

OS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EM COMBINATÓRIA: UM ESTUDO COM OS LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

Alan Gustavo Ferreira; Maria Aparecida da Silva Rufino; José Roberto da Silva
Universidade de Pernambuco. Campus Mata Norte.

alan.gustavo@hotmail.com, aparecidarufino@hotmail.com, jrobertosilva@bol.com.br

Resumen

El estudio intenta identificar los obstáculos epistemológicos que impregnan las concepciones de los estudiantes de la graduación en Matemáticas Universidad de Pernambuco- Brasil, sobre los conceptos de combinatoria, arreglo, permutación y combinación. Se trata de un estudio de un caso educativo, descriptivo e interpretativo. Un total de 112 alumnos contestaron a un cuestionario diagnóstico compuesto por cuestiones conceptuales y aplicaciones. En general los obstáculos comprenden analogías falsas, inducciones ingenuas y generalizaciones precipitadas. Además, se observó que una parte de estos son obstáculos didácticos. Así, se sugiere la promoción de capacitaciones continuadas para los profesores de formación básica que invertía en el análisis de errores y en la adhesión a prácticas pedagógicas que exploren el sistema de información de esta asignatura, de un modo que posiblemente no contribuya a la construcción de los obstáculos epistemológicos y posibilite un aprendizaje más significativo.

Palabras clave: Combinatoria, Arreglo, Permutación, Combinación, Obstáculos Epistemológicos.

Abstract

This study seeks to identify the epistemological obstacles which permeate the students' conceptions of degree in mathematics, University of Pernambuco- PE / Brazil, regarding the concepts of Combinatorics, Arrangement, Permutation and Combination. It is a interpretive descriptive educational case study. A total of 112 students answered a diagnosis questionnaire composed of conceptual issues and applications. Overall, the obstacles include false analogies, naive inductions and hasty generalizations. Moreover, it was observed that many of these are educational obstacles. Thus, it is suggested to promote continuous training for basic education teachers who invest in the analysis of errors and adherence to pedagogical practices that explore the information system of this discipline so that possibly does not contribute to the construction of epistemological obstacles and enables a more meaningful learning.

Keywords: Combinatorics, arrangement, permutation, combination, Epistemological Obstacles.

1. Introdução

A preocupação em melhorar ou modificar os conceitos dos estudantes na busca de uma evolução conceitual é um tema bastante debatido no ensino de ciências. Na matemática, essa discussão agrega outros fatores devido à natureza dos seus objetos. D'Amore (2005) coloca que a natureza dos objetos matemáticos é peculiar, pois todo conceito matemático remete a “não-objetos”; todo conceito matemático é obrigado a servir-se de representações e em matemática fala-se mais de “objetos matemáticos” que de “conceitos matemáticos”.

Ademais, é importante destacar que o estudo da aprendizagem matemática não pode excluir a existência de conflitos cognitivos causados pelos obstáculos epistemológicos, que foi tratado originalmente na filosofia das ciências por Bachelard (1996), e ampliada por Brousseau (1983) que a introduziu na didática da matemática, impulsionando vários trabalhos e uma interdependência entre a didática e a epistemologia desta ciência.

Assim como algumas ideias preconcebidas podem servir de impedimento para aquisição dos conceitos matemáticos, podem também interferir no desempenho na resolução de problemas. Ainda que analisar esse desempenho, não seja o foco deste estudo, utiliza-se também desta atividade para mostrar tal interferência nos problemas de Arranjo, Permutação e Combinação. Diante o exposto, intenta-se conhecer quais são as principais ideias que podem servir de obstrução para uma compreensão adequada dos alunos de um curso de Licenciatura em Matemática – UPE/Brasil acerca de tais conceitos?

2 Combinatória em um Sistema de Informação Conceitual

Segundo Ausubel (2002) cada disciplina acadêmica tem uma estrutura articulada e hierarquicamente organizada de conceitos que é seu sistema de informação e que deve ser ensinado aos alunos. Na Combinatória, contar é o conceito mais geral, e em épocas primitivas, tinha-se algum senso numérico de acréscimo ou de retirada marcados com objetos concretos até chegar os números naturais. A partir daí contar passou a ser enumerar.

Para Benítez e Brañas (2001) quando o número de elementos de um conjunto é “grande”, o procedimento vai além de enumerar, surgindo os Princípios Aditivo e Multiplicativo. O primeiro, associado a situações que se pode realizar uma decisão de m maneiras e a outra, de n e não há como realizar as duas simultaneamente, o total é $m+n$. O segundo aplica-se a situações que se pode decompor em duas ou mais decisões sucessivas e independentes. Se em duas, com m maneiras para a primeira e n para segunda, tem-se o produto $m \times n$.

Podem ocorrer contagens cujas dificuldades são maiores e requerem conceitos mais avançados e novas formulações, donde emerge o campo da Combinatória. Para Hazzan (2013, p.1) esse campo “visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, agrupamentos formados sob certas condições”. Santos, Mello e Murari (2007) colocam que são basicamente dois os tipos de problemas nesse campo, os de existência e os de contagem. Com foco nestes últimos, que buscam analisar as diferentes maneiras de dispor os elementos de um conjunto: a natureza e a ordem dos elementos chegam-se aos conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação, cujas aplicações estão embasadas no Princípio Multiplicativo. Para aplicá-las corretamente, Rufino (2015) adverte que aquilo que está sendo contado, interfere na forma de contar.

Explorando-se a distinção a partir dos conceitos de ordem e natureza Merayo (2001) esclarece que os Arranjos são grupos ordenados, formados por n elementos, tomados dos m de um conjunto finito, em que dois grupos são distintos se diferem em algum dos elementos ou, se tendo os mesmos elementos, diferem pela ordem em que estão colocados.

Recebe o nome de Permutação de m elementos, cada um dos distintos grupos que pode formar-se, de maneira que cada um contenha os mesmos m elementos, divergindo pela ordem de colocação. As Combinações são grupos formados de n elementos tomado dos m , tal que dois deles se consideram distintos se diferem em algum de seus elementos. Neste caso, dois grupos são iguais se contêm os mesmos elementos, ainda que em distinta ordem. Segue uma síntese do sistema de informação da Combinatória (Rufino, 2015).

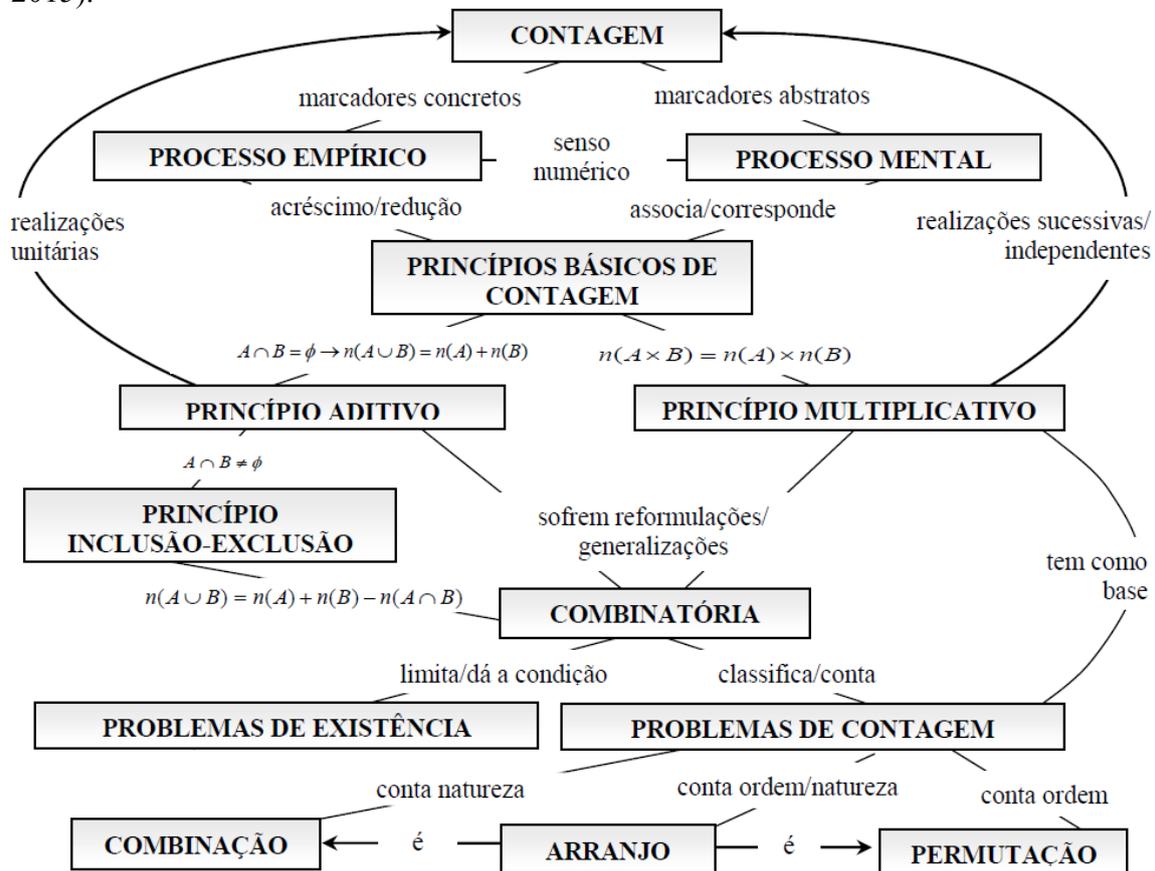


Figura 1: Um mapa conceitual de Combinatória, focando os conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação.

2.1 Obstáculos Epistemológicos e sua influência no ensino de Ciências e Matemáticas.

Para Bachelard (1996) ao buscar-se as condições psicológicas do progresso das ciências se chega à convicção de que o problema do conhecimento deve ser colocado em termos de obstáculos. No próprio ato de conhecer, aparecem, por uma necessidade funcional, pausas e inquietudes. Segundo Pesa (2000) o inconsciente do espírito científico é a principal fonte de contra-pensamentos, baseados em dados sensíveis, pouco diferenciados. Tais resistências do pensamento ao pensamento são os obstáculos epistemológicos.

O primeiro obstáculo é a experiência primeira, colocada antes e acima da crítica, elemento integrante do espírito científico. Para Moreira e Massoni (2011) o espírito científico deve formar-se em contra ao impulso da experiência primeira, ao entusiasmo natural; deve reformar-se se reformando. Para entender cientificamente algo se deve ir de em contra ao bonito, ao que impressiona, ao que é fácil, porque a explicação científica é mais completa.

Bachelard (*op. cit.*) cita ainda o conhecimento geral, como o que mais retarda o progresso do conhecimento. Gera um conhecimento vago, de respostas fixas e seguras, generalizações superficiais, que desconsidera o âmbito da aplicação e os limites da validade. Já o obstáculo verbal é uma falsa explicação alicerçada em uma palavra explicativa, através dessa estranha inversão que pretende desenvolver o pensamento analisando um conceito, ao invés de implicar um conceito particular em uma síntese racional.

Na medida em que os obstáculos epistemológicos são ignorados no ensino, constituem-se em obstáculos pedagógicos. Moreira e Massoni (*ibid.*) destacam que os professores deveriam entender melhor o que está por traz do porque seus alunos não entendem. Eles possuem obstáculos epistemológicos muito fortes e não são capazes de superá-los.

Bachelard (*op. cit.*) também estudou as noções obstáculos, bastante relacionados ao ensino de física. Mas, foi Brousseau (1983) que introduziu a noção de obstáculo na educação matemática, distinguindo-os quanto à origem, nas formas: de origem ontogenética, didática e epistemológica. No estudo em questão, focalizam-se os obstáculos de origem didática que, para Brousseau (*ibid.*), parecem estar atrelados à escolha de uma estratégia do docente, que para alguns alunos, revela-se um obstáculo didático.

Brousseau (*op. cit.*), na tentativa de aproximar a análise de erros no contexto da Matemática com a noção de obstáculo, advoga que um conhecimento prévio que não foi generalizado de forma adequada, pode se constituir num obstáculo. Assim, conforme adverte Pesa (2000) se o conhecimento prévio é a base da construção das novas concepções, ele pode atuar também como causa de estancamento e regressão.

3. Metodologia

Situa-se no âmbito das pesquisas qualitativas do tipo Estudo de Caso Educativo Descritivo Interpretativo, segundo André (2008) e Moreira (2011). Pretende-se entender o fenômeno relacionado aos “erros de compreensão”, que serviram de bloqueios para uma aquisição verdadeiramente matemática sobre Combinatória. A investigação foi realizada em turmas do 3º período de licenciatura em Matemática, Universidade de Pernambuco – PE/Brasil, na disciplina de Princípios de Contagem, semestres de 2013.1 a 2014.2, no total de 112 alunos, que tiveram 40 min. para responder, individualmente, a um questionário diagnóstico.

3.1 Critérios Adotados para Análise e Interpretação do Questionário Diagnóstico

1ª Questão: Usando sua concepção diga o que você acredita ser Combinatória?

Elencaram-se como principais erros (E) mais cometidos pelos alunos: (E₁) – alicerçar o campo da Combinatória na ideia de combinar, desconsiderando o fundamento da contagem; (E₂) – restringir o campo da Combinatória a um procedimento técnico de contagem; (E₃) – confundir a ideia de possibilidade com a de probabilidade e (E₄) – outros erros cometidos.

2ª Questão: Explique a diferença entre as contagens do tipo permutação, arranjo e combinação? Agruparam-se os erros que os alunos mais cometem quando conceituam

tais técnicas em: (E_1) – distinguir as contagens limitando-se ao uso de uma palavra por possuir o mesmo radical etimológico; (E_2) – considerar a aplicação do fatorial de um número, como algo que pode caracterizar todas as contagens; (E_3) – conceituar as contagens por uma propriedade excludente ao invés de especificá-la e (E_4) – outros erros cometidos.

3ª questão: resolva as questões abaixo e em seguida justifique, em cada caso, se a situação indicada trata-se de uma permutação, de um arranjo ou de uma combinação:

a) Uma padaria oferece 3 tipos de pão e 5 tipos de recheio. O cliente pode escolher o tipo de pão e 3 recheios diferentes, qual o número de possibilidades de compor um sanduíche?

b) Calcule quantos múltiplos de 3, de quatro algarismos distintos, podem ser formados com os dígitos 2, 3, 4, 6 e 9?

c) Quantas são as maneiras de 4 carros serem estacionados em 4 vagas?

A ideia agora é perceber a influência dos erros de compreensão daquilo que está sendo contado na escolha da forma de contar. Adotaram-se os critérios: Resposta e Justificativa.

4. Análise e Discussão dos Resultados

1ª Questão:

Tabela 1: Concepções sobre Combinatória

| Critérios | Erros mais cometidos quanto ao conceito de Combinatória. | | | |
|-----------|--|-------|-------|-------|
| | E_1 | E_2 | E_3 | E_4 |
| Respostas | | | | |
| Total (%) | 32 | 34 | 14 | 20 |

Excerto Aluno (23):

É o ato de combinar elementos para obter um resultado.

Excerto Aluno (10):

COMBINATÓRIA É O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM.

Excerto Aluno (1):

Campo que engloba a probabilidade de contar "coisas" de uma única vez.

Há grande influência dos obstáculos verbais (32%) e conhecimentos gerais (35%) em boa parte das respostas. No primeiro, por uma indução ingênua, fazem uso de um radical etimológico alicerçando a combinatória à ideia de combinar. No segundo, generalizam este campo à aplicação de um princípio desconsiderando limites de validade. Há também a presença de obstáculos didáticos (14%), construídos na exploração de expressões e relações, sem se preocupar em explicá-las, resultando numa confusão de conceitos.

2ª Questão:

Tabela 2 – Concepções sobre Arranjo, Permutação e Combinação

| Critérios | Erros mais cometidos na distinção entre Arranjo, Permutação e Combinação | | | |
|-----------|--|-------|-------|-------|
| | E_1 | E_2 | E_3 | E_4 |
| Respostas | | | | |
| Total (%) | 21 | 24 | 19 | 36 |

Excerto Aluno (23):

*Permutação é o ato de permutar, troca de lugares.
Arranjo é o ato de arrastar. Combinação é o ato de combinar elementos.*

Excerto Aluno (13):

Permutação = combinação de número que utiliza o método do fatorial

Excerto Aluno (102):

- *COMBINAÇÃO → A ORDEM DOS ELEMENTOS NÃO É IMPORTANTE*

Observa-se, mais uma vez, uma predominância dos obstáculos verbais e das generalizações, induzidas por falsas analogias que incorre num conhecimento vago, superficial, de respostas fixas e limitadas (E₁- 21% e E₂ -24%). Já E₃ (19%), é mais um exemplo de obstáculos didáticos, ao priorizar a aplicação das técnicas, chama-se atenção mais para aquilo que não se deve contar do que em caracterizar a contagem.

3^a Questão: Tabela 3 – Aplicação e Justificativa dos tipos de Contagem

| Situções / Critérios | Resolução da Questão | | | Justificativa da Contagem | | |
|-----------------------|----------------------|-----|-----|---------------------------|-----|-----|
| | NR | RE | RC | NJ | JE | JC |
| Combinação (a) | 22% | 75% | 3% | 28% | 64% | 8% |
| Arranjo (b) | 28% | 62% | 10% | 34% | 68% | 8% |
| Permutação (c) | 20% | 46% | 34% | 40% | 28% | 32% |

Legenda: (NR) Não Resolveu; (RE) Resolveu Errado; (RC) Resolveu Certo;
(NJ) Não Justificou; (JE) Justificou Errado; (JC) Justificou

Há um baixo percentual de acertos na resolução e na justificativa correta para contagem utilizada. Dentre os quais a Permutação apresentou um melhor rendimento. Registra-se que tais questões aproximam-se das aplicadas na formação básica, com uma forte interferência dos obstáculos epistemológicos aqui estudados nas resoluções e justificativas apresentadas.

5. Considerações Finais

Conforme se pode observar, os obstáculos epistemológicos mais presentes nas concepções dos alunos investigados são oriundos de analogias falsas, induções ingênuas e generalizações precipitadas. Detectou-se que certos erros de compreensão resultam em obstáculos de origem didática, os quais já foram destacados, mas cabe acrescentar a ideia de que a árvore de possibilidades é um objeto ou mesmo uma técnica de contagem, que Permutação é uma técnica exclusiva dos anagramas, Combinação é sinônimo de comissão e que se todo Arranjo é uma Permutação o contrário também se estabelece, dentre outros.

Percebe-se que devido a esses e outros obstáculos, grande parte dos alunos, quando estão diante de um problema não conseguem reconhecer os objetos de contagem e acabam por não ter êxito na resolução. É necessário que haja um investimento por parte dos órgãos responsáveis em promover formações continuadas para os professores de maneira a torná-los mais sensíveis e aptos para analisar os erros cometidos pelos alunos e para que a ação docente não mais cometa o equívoco de privilegiar técnicas e procedimentos desvinculados do seu sistema de informação conceitual se é que se quer uma aprendizagem significativa.

6. Referências

André, M. E. D. A. (2008). *Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional*. 3^a ed. Brasília: Liber Livro Editora.

- Ausubel, D. P. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento una perspectiva cognitiva*. Barcelona: Paidós.
- Bachelard, G. (1996). *A Formação do Espírito Científico*. Rio de Janeiro: Contraponto.
- Benítez, P. R. A. & Brañas, J. R. F. (2001). *Introducción a la matemática aplicada* Colección Textos Universitarios. Canarias: Litografía A. Romero S. A.
- Brousseau, G. (1983) Les obstacles épistemologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), p. 165-198 .
- D'amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Barcelona: EDITORIAL REVERTÉ.
- Hazzan, S. (2013). *Fundamentos de Matemática elementar*, v. 5: Combinatória, probabilidade, 8^a ed. São Paulo: Atual.
- Merayo, F. (2001). *Matemática Discreta*. Madrid: Paraninfo.
- Moreira, M. A.; Massoni, N. T. (2011). *Epistemologias do Século XX: Popper, Kuhn, Lakatos, Laudan, Bachelard, Toulmin, Feyerabend, Maturana, Bohm, Bunge, Prigogine, Mayr*. São Paulo: E.P.U.
- Moreira, M. A. (2011). *Metodologias de Pesquisa em Ensino*. São Paulo: Livraria da Física.
- Pesa, M. A. (2000) La Epistemología Bachelardiana: Aportes Significativos a la Enseñanza y al Aprendizaje de las Ciencias. *Actas del PIDECE*, 2, 5-15.
- Rufino, M. A. da S. (2015) *Aprendizagem Significativa na Resolução de Problemas de Matemática: o Arsenal Operatório Cognitivo dos Professores do Ensino Básico*. 2015. 307 f. Tese (Programa Internacional de Doctorado Enseñanza de las Ciencias) – Departamento de Didácticas Específicas. Universidad de Burgos - Espanha.
- Santos, J. P. O.; Mello, M.P.; Murari, I.T.C. (2007). *Introdução à Análise Combinatória*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.