

# CONSTRUYENDO EL ESQUEMA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL, UNA MIRADA HACIA EL FUTURO DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE

Patricia Rojas Salinas  
Universidad del Bío Bío  
[paesrojas@gmail.com](mailto:paesrojas@gmail.com)

## Resumen

Analizar la forma en la que el Cálculo es enseñado, nos lleva a una mirada cognitiva que permite generar descomposiciones genéticas en pos de la construcción de un esquema que describa relaciones entre conceptos, para así construir el Cálculo Diferencial e Integral desde una perspectiva que pretende trabajar a estos dos objetos matemáticos en simultáneo. Desde la teoría APOS (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), apreciamos el cómo se va construyendo el aprendizaje mediante los mecanismos de abstracción reflexiva. Se exhibe la descomposición genética de los conceptos así como la construcción del esquema y cómo estos modelos han permitido diseñar una planificación del Cálculo a la luz de una nueva mirada.

**Palabras clave:** Cálculo Diferencial e Integral, Descomposición Genética, Esquema.

## Abstract

Analyze the way in which the calculation is taught, it leads to a cognitive look that can generate genetic decompositions towards the construction of a schema that describes relationships between concepts, in order to build the differential and integral calculus from a perspective that seeks to work these two mathematical objects simultaneously. From theory APOS (Actions, Processes, Objects and Diagrams), we appreciate how learning is built by reflective abstraction mechanisms.

The genetic decomposition of the concepts and the construction scheme is displayed and how these models have allowed to design a planning calculation in the light of a new look.

**Key Words:** Differential and Integral Calculus, genetic decomposition, Scheme

## 1. Introducción y planteamiento del problema

Grandes problemáticas atañen en la actualidad a la Enseñanza y el Aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral, entre ellas se encuentran la falta de entendimiento de algunos procesos que desencadenan en el fracaso de los estudiantes y que conllevan altos niveles de deserción; así y en el intento de entender cómo se llevan a cabo las construcciones mentales de los estudiantes, generando procesos de búsqueda del conocimiento, nos encontramos con la teoría APOS.

Como nos plantea Trigueros, M (2005), APOS (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) es un instrumento tanto de investigación como de enseñanza, puesto que, para trabajar con el modelo que nos plantea esta teoría es necesario pensar en los conceptos desde la propia matemática.

La teoría permitió generar una Descomposición Genética que incluye ambos conceptos y permite, por una parte analizar las construcciones de los estudiantes para tomar en consideración las condiciones necesarias para el estudio y enseñanza de cada uno de

estos conceptos y al mismo tiempo tomar en consideración las condiciones necesarias para que se establezcan las relaciones entre estos dos conceptos que permitan verlos como un todo.

La idea es generar un cambio en el modelo de la organización didáctica actual, que permita renovar el estudio del Cálculo Diferencial e Integral de una Variable, dando sentido a estos conceptos mediante una teoría cognitiva. Uno de los principios fundamentales, que da luz del cómo se aprende lo entrega la epistemología genética de Piaget, que establece que el desarrollo del sistema cognoscitivo no es ni un crecimiento continuo, ni un proceso lineal (García, 1987, pág. 120).

## 2. Marco teórico

Dentro de las estructuras conceptuales de la teoría APOS, se denomina Acción a la transformación de un objeto cognitivo que el estudiante percibe como algo externo, se espera interiorizar esa acción; por su parte, la estructura conceptual de Proceso, se da, cuando se repite una acción y se reflexiona sobre ella interiorizándola, además, la estructura de Objeto aparece con la necesidad del estudiante de aplicar por sí sólo, acciones sobre un proceso, además analiza y utiliza las propiedades del concepto; así como la posibilidad de revertir el objeto en el o los procesos que le dieron origen.

La estructura de Esquema, es la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que tienen relaciones entre ellos de manera que, para el estudiante forman una estructura coherente. El estudiante puede estar consciente o no de las relaciones entre estas estructuras. Esta conexión es demostrada por la capacidad de reconocer las situaciones en las que el esquema es aplicable y qué tipo de problemas pueden resolverse con él.

Los mecanismos de construcción de conocimiento están basados en “La Abstracción Reflexiva” de Piaget, esta presenta primero a la Interiorización, en ella, las acciones no se perciben como externas, sino como un sistema de operaciones internas sobre las que el individuo tiene control y conciencia; por ejemplo un individuo con una comprensión de los procesos de la función va a construir un proceso mental para una función determinada pensando en términos de resolución, y las transformaciones que debe realizar para encontrar los resultados del problema que se está resolviendo. Dubinsky et al (2005 a).

Otro tipo de abstracción reflexiva es la coordinación, que por su parte, es un conjunto de procesos que se coordinan para generar nuevos procesos, los cuales, se revierten cuando se utiliza en el sentido inverso del que fue interiorizado.

La Encapsulación también forma parte de la abstracción reflexiva, ella ocurre cuando uno o varios procesos se perciben como un todo, y ese todo (si fuese un objeto), necesariamente obliga a realizar acciones sobre él; la encapsulación ocurre como una aplicación de una acción en un proceso, es decir va de una estructura dinámica donde las acciones se pueden aplicar.

La desencapsulación es la recuperación del proceso que dio origen a un objeto, una vez que el proceso ha sido encapsulado en un objeto mental, cuando surja la necesidad de regresar a su proceso de origen, es decir mediante la aplicación del mecanismo de desencapsulación, un individuo puede ir de nuevo al proceso que dio lugar al objeto.

La interacción de estos elementos da lugar a los esquemas, según Dubinsky (1991) un esquema se caracteriza por su dinamismo y su reconstrucción, su coherencia queda determinada por la capacidad del individuo para determinar si se puede utilizar para hacer frente a una situación matemática en particular; una vez que el esquema se construye como un conjunto coherente de estructuras (acciones, procesos, objetos y

otros esquemas) y las conexiones que se establecen entre las estructuras, puede ser transformadas en un objeto.

Según Piaget: "...Un esquema se construye únicamente cuando está funcionando y solo funciona a través de la experiencia. Lo que es esencial no es la estructura del esquema en sí, sino la actividad estructurante que lo hace surgir". Los esquemas son dinámicos, evolucionan, según las relaciones que se construyan entre los conceptos, la descripción de esta evolución se hace mediante la "Triada" de Piaget y García, que es una progresión de tres niveles. (Piaget y García, 1982)

La descripción de la relación entre los elementos de un esquema es fundamental, su evolución es lo que permite tematizarse en objetos, pasa por tres niveles:

El nivel Intra pone su foco en cada componente del esquema, las relaciones entre acciones, procesos, objetos y esquemas individuales aislados de otros objetos cognitivos de naturaleza similar construyen una relación interna centrada en similitudes y diferencias. En el nivel Inter es la comprensión de las transformaciones entre las estructuras del esquema, lo que juega un papel más importante. Por último en el nivel Trans surge la necesidad de determinar los lazos y las razones tras esas transformaciones del esquema, éste esquema se ve como un todo y se construye una estructura que puede dar cuenta de su composición mediante una síntesis.

La triada proporciona a los investigadores una herramienta con la que analizar el pensamiento de los estudiantes y para ver cómo se desarrolla, teniendo en cuenta la riqueza de las situaciones problemáticas centrando la atención en las relaciones entre las diferentes construcciones mentales. Utiliza la complejidad del proceso de resolución de problemas, como las nuevas relaciones entre las ideas, las cuales surgen jugando un papel importante en las estructuras de reciente formación, y el desarrollo de la coherencia del esquema. Todos los aspectos importantes de un esquema se muestran a través del trabajo de los estudiantes en los diferentes problemas relacionados con las situaciones de resolución.

### 3. Metodología

La Descomposición Genética (DG), es un modelo hipotético que describe las estructuras y construcciones mentales que son necesarias para aprender un concepto matemático. Parte con una hipótesis basada en el conocimiento del investigador en torno a varios ejes como son: el aprendizaje y la enseñanza de un concepto, sus conocimientos matemáticos, el resultado de otras investigaciones, el desarrollo histórico del concepto y su conocimiento de la teoría APOE.

La DG juega un papel central en la teoría APOE ya que plantea un modelo teórico para proporcionar hipótesis que sirven de base para la teoría. El uso de un modelo teórico aumenta la fiabilidad del análisis, a su vez diferentes investigadores pueden analizar los mismos datos obteniendo resultados comparables; proporcionando un medio para describir el pensamiento del estudiante, y sirve como un diagnóstico y herramienta predictiva y es elemento crucial en el diseño metodológico de la teoría.

Además de describir como un concepto puede ser construido mentalmente, una DG podría incluir una descripción de las estructuras mentales que los estudiantes poseen antes de encontrarse con los conceptos, y así generar una diferenciación entre ellos permitiendo explicar las diferencias que existen en los niveles de comprensión de un concepto matemático y así sus diferencias en los rendimientos académicos, si la DG no logra explicar estas diferencias, es porque necesita una revisión. Por lo tanto una DG es un modelo de la epistemología y la cognición de un concepto matemático (Roa-Fuentes y Oktac, 2010).



El proceso de cambio de posición en el tiempo es interpretado como la derivada, así como el proceso cociente entre dos cambios, el proceso del cálculo de límites es una herramienta que permite analizar el objeto derivada.

Los procesos infinitos son coordinados con los procesos involucrados con las sumas de Riemann permitiendo entender la integral como un objeto que va entre sumas inferiores y superiores; además los procesos involucrados en el cálculo de límites de funciones le permiten el cálculo de derivadas.

El objeto función se encapsula cuando analiza el proceso de composición de funciones construyéndolo coherentemente mediante procesos de continuidad.

El esquema se evidencia con la habilidad para determinar las condiciones en las que pueden aplicar Derivadas o pueden aplicar integrales en problemas de cualquier ciencia en las que las condiciones de continuidad o discontinuidad están presentes, ya sea usando razón de cambio como objeto, velocidad como objeto, pendiente de la tangente o sus procesos asociados; análogamente en el caso de la anti-derivada analizando como función inversa de la derivada, le permite resolver problemas de Ecuaciones Diferenciales de manera eficiente para tematizar el esquema.

Luego de la construcción del esquema se pasa a la planificación de clases para la posterior aplicación y evaluación.

## 5. Conclusiones

En el proceso de aprendizaje, un individuo puede construir esquemas coexistentes, que cambian constantemente y en diferentes fases del desarrollo.

Cuando se enfrenta a una situación de resolución de problemas es cuando una persona puede coordinar esquemas diferentes para construir nuevos esquemas completos y complejos.

Los estudiantes se enfrentan a situaciones nuevas donde los conocimientos previos pueden ser reconstruidos, el esquema ayuda a comprender los cambios es los distintos mecanismos, a medida que, nuevas acciones, procesos, objetos, son relacionados.

## 6. Referencias

- Asiala, M., Brown, D., DeVries, E., & Dubinsky, D. M. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2 (3), 1-32.
- Badillo, E. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia. Colombia: Tesis.
- Boigues, F. L., & Estruch, V. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica Fuzzy. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13 (3), 255-282.
- Dreyfus, T.; Eisenberg, T. (1990). On Difficulties with diagrams: Theoretical issues. In *Proceeding of the 14Th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, págs. 27-36.
- Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 160-202). Springer New York.
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60(2), 253-266.

- García, R. (1987). *Lógica y Epistemología Genética*. En J. Piaget, & R. García, *Hacia una Lógica de Significaciones*. Barcelona, España: Gedisa ISBN: 84-7432-666-4.
- Gavilán, J., Llinares, S., & García, M. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. *Implicaciones metodológicas*. *Enseñanza de las Ciencias*, 25, 157-170.
- Gutierrez, L., & Valdivé, C. (2012). Una descomposición Genética del concepto de derivada. *Gestión y Gerencia*.
- Piaget, J. y R. García (1982), *Psicogénesis e historia de la ciencia*, México, Siglo XXI Editores.
- Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 13(1), 89-112.
- Sanchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11 (2), 267-296.
- Trigueros, M. (2005). La noción de Esquema en la Investigación en Matemática Educativa a Nivel Superior. *Educación Matemática*, 17 (001), 5-31.
- Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for research in Mathematic Education*, 20 (4), 356-366.