudiantes que proyectan ser profesores.

En efecto, esta investigación se propone caracterizar la configuración del *conocimiento matemático para enseñar (MKT)* (Ball, Thames y Phelps, 2008) geometría analítica en estudiantes del Profesorado en Matemática (PM) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR) y sugerir consecuentemente algunas líneas de acción específicas que propendan

al fortalecimiento -en términos de complementariedad y sustento entre los distintos registros- de la formación que se ofrece.

En particular, se procura hacerlo a través del análisis de la activación de los dominios del *MKT* y desde los aportes de asignaturas que propenden a sentar las bases para la enseñanza de esta rama de la Matemática. Esto es, desde el enfoque disciplinar y desde la práctica docente en el PM de la UNR, carrera en la que la doctoranda es egresada y docente.

2. Objetivos

Objetivo general

Conocer acerca de la formación que ofrece el PM en la configuración del *MKT* geometría analítica.

Objetivos específicos

- Caracterizar el inicio de la construcción del *MKT* geometría analítica, desde el aporte disciplinar del PM de la UNR donde se sientan las bases de dicha rama de la Matemática.
- Profundizar la descripción del proceso de construcción del *MKT* geometría analítica, desde el aporte de la práctica docente del PM de la UNR donde se problematizan peculiaridades de su enseñanza.
- Reconocer algunas posibilidades de acción, en términos de *MKT*, para fortalecer la formación en geometría analítica que ofrece el PM de la UNR.

3. Preguntas de la Investigación

Este estudio se propone dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo se produce el inicio de la construcción del *MKT* geometría analítica desde la formación disciplinar donde se sientan las bases de dicha rama de la Matemática en el PM de la UNR?
- ¿De qué manera se produce dicha construcción desde espacios curriculares que problematizan las prácticas de enseñanza?
- ¿Qué posibles líneas de acción podrían ser abordadas, en términos de *MKT*, para fortalecer la formación en geometría analítica que ofrece el PM de la UNR?

4. Marco teórico

Shulman (1986) inicia una línea de investigación sobre la formación del profesor con una propuesta de categorías para conceptualizar la clase de conocimiento requerido en la enseñanza de cualquier materia. Ball *et al* (2008) avanza en la línea de investigación de Shulman (1986), orientándola hacia la Matemática. Según estos autores, la mayoría de la gente estaría de acuerdo en que conocer Matemática es importante para su enseñanza. Sin embargo, lo que abarca tal conocimiento y su alcance aún amerita indagación desde la investigación especializada. Por y para ello estos autores proponen un conjunto de seis dominios de *MKT* que han de disponer los profesores (Tabla 1).

Conocimiento disciplinar	<i>CCK</i>	Matemática de cualquier ámbito científico o profesional.	Conceptos, procedimientos, significados, denominaciones, notaciones, casos, deducciones.
	<i>HCK</i>	Conciencia sobre la génesis y relación de los contenidos matemáticos.	Relaciones conceptuales más allá de lo que se está desarrollando en cierto momento, apreciaciones valorativas sobre los objetos matemáticos, encuadres epistemológico,

Conocimiento didáctico del contenido	<i>SCK</i>	Usos específicos, adaptaciones y secuenciaciones realizadas para transformar el contenido en enseñable.	histórico y real. Empleo de distintos registros (coloquial, gráfico y simbólico), selección de ejemplos pertinentes y variados, formulación de preguntas y re-preguntas procurando favorecer el sentido matemático.
	<i>KCS</i>	Integra conocimiento acerca de la cognición de los alumnos.	Previsión de comportamientos, creencias, dificultades, errores, adecuaciones de los niveles de abstracción, potenciación de las respuestas estudiantiles.
	<i>KCT</i>	Conocimiento pedagógico y didáctico específico que requiere un profesor para actuar desde la enseñanza.	Orientación de las explicaciones, promoción de la participación estudiantil, administración de los tiempos de la clase, empleo de metáforas, de recursos didácticos.
	<i>KCC</i>	Se precisa para dar un enfoque y organización a los contenidos que se pretenden enseñar.	Articulación de contenidos de la asignatura así como de otras, vinculación del desarrollo de la teoría con el de la práctica, referencias a lo estudiado en niveles previos de escolaridad.

Tabla 1. Dominios del MKT (Ball et al, 2008) con ejemplos para su caracterización de Ciccioli y Sgreccia (en evaluación)

Este modelo teórico que se adopta para la lectura y análisis de datos surge y se nutre desde investigaciones empíricas en contextos de aula, acorde con el trabajo que aquí se plantea. Ball y Bass (2003) introducen la necesidad de conceptualizar el *MKT* a partir de la observación del trabajo de los profesores en clases de Matemática. Agregan que estudios de esta índole ayudan a clarificar un currículum para la formación de docentes profesionalmente fundada, sustancial y fundamentalmente atravesada por la práctica profesional y los conocimientos y habilidades demandados por la profesión (Ball *et al*, 2008).

5. Metodología

Diseño y etapas de la investigación

Esta investigación tendrá un enfoque eminentemente cualitativo. El alcance será principalmente descriptivo, ya que busca especificar las características y los perfiles importantes del caso en estudio de acuerdo a las categorías de análisis (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

El diseño responde al de un estudio de caso: el PM de la UNR, centrado en la configuración del *MKT* geometría analítica.

Comprender de qué manera se dan las bases para la construcción del *MKT* geometría analítica en dicha carrera, desde lo disciplinar y la práctica docente, implica focalizarnos en dos actores fundamentales: docentes y alumnos de al menos dos asignaturas (Geometría I y Práctica de la Enseñanza II).

De acuerdo al Plan de Estudios del PM de la UNR, Geometría I es una asignatura del Campo de Formación Orientada, en la que se abordan los conceptos elementales de la geometría analítica. Se ubica en primer año de la carrera y está constituida por dos partes: geometría sintética y geometría analítica, desarrolladas en el primer y segundo semestre respectivamente. La parte de geometría analítica, que es la que interesa estudiar aquí, está conformada por los siguientes bloques temáticos: vectores, recta en el plano, plano, recta en el espacio, cónicas, ecuación general de segundo grado con dos incógnitas, superficies y curvas en el espacio.

Por su parte, las Prácticas de la Enseñanza (I a III) corresponden al Eje Integrador y tienen como objetivo insertar la problemática de la práctica de la enseñanza desde el primer año de la carrera, a través de la articulación teórico-práctica de los contenidos

que constituyen los tres Campos de Formación (general pedagógica, especializada y orientada). La asignatura Práctica de la Enseñanza II se ubica en el primer semestre del tercer año del PM. Se desarrollan actividades que promueven el análisis y la reconstrucción de actuaciones propias del quehacer docente, en particular aquí se refieren a contenidos disciplinares correspondientes al eje Álgebra y Funciones del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria Orientada (Santa Fe. Ministerio de Educación, 2014).

Categorías y técnicas del estudio

En sintonía con los objetivos específicos de la investigación y el marco teórico adoptado, las categorías de análisis son seis y se corresponden con los seis dominios del *MKT* (Tabla 1).

Se pretende aplicar las siguientes técnicas para recolectar la información:

* *Observación de clases* en las asignaturas Geometría I y Práctica de la Enseñanza II. Se recogerán los datos mediante grabaciones de audio y notas manuales de campo de lo que sucede en la clase. La técnica de observación favorece el acceso a la situación investigada en toda su complejidad y en el momento en que los acontecimientos suceden, sin artificios ni simplificaciones y, a su vez, permite acercarse al punto de vista de los actores investigados (Marradi *et al*, 2007).

* *Grupos enfocados* con los docentes involucrados. Se recogerán los datos mediante grabaciones de audio y notas manuales de campo. La elección de esta técnica se considera adecuada para responder al propósito de fundamentar aquellos aspectos observados en las clases, desde la visión de los propios docentes de la materia, dándoles la palabra.

* *Análisis documental* del material de estudio y de las producciones escritas de algunos estudiantes de las asignaturas involucradas. Los alumnos serán seleccionados respondiendo a sugerencias del docente del curso. Se revisarán sus producciones escritas para obtener indicios de los modos en que los estudiantes construyen y se apropian del *MKT* geometría analítica.

* *Entrevistas en profundidad* a estudiantes de las asignaturas Geometría I y Práctica de la Enseñanza II. Se pretende conocer las perspectivas y experiencias de los estudiantes acerca de los conocimientos construidos (y en construcción) con relación al tópico en cuestión. Se propone efectuar preguntas o utilizar disparadores para analizar en profundidad determinados elementos de interés que puedan surgir del análisis de sus producciones escritas. En este sentido, esta técnica permite expresar no simplemente una sucesión de acontecimientos, sino la verbalización de una apropiación individual (Marradi *et al*, 2007).

Los instrumentos que se elaborarán para la recolección de la información se sustentan en técnicas de recolección cualitativas. Se diseñarán de manera tal de entretrejer convenientemente las categorías de análisis, los objetivos de la investigación, las técnicas y los actores a quienes van dirigidos. Se pretende realizar una triangulación de los datos recogidos ya que en la indagación cualitativa se posee una mayor riqueza, amplitud y profundidad en los datos si estos provienen de diferentes actores del proceso, de distintas fuentes y al utilizar una mayor variedad de formas de recolección (Hernández *et al*, 2010).

Los registros (provenientes de las grabaciones de audio y notas de campo indicadas anteriormente) se sistematizarán atendiendo a las categorías de análisis que están delimitadas, a priori, por los seis dominios del *MKT*, donde el contenido matemático se vincula con geometría analítica.

A partir de la lectura del texto de campo se pretende comenzar a identificar segmentos de acuerdo al significado que revisten y, en función de ello, establecer una primera

asociación con alguna de las categorías de análisis. Sin embargo, tal como propone Mejía (2011), el proceso de categorización supone adentrarse repetidamente en el discurso con la intención de tener una comprensión cada vez más profunda e integral del objeto de estudio.

Para dicho proceso de categorización se cuenta con la base de un estudio anterior (Ciccioli y Sgreccia, en evaluación) en el que se elaboraron sub-categorías de análisis para cada dominio del *MKT*.

6. Impacto en el área y resultados esperados

Los principales beneficiarios de los resultados de este estudio serán alumnos y docentes del PM de la UNR, y a largo plazo los futuros alumnos de los hoy estudiantes de la carrera. Debido a que la investigación se centra en la construcción del *MKT* geometría analítica y las materias directamente involucradas en las bases de dicha construcción son Geometría I y Práctica de la Enseñanza II, las propuestas que surjan de esta investigación podrían ser consideradas como material didáctico de utilidad para potenciar aprendizajes significativos en geometría analítica en cualquiera de dichas asignaturas.

Asimismo, los aportes de este estudio podrían tener impacto en toda la carrera ya que este tipo de investigaciones dan información acerca de cómo se conceptualiza el *MKT* en el PM de la UNR y a su vez echan luz acerca de cómo construir un currículum para la formación docente profesionalmente fundado (Ball y Bass, 2003).

Entendiendo el caso del PM como un caso típico (Stake, 1994), los resultados de esta investigación podrían reinterpretarse, en la particularidad de cada contexto, para dar respuesta a interrogantes que puedan presentarse en otros Profesorados de características similares.

A su vez, se espera que los aportes de este estudio puedan llegar, por medio de comunicaciones en congresos y otros medios de difusión, a la comunidad educativa y de investigadores en Educación Matemática.

7. Bibliografía

- Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencia en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, 8(2), 61-73.
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bishop, A.J. (1987). Quelques obstacles à l'apprentissage de la géométrie. En R. Morris (ed.). *Études sur l'enseignement des mathématiques: L'enseignement de la géométrie* (vol. 5, pp. 149-169). Paris: UNESCO.
- Bonilla, D. y Parraguez, M. (2013). La Elipse desde la perspectiva de la Teoría de los Modos de Pensamiento. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 611- 618. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Ciccioli, V. y Sgreccia, N. (en evaluación). ¿Cómo se les enseña geometría analítica a los futuros profesores? Un estudio desde el *MKT*. *Revista Educación Matemática*.
- Dallemole, J., Oliveira, C. y Moreno, L. (2014). Registros de representación semiótica y geometría analítica: una experiencia con futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(2), 131-163.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

- Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, 39, 13-25.
- Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria. *Suma*, 44, 25-34.
- Henríquez, C. y Montoya, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Revista de Investigación y Experiencias didácticas en Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 51-70.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill. Capítulo 14. *Recolección y análisis de los datos cualitativos*.
- Marradi, A., Archenti, N. y Piovani, J. (2007). *Metodología de las ciencias sociales*. Buenos Aires: Emecé.
- Mejía, J. (2011). Problemas centrales del análisis de datos cualitativos. *Revista Latinoamericana de Metodología de la Investigación Social*, 1(1), 47- 60.
- Santaló, L. (1999). La formación de profesores de matemática para la enseñanza media. En Santaló, L. (y Cols.), *Enfoques: Hacia una didáctica humanista de la matemática* (pp. 209-214). Buenos Aires: Troquel.
- Santa Fe. Ministerio de Educación (2014). *Diseño Curricular: Educación Secundaria Orientada*. Santa Fe: (s.n.).
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.