INFERENCIA DIRECTA Y APRENDIZAJE MATEMÁTICO EN ESTUDIANTES QUE INGRESAN A LA UNIVERSIDAD

Álvarez, Marisa; Carnelli, Gustavo; Falsetti, Marcela; Lugo, Javier
Universidad Nacional de General Sarmiento.
gcarnell@ungs.edu.ar

Resumen

En el ingreso a la universidad implementamos un dispositivo didáctico para explorar sobre las inferencias que realizan los estudiantes en el trabajo matemático. El mismo atiende, desde la perspectiva semántica, algunas de las dificultades que otras investigaciones han detectado en el ejercicio del razonamiento deductivo tales como: entender la relación entre los objetos en una implicación y sus dependencias, distinguir el significado de “ser verdadero”. Los análisis de las producciones escritas indican que en el marco de aplicación del dispositivo, buena parte de los estudiantes extraen conclusiones como resultado del análisis del contenido involucrado y no de la estructura de la frase.

Palabras clave: Razonamiento lógico-matemático; Inferencia directa; Matemática preuniversitaria; Álgebra básica; Funciones

Abstract

We implement a didactic device in the admission course to university that allowed us to explore the inferences made by students in the mathematical work. From the semantic perspective, this device serves some of the difficulties that other research has detected in the exercise of deductive reasoning such as: understanding the relationship between objects in an implication and its dependencies, to distinguish the meaning of "be true". The analysis of written productions indicate that in the context of application of the device, most of the students draw conclusions as a result of content analysis involved and not the structure of the sentence.

Keywords: Logical-mathematical reasoning; direct inference; pre-university mathematics; basic algebra; functions

1. Introducción y encuadre teórico-conceptual.

Situados en el acceso a los estudios universitarios, nos interesa avanzar en el conocimiento de las formas que los estudiantes utilizan para extraer conclusiones al realizar tareas matemáticas. Más precisamente, nos ubicamos en las clases del Taller de Matemática del Curso de Aprestamiento Universitario, la instancia obligatoria para todos los aspirantes a realizar carreras de grado en la Universidad Nacional de General Sarmiento.
La inferencia deductiva es una de las manifestaciones del razonamiento abstracto. Acorde con Balacheff (1987), reservamos el término razonamiento para designar la actividad intelectual, la mayor parte del tiempo no explícita, de manipulación de información para, a partir de datos, producir nueva información. Diversas investigaciones dan cuenta de las dificultades de los estudiantes para el razonamiento matemático expresado en actividades matemáticas como la demostración, resolución de problemas, generalización, etc. Al respecto, Alvarado y González (2009) señalan como

dificultades en el aprendizaje de la demostración, la centralidad que los estudiantes dan al significado de las proposiciones mientras que les resulta difícil fijarse en los aspectos relativos al estado (hipótesis, conclusión, etc.) así como la deficiencia de conocimientos de un aparato lógico y lingüístico adecuado. Estas autoras identifican errores en el tratamiento de la implicación tales como las falacias provenientes de falsas simetrías, manejo indistinto de una implicación y su recíproca o su contraria y la no admisión del papel condicional de la hipótesis. Por su parte, Cambón (2006) señala obstáculos en el razonamiento matemático que se suscitan por diferencias de expresiones del lenguaje cotidiano y el matemático, por ejemplo la expresión "si…entonces" que en el lenguaje corriente suele expresar una equivalencia y no sólo un condicional como en Matemática. Otra diferencia señalada es la concepción de "verdadero". En lo cotidiano, lo verdadero está relacionado con lo que acontece muy frecuentemente y proviene de la generalización de experiencias personales, mientras que en Matemática lo verdadero se organiza en relación con las reglas lógicas.
Desde la intervención didáctica que aquí presentamos abordamos estas cuestiones haciendo hincapié en lo semántico, es decir en los significados de los conceptos involucrados y en que la conclusión resulte del análisis del contenido y no del formato de la frase. De este modo, la condición de "ser verdadero" se torna una función reguladora de la construcción del conocimiento, que tiene raíces en el intercambio social del discurso, como por ejemplo en la explicación o la argumentación, y no como una condición resultante del formato tal como lo establecen las tablas de verdad o el álgebra de proposiciones, propias del tratamiento lógico-matemático moderno. Esto acuerda con una concepción desarrollista de la lógica según la cual las reglas del *pensar correctamente* no son fruto de una intuición racional capaz de captar las leyes lógicas absolutas y apriorísticas, sino que son resultado de prácticas y hábitos desarrollados a lo largo de la evolución individual y de la evolución social mediadas por un proceso reflexivo que logra trascender los detalles propios de la situación. Consideramos que teorías que sostienen esta concepción son las de Dewey (1938, 1916), para quien las formas lógicas tienen un valor funcional a partir del manejo psicológico de la evidencia de los hechos y del control de los procedimientos involucrados en la puesta en juego de las hipotéticas soluciones frente a situaciones problemáticas y las de Piaget, para quien el sujeto desarrolla relaciones y estructuras lógicas que son instrumentos asimiladores para aprehender y organizar el conocimiento (García, 1988).
Dentro de los razonamientos inferenciales, tomamos algunos silogismos porque son razonamientos que prevén una previa clasificación, introducen al entendimiento del uso de los cuantificadores desde el análisis de las clases y la negación tiene una interpretación intuitiva que es la de no pertenecer a una clase. Discutimos la validez de los razonamientos desde el contenido y sin hacer hincapié en la forma.

2. Descripción del dispositivo didáctico

El dispositivo didáctico se llevó a cabo en dos comisiones de Matemática del curso de ingreso de la UNGS. Los docentes a cargo de cada una de ellas formaban parte del equipo de investigación. El mismo fue diseñado de modo que estuviera integrado a la propuesta didáctica de la asignatura en la cual se utiliza un libro elaborado para el curso que contiene actividades para resolver por el estudiante, así como explicaciones, ejemplos y problemas desarrollados (Carnelli et al., 2013). La intervención se realizó en distintos momentos, con las siguientes características:
Un trabajo inicial orientado por el profesor con el colectivo de la clase sobre razonamientos lógicos con contenido matemático. Este trabajo enfatizaba el reconocer

la estructura de una implicación y el rol de sus componentes. Mediante ejemplos, se analizó que del conocimiento del valor de verdad de un enunciado directo no puede deducirse el valor de verdad del recíproco. El tratamiento sobre el valor de verdad de las distintas proposiciones y la validez de los razonamientos se basó en los significados del contenido matemático más que en la formulación sintáctica de leyes lógicas.

Una tarea domiciliaria cuyo propósito era recuperar lo visto en la clase en relación con el contenido matemático y con lo trabajado de Lógica y también propiciar una actividad reflexiva sobre cuestiones que serían evaluadas de modo presencial. Además, se pretendía que se habitúen a un tipo de actividad que suponíamos que no les era familiar.

Una tarea presencial que contemplaba deducciones analíticas, de razonamientos inductivos inferenciales, los conceptos y propiedades estudiados del contenido propuesto.

2.1. La inferencia directa con Álgebra.

En un primer momento nos centramos en la deducción analítica, con temas de Álgebra básica, entendida como toda inferencia que resulta de una manipulación algebraica de las expresiones simbólicas presentadas y de dar significado a los símbolos trabajados.

Trabajo en la clase e indicaciones al docente: propusimos enfatizar en la clase la subsección del libro correspondiente a la fórmula resolvente para ecuaciones cuadráticas y la determinación de la cantidad de soluciones según el discriminante y el conjunto solución. Indicamos al docente trabajar en la clase con la siguiente consigna:

1. Si se sabe que el discriminante de una ecuación cuadrática es mayor igual que cero, ¿qué puede decir de las soluciones de la ecuación?

2. Extraer una conclusión a partir de las siguientes condiciones:

a) Cualquier ecuación cuadrática tiene a lo sumo dos soluciones reales.

b) Se da una determinada ecuación que no tiene dos raíces reales. ¿Qué puede decir del discriminante de la ecuación en cada caso?

Actividad domiciliaria:

Dada la ecuación $\frac{1}{4}ax^2 + bx + c = 0$ *, en la que a, b y c son ternas de números enteros consecutivos con a ≠ 0. ¿Cuántas soluciones tiene? ¿Puede decirse cuáles son?*

Actividad presencial:

El objetivo de esta actividad consistió en propiciar el uso de una deducción analítica para sacar conclusiones respecto al valor de una expresión algebraica y las soluciones de una ecuación cuadrática y favorecer el razonamiento inductivo mediante la generalización desde ejemplos concretos.

a) Si a, b y c son tres números enteros consecutivos, ¿qué se puede decir del valor que toma la expresión $b^2 - a.c$ *?*

b) Utilizando el ítem a), ¿cuáles son los valores de x que satisfacen la ecuación: $(b^2 - a.c)\, x^2 = 1$*, si a, b y c son tres números enteros consecutivos?*

Antes de la finalización del curso, se propuso una serie de actividades de integración. En relación con los temas de Álgebra básica se propuso lo siguiente.

Actividad domiciliaria:

En la ecuación $\frac{1}{a}.x^2 + 4x + a = 0$*, a es un número real cualquiera distinto de 0.*

a) Si es posible muestre cómo resultan las soluciones.

b) ¿qué se puede decir de la cantidad de soluciones de la ecuación dada?

Actividad presencial:

Si a, b y c son tres números enteros consecutivos,

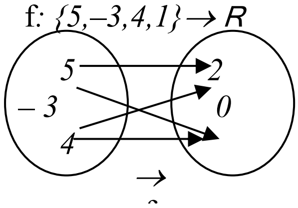
a) ¿qué se puede decir de la cantidad de soluciones de la ecuación $ax^2 + 2bx + c = 0$ *?*
b) Si es posible muestre cómo resultan las soluciones.

2.2. Estudio de la inferencia directa con funciones

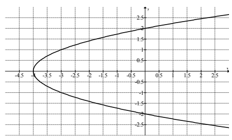
En un segundo momento de la intervención se trabajó con el contenido Funciones.
Actividad domiciliaria y actividad presencial: se pretendió: a) estudiar la interpretación de un enunciado matemático desde su estructura sintáctica; b) aproximarse a las estructuras (Si p y q entonces r y su contrarrecíproca) a partir de la definición de función.
Actividad domiciliaria:
Leer atentamente la siguiente reformulación de la definición de función.
Dados dos conjuntos A y B (no vacíos), una función de A en B, notada f: A→B, es una asignación que cumple simultáneamente con las siguientes dos condiciones:
- *a cada elemento de A le asigna un elemento de B*
- *a cada elemento de A no le asigna más de un elemento de B*

Decidir, en cada caso, si la relación que se muestra es o no una función. Indicar el modo en que toma la decisión. Justificar con precisión utilizando las condiciones dadas en la definición.

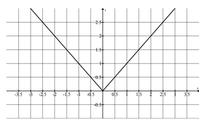
f: $\{5,-3,4,1\} \to R$



g: $R \to R$



h: $R \to R$



p: R→ R / *p(x)* = $x^2 - 3$

Actividad presencial:
La definición de función contiene dos condiciones. Llamémoslas p y q.
p: a cada elemento de A le asigna un elemento de B
q: a cada elemento de A no le asigna más de un elemento de B
*a) Dada una asignación f: A → B, se tiene como información que hay elementos de A que tienen más de un correspondiente. ¿Es f una función? ¿Por qué? Responder en términos del cumplimiento de las condiciones **p** y **q**.*
*b) Si se tiene como información que una asignación de A en B **no** es función, ¿qué puede decir del cumplimiento de las condiciones **p** y **q**?*
*c) Llamando **r** a la proposición **r: "es función de A en B"**, escribir a las siguientes proposiciones en lenguaje coloquial usando el significado asignado para **p**, **q** y **r**.*
- *Si **p y q** entonces **r***
- *Si **p o q** entonces **r***
- *Si **no r** entonces **no p y no q***
- *Si **no r** entonces **no p o no q***

d) indicar, para cada una de las proposiciones dadas en c), cuáles acuerdan con lo expresado en la definición de función. Justificar.
Trabajo en la clase e indicaciones al docente: Trabajar la forma lógica de la definición de función *Si **p y q** entonces **r***, la contrarrecíproca y que el consecuente equivale a **no p o no q**.
En la secuencia integradora, se retomó el tema funciones:
Actividad domiciliaria:
1. Si una asignación de A en B cumple que a cada elemento de A le asigna un único elemento de B entonces es una función
De una asignación f_1 se sabe que hay algún elemento de A que no tiene un asignado o correspondiente en B

Usando esta información, ¿Puede garantizar que la asignación f_1 es función?
2. Si una asignación de A en B cumple que a cada elemento de A le asigna un único elemento de B entonces es una función
De una asignación f_2 se sabe que cada elemento de A tiene a lo sumo un correspondiente.
Usando esta información, ¿Puede garantizar que la asignación f_2 es función?
Actividad presencial:
1. Si una asignación de A en B cumple que a cada elemento de A le asigna un único elemento de B entonces es una función.
De una asignación f_2 se sabe que ningún elemento de A tiene más de un correspondiente.
Usando esta información, ¿Puede garantizarse que la asignación f_2 es función?
2. Si una asignación de A en B cumple que a cada elemento de A le asigna un único elemento de B entonces es una función
De una asignación f_3 se sabe que el elemento x_1 de A tiene un único correspondiente en B y que el elemento x_2 de A no tiene ningún correspondiente en B.
Usando esta información, ¿Puede garantizarse que la asignación f_3 es función?
3. Si una asignación de A en B cumple que a cada elemento de A le asigna un único elemento de B entonces es una función.
De una asignación f_4 se sabe que todos los elementos de A tienen algún correspondiente en B y que f_4 no es una función.
Usando esta información, ¿por qué f_4 no es función? ¿Qué condición no se cumple?

3. Resultados

En las tareas de álgebra básica se tenía previsto que los alumnos pudieran recurrir al uso de ejemplos numéricos y una posterior generalización para justificar que la expresión algebraica allí propuesta era constante. Un 35% resolvió haciendo uso de dos a tres ejemplos. Sin embargo, un 42% utilizó solamente un ejemplo, que les resultó suficiente para establecer dicha conclusión. Sólo un 13% recurrió al uso de la deducción analítica a partir de la expresión algebraica propuesta y obteniendo la misma conclusión. Además, un 10% no resolvió la consigna. En la devolución, se discutió sobre la validez matemática de estos modos de resolver la actividad, haciendo hincapié en que el único que garantiza la veracidad de la conclusión es la deducción analítica. Como dijimos, en la última instancia de aplicación del dispositivo se les hizo entrega a los alumnos de dos actividades similares. Una gran proporción de alumnos (74%) incurrió nuevamente en este modo de obtener conclusiones generales a partir del trabajo con uno o dos ejemplos solamente. Sólo un (10%) propuso un tratamiento de manera general. Aunque se presentaran algunos errores en la manipulación algebraica y en la representación simbólica de los coeficientes de la ecuación cuadrática hubo una baja en la cantidad de alumnos que hacen uso de una deducción analítica. Esto evidencia que aún cuando en las clases se pone en cuestión la generalización a partir de casos particulares, los alumnos no reconocen las limitaciones del razonamiento inductivo ya que consideran que para obtener conclusiones que garanticen la generalidad resulta suficiente con aumentar el número de casos particulares en los cuales la conclusión es válida. Un 16% del alumnado no resolvió la consigna.
En las actividades de Funciones los estudiantes presentan dificultades al momento de trabajar con las dos condiciones que aparecen en la definición. Para decidir si la relación es una función muchos recurren a la definición de función que han visto en la clase, donde no se hace una división en dos condiciones. Cuando tienen que justificar por qué

la relación propuesta no es una función algunos estudiantes no logran precisar sobre cuál de esas condiciones es la que no se satisface. Otro grupo de alumnos, a pesar de no explicitar qué condición de las dadas es la que no se cumple, proponen un ejemplo para mostrar por qué la relación no es función. A partir de él, es posible evidenciar cuál es la condición que el estudiante observa que falla al momento de clasificar la relación como función.

En relación con la actividad presencial, el primer ítem retoma el tratamiento de decidir sobre si una relación es una función y justificar apelando a las dos condiciones presentadas. En este caso, una gran proporción de estudiantes (70%) logra identificar correctamente cuál es la condición que no se satisface en el enunciado propuesto.

Al momento de escribir las proposiciones enumeradas de manera coloquial muchos estudiantes comenten errores en el uso de los cuantificadores y con la negación. Por ejemplo, ante la proposición p "a cada elemento de A le asigna un elemento de B" y su consiguiente negación $\neg p$, los estudiantes escriben "entonces a cada elemento de A no le asigna un elemento de B". Sólo unos pocos (5%) pudieron realizar la escritura correcta solventando la dificultad que implica negar una condición que es válida para cualquier elemento. Hay otros (18%) que no reformulan las negaciones, sino que sólo mencionan que "no se cumple que a cada elemento de A no le asigna un elemento de B".

Por último, cuando deben determinar cuáles de las proposiciones dadas acuerdan con la definición de función solamente unos pocos estudiantes logran identificar tanto la proposición que resume la definición de función como así también su equivalente enunciada a través del contrarecíproco.

En las actividades posteriores de integración, sólo unos pocos alumnos pudieron responder bien si la asignación propuesta corresponde a una función, atendiendo a las distintas variantes que se pueden suceder para que la asignación dada no sea una función y además, solventando la dificultad de los enunciados que tienen la negación de alguna proposición.

4. Consideraciones finales

En este trabajo presentamos un dispositivo de intervención didáctica orientado a la enseñanza de la inferencia directa y una descripción de algunos resultados obtenidos luego de su implementación con estudiantes que se inician en los estudios universitarios. Aunque los resultados son preliminares como para permitir la elaboración de conclusiones acerca de la temática en cuestión, consideramos que el dispositivo en sí mismo es un aporte significativo ya que propone abordar la enseñanza de la inferencia directa desde lo contextual (el contenido matemático) y no desde lo estructural (leyes lógicas).

Hemos observado que para su aplicación se requiere un trabajo previo que garantice la comprensión del tipo de actividad que se propone, pues éstas no les resultan familiares.

Las actividades vinculadas a Álgebra propiciaban la utilización del razonamiento inductivo puesto que podrían haber recurrido a varios ejemplos y a partir de ellos extraer alguna conclusión. Sin embargo, muchos construyeron un único ejemplo a partir del cual concluir. Consideramos que esto resulta una aproximación al razonamiento inductivo ya que se corresponde con un modo de pensar que busca generalizar mirando lo que sucede en lo particular. Entendemos que es necesario profundizar sobre esta situación.

Por otra parte, hubo muy pocos alumnos que optaron por una deducción analítica, mediante la manipulación algebraica de las expresiones, como medio para responder la consigna. Lo que no resulta evidente sólo de la lectura de sus producciones es si esta elección se apoyó en el reconocimiento de las limitaciones del razonamiento inductivo como modo de validación. Por esta razón, consideramos que podríamos avanzar con entrevistas con los estudiantes con el fin de profundizar en lo dicho anteriormente.

6. Referencias bibliográficas

Alvarado Monroy, A. y González Astudillo, M. T. (2009). *La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso*. Revista Enseñanza de las Ciencias. 28(1), pp 73-83.

Balacheff, N. (1987) *Processus de preuves et situations de validation*. Educational Studies in Mathematics. 18(2), pp 147-176.

Carnelli, G., Cesaratto, E., Falsetti, M., Marino, T. (2013) *Matemática en contexto*. Los Polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento.

Dewey, J. (1916) *Essays in Experimental Logic*. Chicago: The University of Chicago Press, 2006

Dewey, J. (1938) *Logic: The theory of the Inquiry.* New York: Henry Holt and company.

García, R. (1988) "Lógica y epistemología genética" en *Hacia una lógica de significaciones*. Buenos Aires: Bibliotecas Universitarias. Centro Editor de América Latina

Piaget, J. (2013) La psicología de la inteligencia, lecciones en el Collège de_France. Buenos Aires: Siglo XXI editores.