

## EL FENÓMENO DE LA DESARTICULACIÓN ENTRE LOS ENFOQUES SINTÉTICO Y ANALÍTICO EN ELIPSES: UN ESTUDIO DE CASO

Mario Di Blasi Regner<sup>(1)</sup>; Mabel Rodríguez<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup>Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Gral. Pacheco.

<sup>(2)</sup>Universidad Nacional de General Sarmiento y Universidad Nacional de Tierra del Fuego.

[mario.diblas@gmail.com](mailto:mario.diblas@gmail.com), [mrodri@ungs.edu.ar](mailto:mrodri@ungs.edu.ar)

### Resumen

Presentamos parte de los resultados de la implementación de una Actividad de Estudio e Investigación (AEI), constructo teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 2007), que fue diseñada en el marco de una investigación sobre el fenómeno de la desarticulación de los enfoques sintético y analítico en Geometría. Fue implementada en un curso de Álgebra y Geometría Analítica de primer año de carreras de Ingeniería en la Universidad Tecnológica Nacional, Regional Pacheco. El trabajo permitió al estudiante poner de manifiesto la insuficiencia de las técnicas sintéticas y la necesidad de apelar a las analíticas. La incorporación de un asistente geométrico dinámico, GeoGebra, potenció el estudio. La AEI promovió una actitud investigativa por parte de los estudiantes indispensable para la reconstrucción de conocimiento matemático con sentido, un claro objetivo de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

**Palabras clave:** Geometría Sintética, Geometría Analítica, Desarticulación.

### Abstract

We present a part of the results of an implementation of a research and study activity (RSA), theoretical construct of the Anthropological Theory of the Didactic (Chevallard, 2007) that was designed as part of a research about the phenomenon of disarticulation between synthetic and analytic geometry. It was applied in a course of Algebra and Analytic Geometry in the first year of engineering carriers at National Technological University, Regional Pacheco. This study allowed students to recognize the insufficiency of synthetic techniques and the necessity of taking into account analytic ones. By offering a dynamic geometry software, GeoGebra, it was strengthened the study. The RSA promoted a research attitude in students, necessary for the reconstruction of mathematical knowledge with sense, a clear aim of the Anthropological Theory of the Didactic.

**Keywords:** Synthetic Geometry, Analytic Geometry, Disarticulation

### 1. Introducción

La problemática de la enseñanza de la Geometría, y en particular de la articulación entre la Geometría Sintética (GS) y la Geometría Analítica (GA), ha sido considerada en los últimos años como tema de interés en un número importante de investigaciones en Educación Matemática (Gascón, 2002a y 2002b; Acosta Gempeler, 2004; Santos Trigo, Espinosa-Pérez & Reyes-Rodríguez, 2008; Bernat, 2011 entre otros).

Algunos resultados ponen en evidencia que un objeto matemático puede ser aprendido desde el punto de vista sintético, desde el punto de vista analítico y el estudiante podría

percibir esos conocimientos aislados entre sí. No sólo podría no advertir que son enfoques de un mismo objeto matemático, sino no reconocer las limitaciones y potencialidades de cada una de esas aproximaciones, perdiéndose así el sentido del conocimiento.

En la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco, en las clases usuales de Álgebra y Geometría Analítica, nuestras experiencias sumadas a los resultados de aprendizaje alcanzados por los estudiantes ratifican esta dificultad. En particular, las cónicas son un contenido que se ha estado trabajando con los dos enfoques y los docentes involucrados aún perciben cierto aislamiento entre los mismos y consideran que los estudiantes no podrían tomar decisiones de cuándo utilizar uno u otro enfoque ni tampoco explicar las razones de su elección.

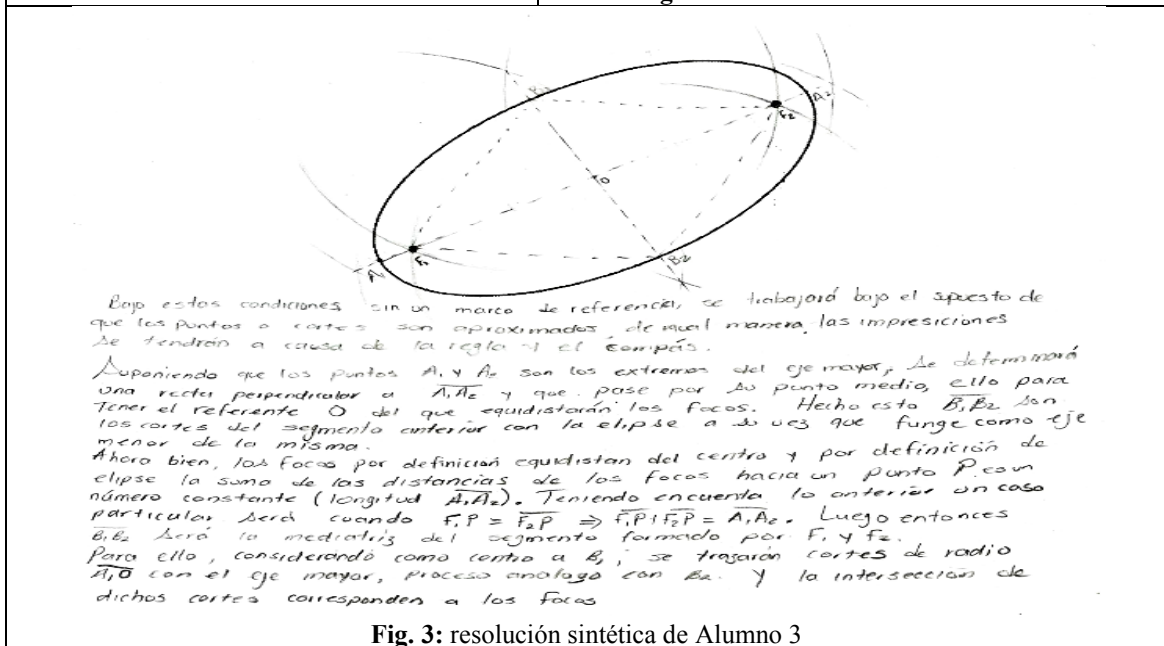
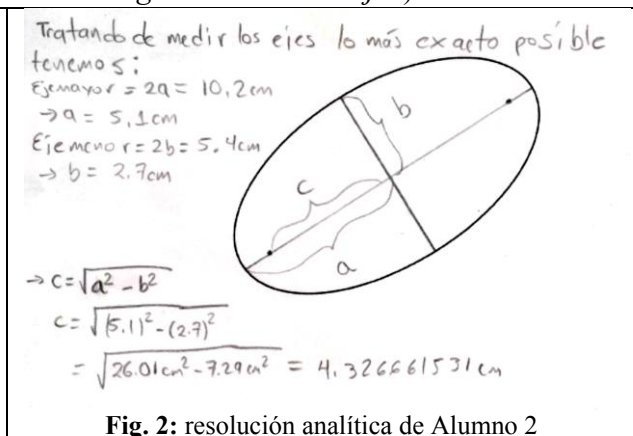
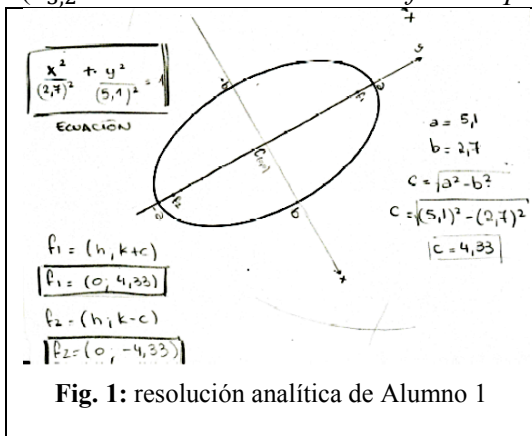
Para contenidos de Geometría, los asistentes geométricos (AG) han mostrado ser una herramienta sumamente poderosa desde el punto de vista de las posibilidades que brinda de construcción, exploración, cálculo, etc. y contamos con el GeoGebra (GGB) como recurso para nuestro trabajo. Consideramos que un marco teórico pertinente y potente para desarrollar este trabajo es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 2007) pues, para nuestro caso, da elementos teóricos para abordar el problema de recuperar la razón de ser de la GA. El constructo que utilizamos es el de *actividad de estudio e investigación* (AEI) que es una organización didáctica mediante la cual los estudiantes bajo la dirección del docente se introducen, a partir de una cuestión generatriz (CG)  $Q_0$ , en el estudio y la reconstrucción de una *organización matemática local* (OML) conocida en la institución. El estudio de  $Q_0$  debe conducir a la producción de una respuesta que contenga los componentes principales de la OML inicial (para ampliar la noción ver por ejemplo Bosch, Fonseca y Gascón, 2004). En este trabajo presentamos resultados del diseño e implementación de una AEI que intenta favorecer, en los estudiantes, la articulación entre GS y GA para elipses de modo que quede de manifiesto la razón de ser de la GA.

## 2. Aspectos metodológicos, diseño de la AEI y resultados de su implementación

Presentamos brevemente el contexto en el que se aplicó la AEI, detalles metodológicos para luego detallar aspectos de su diseño y resultados de la implementación. La implementación de la AEI se realizó en un curso de la asignatura mencionada con 32 alumnos del 1° año de Ingeniería Automotriz. Los estudiantes habían trabajado sobre álgebra vectorial, rectas y planos en el espacio, secciones cónicas y cuádricas. El proceso de estudio se desarrolló entre en 2015 en seis encuentros de cuatro horas reloj cada uno. Las actividades se desarrollaron en el aula habitual de la materia y los estudiantes disponían de una notebook con GGB, al menos, cada dos alumnos. El autor de este trabajo fue quien tuvo a cargo las clases, que fueron grabadas en video. Dos auxiliares docentes registraron en audio, tomaron fotos y realizaron notas de campo y acopiamos los materiales producidos por los alumnos que, posteriormente, digitalizamos. Luego de la experiencia, para ampliar la información, diseñamos y aplicamos entrevistas semi estructuradas a cuatro estudiantes seleccionados entre quienes mostraron evolución en la articulación entre GS y GA.

Diseñamos la AEI alrededor de la CG,  $Q_0$ : *¿cómo determinar si una curva plana cerrada es una elipse?* A partir de ella, establecimos los tipos de tareas de cinco OM y las técnicas esperadas para cada una de ellas. Por una cuestión de espacio, elegimos mostrar en este trabajo las preguntas derivadas de la cuestión generatriz que permitan al lector ver la estructura global de la AEI en organizaciones matemáticas con la finalidad de favorecer la articulación entre GS y GA. Mostraremos detalles en la exposición.

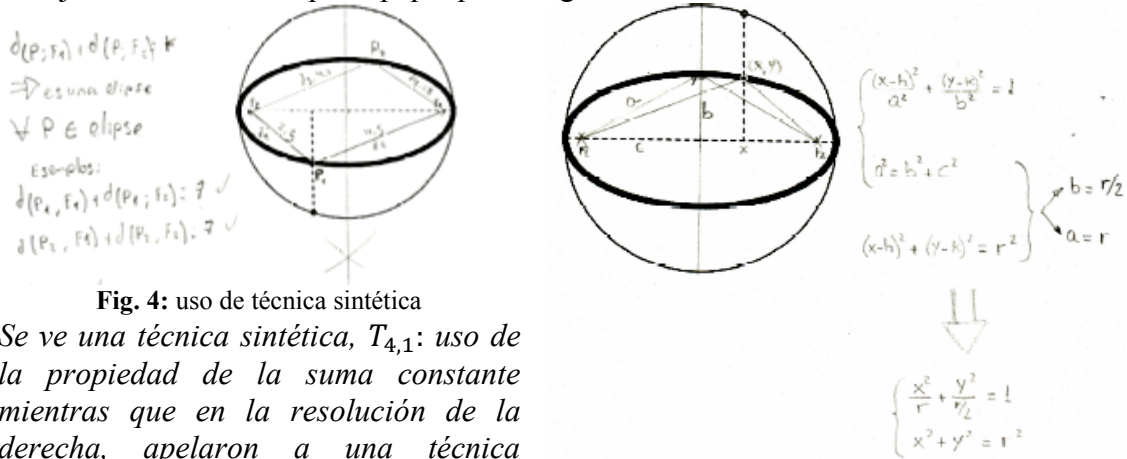
Aquí incluimos solo algunas técnicas y respuestas anticipadas en las resoluciones de estudiantes referidas a las OM<sub>3</sub>, OM<sub>4</sub> y OM<sub>5</sub> de la AEI completa. La OM<sub>3</sub> se despliega alrededor de la pregunta q<sub>0</sub><sup>3</sup>: *¿Cómo determinar los focos de una elipse conocida su gráfica?* Esta OM<sub>3</sub> nos lleva al estudio de los focos de las elipses y su determinación a partir de sus propiedades. Como el tipo de tareas correspondiente es Γ<sub>3</sub>: *hallar focos de elipses presentadas gráficamente* presentamos cuatro gráficas de elipses: dos en hoja en blanco y dos con ejes cartesianos. De las dos primeras, una con ejes oblicuos sin estar trazados y la otra igual pero con un único eje trazado. De las presentadas en ejes cartesianos, una de ellas tiene su centro en el origen del sistema y la otra lo tiene sobre el eje x, pero desplazado del origen. Fueron seleccionadas de esa manera para poder analizar las técnicas (sintéticas y/o analíticas) puestas en juego en relación con la presencia/no presencia de ejes o el sistema de coordenadas. Mostramos en las figuras 1 y 2 dos producciones de estudiantes que encararon la resolución por la vía analítica, a la que acceden luego de trazar “a ojo” los ejes y medir aproximadamente las distancias necesarias para utilizar la fórmula (T<sub>3,1</sub>: *Medir los semiejes (construyéndolos si no están dados) y utilizar la fórmula analítica*). Solo un estudiante utiliza técnicas sintéticas, pero a partir de haber trazado “a ojo” el eje principal, que puede verse en la figura 3 (T<sub>3,2</sub>: *Determinar la distancia focal a partir de longitud de los semiejes*)



La OM<sub>4</sub> conduce a estudiar si curvas obtenidas a partir de transformaciones de elipses, siguen siéndolo. El tipo de tareas, correspondiente Γ<sub>4</sub> es *decidir si las curvas que resultan de transformaciones de elipses, son elipses*. Esta OM se desarrolla,

básicamente, alrededor de dos cuestiones derivadas. Presentamos la primera de ellas (la segunda se incluirá en la exposición del trabajo) es  $q_0^4$ : *La curva que resulta de “achatar” una circunferencia en la dirección perpendicular a un diámetro, ¿es una elipse?*

Acordado qué significa “achatar” en el sentido de la pregunta pudieron comenzar a trabajar en entorno de lápiz – papel para luego diseñar una escena en GGB.



**Fig. 4:** uso de técnica sintética  
Se ve una técnica sintética,  $T_{4,1}$ : uso de la propiedad de la suma constante mientras que en la resolución de la derecha, apelaron a una técnica analítica  $T_{4,2}$ : planteo y manipulación simbólica y reconocimiento de si lo hallado es o no la representación de una elipse.

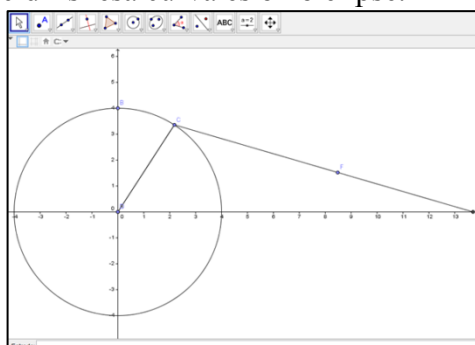
**Fig. 5:** uso de técnica analítica

La OM<sub>5</sub> lleva a estudiar si curvas que describen trayectorias de puntos que se mueven bajo ciertas condiciones son elipses y se desarrolla alrededor de la pregunta  $q_0^5$ : *¿Por qué recibe el nombre de caminador elíptico este aparato?*

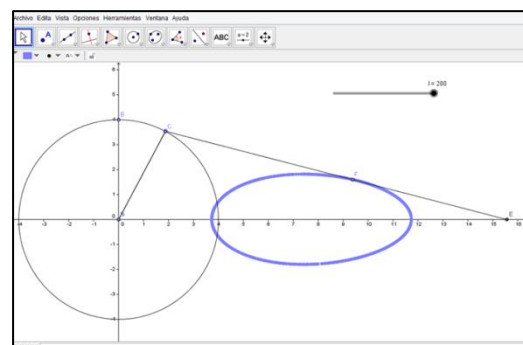


**Fig. 7:** Caminador elíptico

El tipo de tareas correspondiente es  $\Gamma_5$ : *determinar si la curva que describe la trayectoria de puntos obtenidos de ciertas propiedades es o no una elipse*. Luego de un tiempo de trabajo, los estudiantes conjeturaron que “el lugar en el que apoyan los pies recorre una elipse”. Encarar la búsqueda de pruebas para esa conjetura los obligó a abandonar, luego de algunos intentos infructuosos, el enfoque sintético que en situaciones anteriores dentro de la misma AEI, le había permitido avanzar en la búsqueda de respuestas y abordar desde un principio el problema desde una mirada analítica. Diseñaron una escena en GGB que permitió modelizar el mecanismo (biela – manivela, que hasta ese momento desconocían) presente en el caminador. Al usar la opción de “activar rastro” de GGB para el punto que representa la posición de un pie y trazar la curva resultante obtuvieron lo que puede observarse en la figura 9 que indujo a decidir si esa curva es o no elipse.



**Fig. 8.** Modelización del caminador elíptico

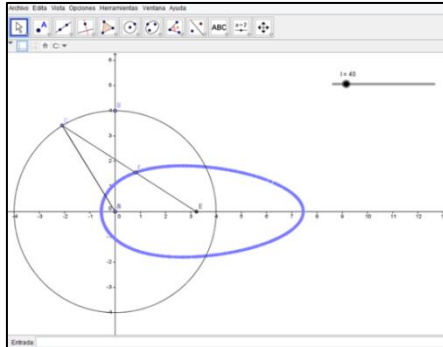


**Fig. 9.** Primeras curvas representadas al activar

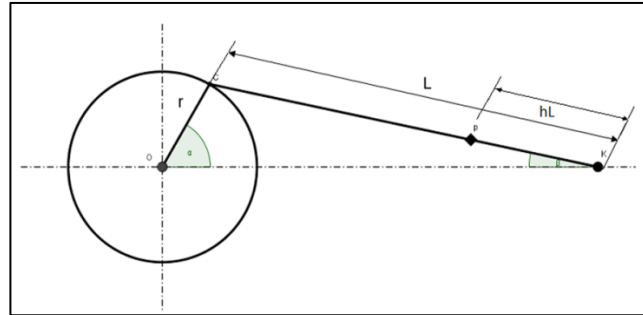
realizada en GGB

rastro del punto F

A partir de la gráfica, los estudiantes aseguraron en una primera instancia que la curva correspondía a una elipse. Al explorar distintas configuraciones del mecanismo, cambiando las medidas de la biela y manivela, obtuvieron curvas como la de la figura 10 lo que los llevó a abandonar esa conjetura.



**Fig. 10:** Curvas resultante cuando se disminuyó la longitud de la biela



**Fig. 11:** Esquema del mecanismo para un giro  $\alpha$  de la manivela

A partir de entonces deciden probar que ninguna de las curvas es una elipse. En ese momento abandonan la GS y relegan a un segundo plano al GGB que hasta allí había tenido un rol central en la elaboración de conjeturas y visualización de casos particulares. El abordaje analítico del problema llevó a los estudiantes a construir modelizaciones similares a la de la Figura 11 y el proceso de estudio los llevó al uso de técnicas de GA. Entre ellas  $T_{4,2}$ : *planteo, manipulación simbólica y reconocimiento de si lo hallado es o no la representación de una elipse* (que había sido usada anteriormente esta vez fue aplicada sobre la trayectoria del punto). Obtuvieron las expresiones (1) y (2) siguientes para las coordenadas del punto  $p$ :

$$x_p = r \cdot \cos \alpha + L \cdot (1 - h) \cdot \left(1 - \frac{r^2}{L^2} \cdot \sin^2 \alpha\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$y_p = h \cdot L \cdot \sin \beta = h \cdot r \cdot \sin \alpha \quad (2)$$

Las expresiones anteriores constituyen las ecuaciones paramétricas de la trayectoria que describe el punto  $p$ , lo que asegura que la curva que describe  $p$  no es una elipse en ningún caso. Es interesante destacar que si definimos  $\lambda = L / r$ , considerando  $\lambda \gg 1$  luego de aproximar la raíz cuadrada a lambda, resulta  $x_p = r \cdot \cos \alpha + (1 - h) \cdot \lambda$  y de (2) y (4) obtenemos  $\frac{(x_p - (1-h) \cdot \lambda)^2}{r^2} + \frac{y_p^2}{(h \cdot r)^2} = 1$  que es la ecuación de una familia de elipses.

### 3. Conclusiones y perspectivas

El estudio alrededor de las distintas OM, favorecido por las escenas de GGB provistas por el docente o construidas por ellos mismos, permitió a los estudiantes utilizar técnicas de la Geometría Sintética que sirvieran para responder las preguntas. Al avanzar, fueron necesarias técnicas tanto de la GS como GA llegando en el último caso a ponerse de manifiesto la insuficiencia de las técnicas sintéticas para explicar por qué no hay ningún diseño de caminadores elípticos en los cuales la trayectoria que describe el pié (idealizado) sea una elipse. Hacia el final de la AEI, en el marco de las entrevistas, los estudiantes pudieron reflexionar sobre las diferentes estrategias que habían utilizado logrando identificar las razones por las cuales cada situación era abordable por ambos enfoques o sólo por uno de ellos. Desde nuestro punto de vista quedó de manifiesto que la insuficiencia de las técnicas sintéticas emergió como la “razón de ser” de las técnicas analíticas.

Un enfoque integrador de la GS y la GA sumado al uso de TIC, especialmente con escenas dinámicas permitió enfrentar un problema complejo de la Ingeniería (el mecanismo biela – manivela) en una materia de primer año. Abordamos así otra desarticulación presente en la institución en la que se implementó la AEI, la desarticulación entre la Matemática y la Ingeniería.

#### 4. Referencias

- Acosta Gempeler, M. (2004). La Teoría Antropológica de lo Didáctico y las Nuevas Tecnologías. Comunicación para el Primer Congreso Internacional de la TAD. Universidad de Jaén.
- Bernat, A. (2011). Las funciones de las calculadoras simbólicas en la articulación entre la geometría sintética y la geometría analítica en secundaria en *Un panorama de la TAD*,
- Bosch, M.; Fonseca, C. y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques*, 24(2-3), pp. 205-250
- Bosch, M. y Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los talleres de prácticas matemáticas a los recorridos de estudio e investigación. En: A. Bronner (Ed.). *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. Montpellier: Université de Montpellier, pp. 55-91
- Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*, [En línea], Recuperado el 17 de Julio de 2015 de [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passé\\_et\\_present\\_de\\_la\\_TAD-2.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passé_et_present_de_la_TAD-2.pdf)
- Gascón, J. (2002a). Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico matemático. En: *Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales* N°28. Universidad Nacional de Educación a Distancia
- Gascón, J. (2002b). Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, 39, pp. 13-25
- Santos Trigo, M.; Espinosa-Pérez, H. & Reyes-Rodríguez, A. (2008). Connecting dynamic representations of simple mathematical objects with the construction and exploration of conic sections. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39:5, pp 657 – 669